Kombinatorische Spieltheorie

Gewinnen mit Mathematik!
Workshop für TryScience

erkennen.
beweisen.
anwenden.

Dr. Friederike Stoll
Prof. Dr. Michael Eisermann
eiserm.de/popularisation

Universität Stuttgart

17. März 2023

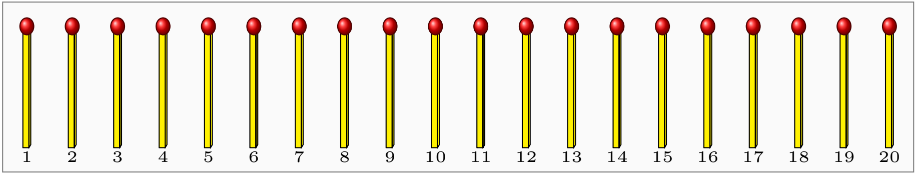
Habe Mut, dich deines eigenen
Verstandes zu bedienen!

Much to learn, you still have.
This is just the beginning.

Herzlich willkommen zu TryScience!

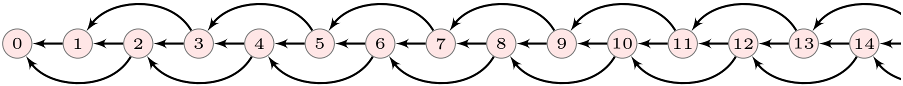
Mathematik ist Kunst und Handwerk, wunderschön und nützlich.
Mathematisch arbeiten bedeutet: erkennen. beweisen. anwenden.

Nimm eins oder zwei!



Beide Spieler ziehen abwechselnd, jeder entfernt ein oder zwei Hölzer.
Normalspiel: Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.

Aufgabe: Übersetzen Sie die Spielregeln in einen Spielgraphen. **Lösung:**



Aufgabe: Berechnen Sie für jede Position $x \in X$ Gewinn 1 oder Verlust 0.

- **Normalspiel**, $\nu : X \to \{0, 1\}$: Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.

$$\boxed{\nu(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \partial X \text{, sonst} \\ 1 - \min\{\, \nu(y) \mid x \to y \,\}. \end{cases}}$$

- Noch informativer als ν ist die **Sprague–Grundy–Funktion**:

$$\boxed{\begin{gathered} \gamma : X \to \mathbb{N} : \gamma(x) = \operatorname{mex}\{\, \gamma(y) \mid x \to y \,\}, \\ \operatorname{mex} : \{\, S \subsetneq \mathbb{N} \,\} \to \mathbb{N} : S \mapsto \min(\mathbb{N} \setminus S). \end{gathered}}$$

Beispiele: $\operatorname{mex}\{0, 1, 3, 5\} = 2$, $\operatorname{mex}\{0\} = 1$, $\operatorname{mex}\{1, 2, 3\} = 0$, $\operatorname{mex}\{\,\} = 0$.

Lösung: (1) Wir rechnen rekursiv, geschickt sortiert *bottom-up*:

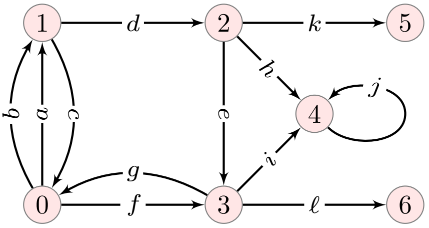
$x=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\nu=$	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
$\gamma=$	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2

(2) Wie lautet die allgemeine Regel? Wir krönen unsere Bemühungen:

Satz 1A: einzeiliges Nim mit Zugoptionen $S = \{1, 2, \dots, n-1\}$, $n \ge 2$

Normalspiel: Genau dann ist x eine Verlustposition, wenn $x \operatorname{rem} n = 0$.
Die Sprague–Grundy–Funktion des Spiels ist $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto x \operatorname{rem} n$.

Was genau ist ein Graph?



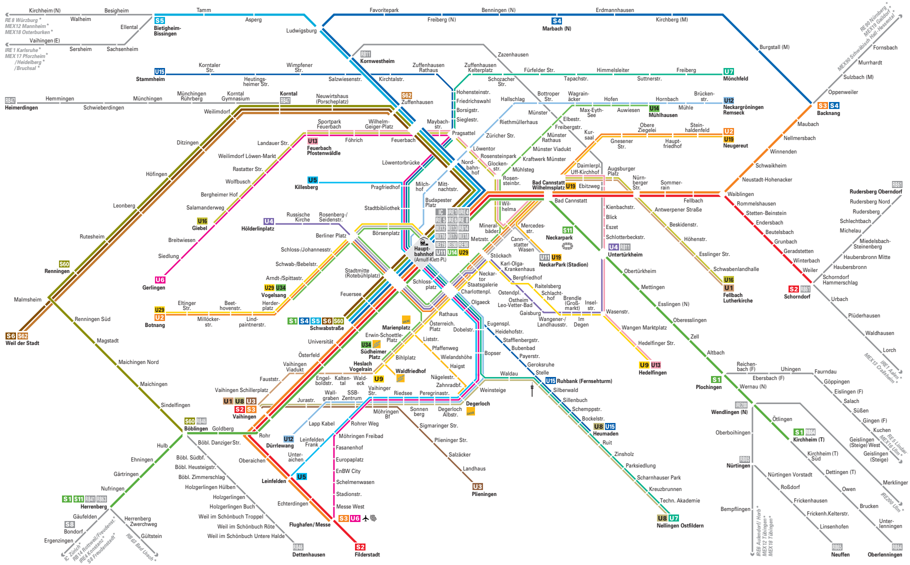
$$
\begin{aligned}
X &= \{0, 1, \dots, 6\}\\
A &= \{a, b, \dots, \ell\}\\
(\sigma, \tau) : a &\mapsto (0, 1)\\
b &\mapsto (0, 1)\\
&\dots\\
\ell &\mapsto (3, 6)
\end{aligned}
$$

Definition 1B: gerichteter Multigraph $\Gamma = (\Gamma_0 \leftleftarrows \Gamma_1)$, kurz Graph

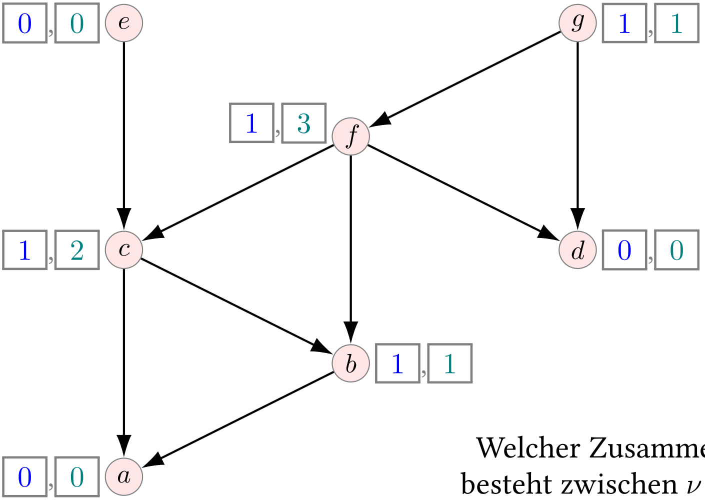
Ein **Graph** $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ besteht aus einer Eckenmenge $\Gamma_0 = X$ [*vertices*], einer Kantenmenge $\Gamma_1 = A$ [*edges*], sowie Randabbildungen $\sigma, \tau : A \to X$ [*boundary maps*], die jeder Kante $a \in A$ ihren Start $\sigma(a) \in X$ [*source*] und ihr Ziel $\tau(a) \in X$ [*target*] zuordnen.

Eine Kante $a \in A$ von $\sigma a = x$ nach $\tau a = y$ schreiben wir kurz $a : x \to y$ oder $x \xrightarrow{a} y$ und ebenso Wege $w = (x_0 \xrightarrow{a_0} x_1 \xrightarrow{a_1} \dots \longrightarrow x_n) \in \Gamma_n \subseteq \Gamma_*$. Der Graph Γ heißt **artinsch**, wenn er keine unendlichen Wege enthält, und **lokal-endlich** in $x \in X$, wenn die Menge $\{\, a : x \to y \,\}$ endlich ist.

Alltägliche Beispiele für Graphen



Aufgabe: Berechnen Sie $\nu, \gamma : X \to \mathbb{N}$ für das folgende Spiel G:



Welcher Zusammenhang besteht zwischen ν und γ?

Satz 1D: Aus γ folgt ν.

Für jeden Zustand $x \in X$ gilt

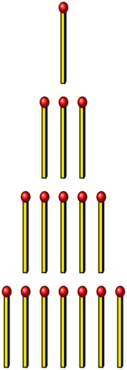
$$\nu(x) = \gamma(x) \wedge 1 := \begin{cases} 0 & \text{falls } \gamma(x) = 0, \\ 1 & \text{falls } \gamma(x) \geq 1. \end{cases}$$

Rückwärtsinduktion: Sei $x \in X$. Für alle Folgezustände y, mit $x \to y$, sei die Aussage bereits bewiesen. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(0) *Verlustposition:* Führt jeder Zug $x \to y$ zu $\nu(y) = 1$, so gilt $\nu(x) = 0$. In diesem Falle gilt $\gamma(y) \geq 1$, also $\gamma(x) = 0$, somit $\nu(x) = \gamma(x) \wedge 1$.

(1) *Gewinnposition:* Führt ein Zug $x \to y$ zu $\nu(y) = 0$, so gilt $\nu(x) = 1$. In diesem Falle gilt $\gamma(y) = 0$, also $\gamma(x) \geq 1$, somit $\nu(x) = \gamma(x) \wedge 1$. $\boxed{\text{QED}}$

Das Spiel Nim: Formalisierung als Graph



$x_4 = 1$

$x_3 = 3$

$x_2 = 5$

$x_1 = 7$

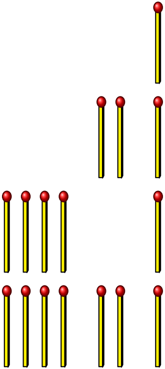
Zustand $x = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$

Aktion $a = \quad (x, r, s, y) \quad \begin{cases} (r, s) \in \mathbb{N}^2 \\ 1 \le s \le x_r \\ y = x - s\, e_r \end{cases}$

Zustand $y = (y_0, y_1, y_2, \dots) \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$

Aufgabe: Formulieren Sie dieses Spiel in Worten und als Graph.

Das Spiel Nim: effiziente Lösung nach Charles Bouton 1901



$x_4 = 001_{\text{bin}}$

$x_3 = 011_{\text{bin}}$

$x_2 = 101_{\text{bin}}$

$x_1 = 111_{\text{bin}}$

Wir entwickeln x_i im Binärsystem

$$x_i = \sum_{j=0}^{m} \langle x_i \rangle_j \, 2^j \quad \text{mit} \quad \langle x_i \rangle_j \in \{0, 1\}$$

und bilden die Spaltensumme

$$\langle s \rangle_j = \sum_{i=0}^{n} \langle x_i \rangle_j \text{ rem } 2.$$

Binäre Summe ohne Übertrag (XOR):

$$s = \sum_{j=0}^{m} \langle s \rangle_j \, 2^j =: x_0 \oplus x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$$

Satz 1F: effiziente Lösung des Nim-Spiels, Bouton 1901

Im Normalspiel sind die Verlustpositionen x genau die Null-Positionen:

(0) Ist $x \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ eine Null-Position, also $x_0 \oplus x_1 \oplus \ldots \oplus x_n = 0$, so führt jeder Zug $x \to y$ in eine Nicht-Null-Position, $y_0 \oplus y_1 \oplus \ldots \oplus y_n \neq 0$.

(1) Ist x eine Nicht-Null-Position, $x_0 \oplus x_1 \oplus \ldots \oplus \ldots x_n \neq 0$, so existiert ein Zug $x \to y$ in eine Null-Position, also $y_0 \oplus y_1 \oplus \ldots \oplus y_n = 0$.

Nim: starke Lösung nach Sprague 1935, Grundy 1939

Satz 1G: die Sprague–Grundy–Funktion des Nim-Spiels

Für Nim ist die Sprague–Grundy–Funktion $\gamma : X \to \mathbb{N}$ gegeben durch

$$\boxed{\gamma(x) = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} x_i = x_0 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus \dots .}$$

(0) Für jede Aktion $(r,s) : x \to y$ gilt $x_r \neq y_r$ und somit $\gamma(x) \neq \gamma(y)$.
(1) Zu $0 \le n < \gamma(x)$ existiert eine Aktion $(r,s) : x \to y$ mit $\gamma(y) = n$.

$$\begin{array}{l}
1 = 001_{\mathrm{bin}} \\
3 = 011_{\mathrm{bin}} \\
5 = 101_{\mathrm{bin}} \\
7 = 111_{\mathrm{bin}} \\
\hline
0 = 000_{\mathrm{bin}}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllllll}
1 = 001_{\mathrm{bin}} & \to & \cancel{2 = 010_{\mathrm{bin}}} & \to & \cancel{3 = 011_{\mathrm{bin}}} & \to & 0 = 000_{\mathrm{bin}} \\
3 = 011_{\mathrm{bin}} & \to & 0 = 000_{\mathrm{bin}} & \to & 1 = 001_{\mathrm{bin}} & \to & 2 = 010_{\mathrm{bin}} \\
6 = 110_{\mathrm{bin}} & \to & 5 = 101_{\mathrm{bin}} & \to & 4 = 100_{\mathrm{bin}} & \to & \cancel{7 = 111_{\mathrm{bin}}} \\
7 = 111_{\mathrm{bin}} & \to & 4 = 100_{\mathrm{bin}} & \to & 5 = 101_{\mathrm{bin}} & \to & 6 = 110_{\mathrm{bin}} \\
\hline
3 = 011_{\mathrm{bin}} & \to & 0 = 000_{\mathrm{bin}} & \to & 1 = 001_{\mathrm{bin}} & \to & 2 = 010_{\mathrm{bin}}
\end{array}$$

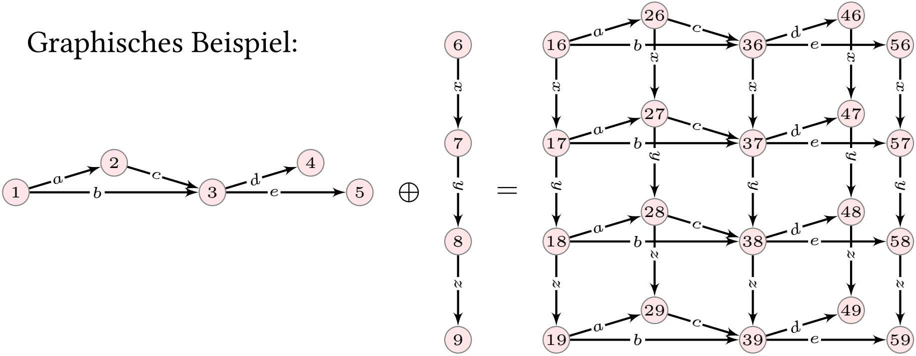
Satz 1G: formale Konstruktion

Sei $z := \gamma(x) \oplus n = 2^\ell + \sum_{k=0}^{\ell-1} z_k 2^k$. Wir wählen $r \in \mathbb{N}$ mit $\langle x_r\rangle_\ell = 1$.
Das garantiert $y_r := x_r \oplus z < x_r$ und ergibt $\gamma(y) = \gamma(x) \oplus z = n$.

Summe von Spielen

Wir spielen mehrere Spiele G_i parallel, also gleichzeitig nebeneinander. Der ziehende Spieler darf sich aussuchen, in welchem Spiel G_i er zieht. Dies fassen wir zusammen zu einem gemeinsamen Spiel $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$.

Graphisches Beispiel:



Satz 2B: Sprague 1935, Grundy 1939

Gegeben seien lokal-endliche artinsche Graphen $G_i = (X_i, A_i, \sigma_i, \tau_i)$. Dann ist auch ihre Summe $G = \bigoplus_{i\in I} G_i$ lokal-endlich und artinsch, und für ihre Sprague–Grundy–Funktion gilt $\gamma(x) = \bigoplus_{i\in I} \gamma_i(x_i)$.

Genauer: (0) Für jede Aktion $(i, a_i) : x \to y$ in G gilt $a_i : x_i \to y_i$ in G_i. Für die Grundy–Zahlen folgt $\gamma_i(x_i) \neq \gamma_i(y_i)$ und somit $\gamma(x) \neq \gamma(y)$.

(1) Zu $0 \le n < \gamma(x)$ existiert eine Aktion $(i, a_i) : x \to y$ mit $\gamma(y) = n$. Den Satz beweisen wir durch die Konstruktion solcher Züge:

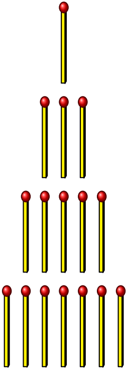
Satz 2B: formale Konstruktion

(1) Wir lösen $\gamma(x) \oplus z = n$ durch $z = \gamma(x) \oplus n = 2^\ell + \sum_{k=0}^{\ell-1} z_k 2^k$ und wählen $i \in I$ mit $\langle \gamma_i(x_i) \rangle_\ell = 1$. Somit gilt $\gamma_i(x_i) \oplus z < \gamma_i(x_i)$.

In G_i existiert eine Aktion $a_i : x_i \to y_i$ mit $\gamma_i(y_i) = \gamma_i(x_i) \oplus z$.
In G erhalten wir $(i, a_i) : x \to y$ mit $\gamma(y) = \gamma(x) \oplus z = n$.

Nimm eins oder zwei, nun mit mehreren Zeilen

Aufgabe: Nennen Sie für die gezeigte Position *alle* Gewinnzüge!



$x_4 = 1 \;\Rightarrow\; \gamma_4(x_4) = 01_{\mathrm{bin}} \xrightarrow{?} 11_{\mathrm{bin}} = \gamma_4(y_4)$ unmöglich

$x_3 = 3 \;\Rightarrow\; \gamma_3(x_3) = 00_{\mathrm{bin}} \xrightarrow{?} 10_{\mathrm{bin}} = \gamma_3(y_3) \;\Leftarrow\; y_3 = 2$

zusätzlicher, erhöhender Gewinnzug!

$x_2 = 5 \;\Rightarrow\; \gamma_2(x_2) = 10_{\mathrm{bin}} \xrightarrow{?} 00_{\mathrm{bin}} = \gamma_2(y_2) \;\Leftarrow\; y_2 = 3$

garantierter, reduzierender Gewinnzug

$x_1 = 7 \;\Rightarrow\; \gamma_1(x_1) = 01_{\mathrm{bin}} \xrightarrow{?} 11_{\mathrm{bin}} = \gamma_1(y_1)$ unmöglich

Gewinnposition? $\gamma(x) = 10_{\mathrm{bin}} \xrightarrow{!} 00_{\mathrm{bin}} = \gamma(y)$ Züge?