$pieltheorie und €thik

Erklärt Mathematik unser menschliches Verhalten?

Prof. Dr. Michael Eisermann
mit Dr. Friederike Stoll

`eiserm.de/popularisierung`

Ökumenisches Zentrum
der Universität Stuttgart
17. und 24.10.2022

Habe Mut, dich deines eigenen
Verstandes zu bedienen!

Much to learn, you still have.
This is just the beginning.

Begrüßung

Herzlichen Dank für die freundliche Einladung, hier im Ökumenischen Zentrum vorzutragen, großzügig sogar an zwei Abenden!

Wir möchten Ihnen einen kleinen Einblick in die Spieltheorie geben, erste Bei-Spiele ausprobieren und Beziehungen zur Ethik diskutieren.

Die Spieltheorie als Wissenschaft wird seit knapp 100 Jahren betrieben und ist somit vergleichsweise noch jung. Nach zaghaften Anfängen in den 1920er Jahren hat sie sich seit den 1950ern rasant entwickelt und ist inzwischen ein riesiges Gebiet mit zahlreichen Anwendungen.

(Zum Vergleich: Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist deutlich älter, sie begann im 17. Jh. mit Fragestellungen zum Glücksspiel. Wirklich alt ist die Geometrie, als Theorie ca. 2500 Jahre, praktisch angewandt schon seit Beginn menschlicher Zivilisation in Landvermessung und Architektur.)

Ich habe ein paar Bei-Siele ausgewählt, nur wenige, aber sehr schöne, die uns hoffentlich viel Freude bereiten – auch mit Oho und Aha!

Kapitel A

Spieltheorie und Ethik, erster Abend

To be literate in the modern age, you need to have
a general understanding of game theory.
Paul Samuelson (1915–2009), Nobelpreis 1970

Inhalt dieses Kapitels A


Universität Stuttgart - Winnersemester 2019/20
Michael €isermann
Friederike $toll
Casino Royal
V57
$pieltheori€
& ökonomisches Verhalten
Die Würfel sind gefallen: Die Spieltheorie geht in die zweite Runde! Diese Veranstaltung präsentiert grundlegende Modelle und Beispiele, Begriffe und Techniken der Spieltheorie: statische und dynamische Spiele, Normalform und extensive Form, vollständige und unvollständige Information, Rationalität, Nash-Gleichgewichte und verfeinerte Lösungskonzepte, Lösungsmethoden, lineare Programme und Simplexalgorithmus, Anwendungen der Mikroökonomie, kollektive Entscheidungen und Verhandlungstheorie, Koalitionen und kooperative Spieltheorie, Auktionen und Mechanismendesign. Jetzt neu: angewandt-experimentelle Spieltheorie im hauseigenen Casino Royal. Freitags 14 Uhr ist Lucky Hour. Mesdames et messieurs, faites vos jeux !
Ab 17. Oktober im Hörsaal

Was ist und was soll die Spieltheorie?

Spieltheorie versucht, strategisches / ökonomisches / menschliches Verhalten zu beschreiben, zu erklären, vorherzusagen, zu optimieren.

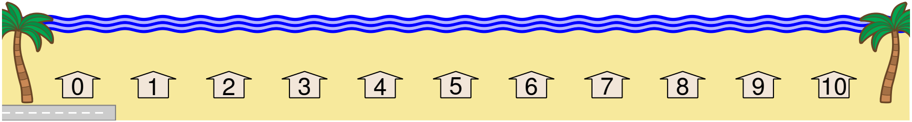
To be literate in the modern age, you need to have a general understanding of game theory.
Paul Samuelson (1915–2009), Nobelpreis 1970

Spiele beschreiben Konflikte, Konkurrenz und Kooperation:

- Mehrere Akteure interagieren (Individuen, Firmen, Staaten, KI).
- Jeder Akteur hat gewisse Handlungsoptionen (Züge, Strategien).
- Aus diesen Möglichkeiten wählt jeder Akteur aus (frei, unabhängig).
- Daraus entsteht für jeden ein Ergebnis (Nutzen, Auszahlung, etc).
- Jeder Spieler versucht, sein eigenes Ergebnis zu maximieren.

If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.
John von Neumann (1903–1957)

Un/Klug positionieren: Kiosk am Strand



Sie eröffnen einen Kiosk, mögliche Positionen sind $x \in \{0, 1, \dots, 10\}$. Die Badegäste sind gleichverteilt und gehen immer zum nächsten Kiosk. Jeder Spieler (Kiosk) maximiert seine Kundenzahl (Umsatz, Marktanteil). Bei sonst gleichem Anteil sucht jeder die Nähe zur Zufahrtstraße bei 0.

Aufgabe: (1) Sie haben die einzige Lizenz. Wo bauen Sie Ihren Kiosk?
(2) Sie haben die erste von zwei Lizenzen. Wo bauen Sie Ihren Kiosk?
(3) Sie haben die erste von drei Lizenzen. Wo bauen Sie Ihren Kiosk?
Finden Sie zu jedem Zug von A die beste Antwort von B und von C!

Lösung: Bei rationalem Verhalten finden wir folgende Anordnungen:

(1)	A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(2)	0	1	2	3	B	A	6	7	8	9	10
(3)	0	1	B	C	4	5	6	7	A	9	10

Un/Klug positionieren: Kiosk am Strand

Ausführlich: Frage (1) wird gelöst durch die offensichtliche Optimierung.
Bei Frage (2) suchen wir zu jedem Zug von A die beste Antwort von B:

A	B										1 : 10
	A	B									2 : 9
		A	B								3 : 8
			A	B							4 : 7
				A	B						5 : 6
				B	A						6 : 5
					B	A					5 : 6
						B	A				4 : 7
							B	A			3 : 8
								B	A		2 : 9
									B	A	1 : 10

Versuchen Sie, die Lösung sauber aufzuschreiben: Wie organisieren Sie Ihre Notation und Ihre Argumente möglichst klar und nachvollziehbar?

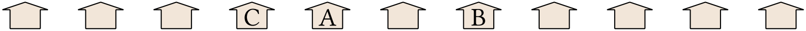
Un/Klug positionieren: Kiosk am Strand

Antwort (3) ist länger, wir müssen systematisch und sorgfältig vorgehen. Dies ist ein einfach-schönes Beispiel der kombinatorischen Spieltheorie: Wir durchsuchen hier einen endlichen Entscheidungsbaum, zählen alle Möglichkeiten auf und sortieren sie nach den Kriterien der Rationalität.

⚠ Jeder Spieler muss bei seiner Analyse Annahmen machen über die Rationalität seiner Gegenspieler. Ich nenne dazu ein einfaches Beispiel:

Wäre B gierig und dumm, dann wäre Platz 4 für A ein guter Zug: Spieler B wird kurzsichtig Platz 5 wählen, und Spieler C folgt auf Platz 6.

Sind B und C rational, dann wäre Platz 4 für A ein schlechter Zug: Spieler B wird schlau Platz 6 wählen, und Spieler C folgt auf Platz 3.



Um unsere Analyse zu vereinfachen, nehmen wir hier vollständige Rationalität an, wie oben erklärt. Damit wird das Kioskproblem stark vereinfacht und lösbar durch eine kombinatorische Optimierung.

Aufgabe: Diskutieren und lösen Sie das Problem für drei Kiosklizenzen. Versuchen Sie, Ihre Lösung sauber aufzuschreiben: Wie organisieren Sie Ihre Notation und Argumente möglichst klar und nachvollziehbar?

Wenn Sie Freude daran haben, diskutieren Sie Erweiterungen:
Was passiert, wenn Kiosk A und C demselben Spieler gehören?
Was passiert, wenn Kiosk B und C demselben Spieler gehören?
Was passiert, wenn Kiosk A und B demselben Spieler gehören?

Aufgabe: Wenn Sie programmieren, dann können Sie die einfachen, aber lästig-länglichen Aufzählungen einem Computer übertragen.

Tipp: Programmieren Sie so am besten gleich das allgemeinere Problem für einen Strand der Länge ℓ und k Kiosklizenzen, wobei $1 \le k \le \ell$ gelte, oder allgemein einen Graphen mit Kantenlängen und Eckengewichten.

Herausforderung: Erweitern Sie dies zu Koalitionen, wobei sich die Kioske in feste Gruppen einteilen, so wie die Filialen einer Kette. Denkbar sind zwei Spieler, die abwechselnd ihre Kioske setzen. Kniffliger: Ein Losverfahren entscheidet, wer als nächster setzt.

Ein Modell, viele Anwendungen

Es geht in der Spieltheorie einerseits um konkrete Spiele und Strategien, um explizite Probleme und präzise Lösungen, um rationales Handeln, empirisch notgedrungen ebenso um begrenzt rationales Verhalten. Auf präzise Fragen erhoffen wir uns ebenso präzise Antworten.

Andererseits geht es auch um gemeinsame Muster und Mechanismen. Wenn Alice und Bob einen Kuchen oder ein Erbe teilen, dann beschreibt das im Prinzip auch allgemeine Teilungs- und Verhandlungsprobleme. Die Details sind verschieden, aber die Mechanismen sind ähnlich.

Die hier untersuchten Spiele sind stark vereinfacht, manchmal lächerlich, oft genug übertrieben simpel, doch sie treffen häufig einen wahren Kern. Solch konkrete Beispiele benennen und repräsentieren typische Muster. Ihre Einfachheit zeigt den Problemkern besonders klar und deutlich.

In konkreten Anwendungen müssen wir genaue Daten berücksichtigen, es gibt viel mehr Wenn-und-Aber, und all das ist auch gut und richtig so. Dennoch: Nach Sichtung und Abwägung aller Details, stellt sich in erster Näherung häufig genug ein einfaches Muster als wesentlich heraus.

Ein Modell, viele Anwendungen

Das Strandkiosk-Problem ist eine schöne kombinatorische Aufgabe. Sie steht hier stellvertretend für ähnliche Spiele, allgemein für Konflikte um eine räumliche Marktaufteilung, Konkurrenz um Marktanteile, etc. Der Kampf um den Strand kann auch noch anderes darstellen!

Denken Sie zum Beispiel an ein politisches Spektrum; die verbreitete Sprechweise von „links“ und „rechts“ ist eine hilfreiche Vereinfachung. Wir gehen davon aus, dass Wähler über das Spektrum verteilt sind und immer genau die Partei wählen, die ihrer Position am nächsten liegt.

Wenn es nur eine Partei A gibt, wie positioniert sie sich im Spektrum? Nun, das ist eigentlich egal, da sie ohnehin alle Wählerstimmen erhält. Genau dies ist in Ein-Parteien-Staaten tatsächlich zu beobachten.

Wenn es aber zwei Parteien A und B gibt, wie positioniert sich die erste? Genau dieses Problem haben wir oben gelöst! Tatsächlich beobachten wir in der politischen Debatte den Kampf um die „Mitte der Gesellschaft“. Gibt es weitere Parteien C,D,..., so entflammen zudem Flügelkämpfe. Jetzt wissen Sie genauer, warum das strategisch unvermeidlich ist.

Ein Modell, viele Anwendungen

Moment mal, können wir das banale Strandkiosk-Problem ernsthaft vergleichen mit hochkomplizierten parteipolitischen Strategien? Genau genommen natürlich nicht, aber grob gesagt schon.

Das ist die Stärke und zugleich die Begrenzung abstrakter Modelle: Sie treffen einen Kern des Problems, sie sind einfach und übersichtlich und leicht zu verstehen, sie taugen wunderbar als erste Näherung. Sie dienen als Ausgangspunkt und Orientierung für Anwendungen.

Für eine genauere Analyse im konkreten Einzelfall dürfen wir natürlich nicht stur bei dieser Grundidee verharren, sondern müssen wesentlich weiter gehen und genauer hinschauen. Im obigen Parteienbeispiel:

- Die politische Landschaft ist heute nicht (mehr) eindimensional.
- Das Wählerverhalten ist nicht (mehr) ganz so einfach vorhersehbar.
- Der Kampf um den linken / rechten Rand ist ein heikler Balanceakt.

Daher müssen wir unser Modell weiter verfeinern und kalibrieren durch genauere Daten. Auch begrenzt rationales Verhalten ist zu erwarten, dies untersucht die empirische Spieltheorie und Verhaltensökonomik.

Ein Modell, viele Anwendungen

Ökonomische Modelle können uns gute grundlegende Einsichten über komplizierte Situationen vermitteln, Geschichten erzählen, dafür sind sie großartig. Aber wie benutzt man Modelle richtig?
(John Kay im Interview, Die Zeit 25. Juli 2019)

Wir werden dieses bemerkenswerte Phänomen noch oft beobachten: Selbst einfache Spiele können den wahren Kern eines Konflikts treffen. Physiker sprechen hier traditionell nüchtern von der **ersten Näherung**, die bei Bedarf durch die zweite, dritte, … Näherung verfeinert wird.

Das **Modell**, das wir von der **Realität** entwerfen, hilft und leitet uns, doch niemals sollten wir naiv das Modell für die Wirklichkeit halten. Von dieser ersten Näherung ausgehend können wir unser Modell je nach Bedarf verfeinern und konkreten Gegebenheiten anpassen.

Die Wirklichkeit ist komplizierter als sie auf den ersten Blick scheint. Dies erfordert intellektuelle Redlichkeit und mathematische Sorgfalt. Das spieltheoretische Modell dient als Grundlage. Selbst wo es versagt, ist es der Maßstab für die Abweichung von Prognose und Beobachtung.

Stufen der Rationalität

Definition 1A: Stufen der Rationalität

Unter **(unbeschränkter) Rationalität** verstehen wir folgende Axiome:

$\mathscr{R}_0$: Jeder Spieler will sein Ergebnis (Nutzen, Gewinn, …) maximieren.

$\mathscr{R}_1$: Jeder Spieler versteht zudem alle Spielregeln und Konsequenzen.

$\mathscr{R}_2$: Es gilt die vorige Aussage $\mathscr{R}_1$, und jeder Spieler weiß dies.

$\mathscr{R}_3$: Es gilt die vorige Aussage $\mathscr{R}_2$, und jeder Spieler weiß dies.

etc… Genauer definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ die Aussage

$\mathscr{R}_n$: Es gilt die Aussage $\mathscr{R}_{n-1}$, und jeder Spieler weiß dies.

$\mathscr{R}_\infty$: Es gilt die Aussage $\mathscr{R}_n$ für jede Stufe $n \in \mathbb{N}$.

Axiome $\mathscr{R}_0$ und $\mathscr{R}_1$ sind extrem wichtige Annahmen für die Spieltheorie: Erst damit können wir das Spielerverhalten mathematisch analysieren. Je nach Spiel nutzen wir auch die Verschärfungen $\mathscr{R}_2, \mathscr{R}_3, \mathscr{R}_4, \dots$ usw.

In Spielanalysen bzw. Beweisen ist es zur Klärung nützlich anzugeben, welche Stufe $\mathscr{R}_n$ der Rationalität wir jeweils benutzen und voraussetzen. Implizite Annahmen formulieren wir damit explizit, präzise und bequem.

Diese Axiome sind meist **Grundlage der Spieltheorie**. Wir müssen sie gründlich verstehen und an möglichst zahlreichen Beispielen erproben.

Als Warnung bzw. freundliche Enttäuschung schicke ich gleich vorweg: Diese Idealisierungen gelten in vielen realen Situationen leider nicht! Diese Eigenschaften sind zwar wünschenswert, doch oft nicht erfüllt. Alles hängt von den Akteuren ab: Menschen, Unternehmen, Staaten, KI.

Axiom $\mathscr{R}_0$ bedeutet: Die im Spiel formulierte Nutzenfunktion erfasst das Wesentliche. Wir verkneifen uns danach metaphysische Spekulationen über Moral, Ethik, Gerechtigkeit, Egoismus vs Altruismus, Erziehung, Tradition, Religion, Sünde, Fegefeuer, jüngstes Gericht, Karma, etc…

Damit will ich nicht behaupten, dass diese Fragen unwichtig wären, sie liegen nur außerhalb der Reichweite unseres mathematischen Modells. Sie sind nicht Teil des Spiels; wenn doch, dann in der Nutzenfunktion:

Wenn wir diese Begriffe in der Spieltheorie betrachten wollen, und das sollten wir, dann dürfen wir sie nicht implizit und vage dazufabulieren, sondern müssen sie explizit und präzise im Spiel codieren.

Axiom $\mathscr{R}_1$ bedeutet: Jeder Spieler kennt und versteht die Regeln des Spiels, er kennt alle Handlungsoptionen und deren Konsequenzen.

Das ist eine zentrale, aber manchmal allzu starke Annahme: Für das Spiel Schach kenne ich zwar alle Regeln, aber nicht alle Konsequenzen; mir fehlt die Rechenkapazität, ausreichend viele Züge vorauszudenken.

Das gilt selbst für sehr einfache Spiele, wie unsere folgenden Beispiele. Sie erfahren damit ganz konkret, dass Sie zwar die Regeln verstehen, aber nicht sofort alle Konsequenzen erkennen. Wir sehen das daran, dass Sie als Spieler nicht sofort die beste Strategie wählen, sondern noch Fehler machen. Sie beherrschen das Spiel erst nach etwas Übung!

Gerade hierzu ist es wichtig, diesen Vortrag mit konkreten Beispielen aufzubauen, die Sie dann auch ernsthaft bearbeiten und lösen sollen. Andernfalls hören Sie schöne Theorie und glauben, damit sei alles klar.

Die Wirklichkeit ist viel komplizierter… und auch viel interessanter! Neben der Spieltheorie lohnt sich immer auch das soziale Experiment. Die tatsächlich beobachtete Rationalität ist allzu oft doch beschränkt.

Axiome $\mathscr{R}_2$, $\mathscr{R}_3$ usw. codieren die **gegenseitigen Einschätzungen**.
„Als Spieler verhalte ich mich rational. Dazu muss ich das Verhalten der anderen Spieler vorhersehen, antizipieren, besser gesagt: berechnen. Am besten gelingt mir dies, wenn ich weiß, dass auch alle anderen Spieler sich rational verhalten. Davon will / muss / kann ich ausgehen.“

Wir nennen dies **gemeinsames Wissen**, engl. *common knowledge*.
Es genügt nicht, dass etwas wahr ist, es muss auch jeder wissen.
Und man muss sich darauf verlassen können, dass es jeder weiß.
Und auch darauf, dass jeder weiß, dass jeder es weiß. Usw.

Das ist ein allgemeines und wichtiges Konzept: Das Wissen eines Spielers besteht neben seiner reinen Sachkenntnis auch aus seinem Metawissen über das Wissen der anderen Spieler. „Ich weiß, dass du weißt, dass ich weiß, …“. Das klingt vertrackt und ist es meist auch.

In strategischen Situationen sind Wissen und Nichtwissen entscheidend. Für die Analyse von Spielen (und überall sonst) ist daher die Verteilung von Wissen und der Zugang zu Information von zentraler Bedeutung.

In this ocean of madness, an island of reason

Rationalität dient uns als Leuchtturm im Ozean der Unsicherheit.
Sie markiert ein behütetes Eiland sicheren, gefestigten Wissens.
Sie dient uns zur Navigation, selbst in unkartierten Gewässern.
Selbst fern der Rationalität hilft sie uns zur Orientierung.

Ist Rationalität ein geeignetes Fundament?

Manche Zuhörer wehren sich vehement dagegen, den Menschen auf den **Homo oeconomicus** zu reduzieren. Manche sträuben sich auch dagegen, dass ich dafür das hehre Wort „Rationalität“ missbrauche.

Als Mathematiker möchte ich die Gemüter beruhigen und die Wut mäßigen: Zunächst ist die Definition eine ehrliche Klarstellung!

Es ist sehr wichtig, keine unbewiesenen Annahmen zu treffen,
aber noch wichtiger ist es, keine Worte zu benutzen,
hinter denen sich kein klarer Sinn verbirgt.
(William Kingdon Clifford, 1845–1879)

Die obige Definition präzisiert explizit die zu diskutierenden Axiome: Dies sind unsere Annahmen, Voraussetzungen, Arbeitshypothesen. Es sind keineswegs pauschale Behauptungen über die Wirklichkeit.

Wir werden damit einfache Modelle untersuchen und daran viel lernen. Aussagen über das Modell, unsere Annahmen und ihre Folgerungen, lassen sich manchmal in der Wirklichkeit wiederfinden, andermal nicht.

Müssen wir alles so genau nehmen? Ja, sicher!

Auf den ersten Blick scheint es vielen von Ihnen vermutlich übertrieben, dass ich in guter mathematischer Tradition mit einer Definition beginne und den Begriff der „Rationalität“ definiere, zumindest etwas präzisiere. Dies dient als hilfreiche Abkürzung und bequeme Zusammenfassung.

Ist das nicht ohnehin alles klar? Sind Definitionen nicht übertrieben? Ich denke, nein! Gerade der Begriff „Rationalität“ kann sehr verschieden aufgefasst werden, daher möchte ich hier klar und deutlich aussprechen, was ich darunter verstehen will, und wie Sie mich bitte verstehen sollen.

Natürlich können Sie zur Rationalität eine andere Auffassung vertreten, doch wir müssen jeweils eindeutig darlegen, was wir darunter verstehen. Das ist eine Frage guter Kommunikation. Andernfalls provozieren wir unnötige Missverständnisse, und unsere Diskussion dreht sich im Kreis.

Die mathematische Vorgehensweise der Spieltheorie ist daher gar nicht überraschend, sondern entspricht dem Vorbild anderer Wissenschaften: Wir wollen ganz konkrete Probleme lösen und Anwendungen verstehen, dazu müssen wir Begriffe klären und tragfähige Argumente entwickeln.

Zur Illustration gebe ich einfache, konkrete **Anwendungsbeispiele**. Sie sind zwar extrem vereinfacht und etwas fiktiv, aber doch lehrreich: Sie zeigen ganz handfeste Konsequenzen von Ir/Rationalität, und dass wir uns mit dieser Problematik genauer auseinandersetzen müssen.

Das ist die Stärke und zugleich die Begrenzung **abstrakter Modelle**: Sie treffen einen Kern des Problems, sie sind einfach und übersichtlich und leicht zu verstehen, sie taugen wunderbar als erste Näherung. Sie dienen als Ausgangspunkt und Orientierung für Anwendungen.

Wir werden dieses bemerkenswerte Phänomen noch oft beobachten: Selbst einfache Spiele können den wahren Kern eines Konflikts treffen. Physiker sprechen hier traditionell nüchtern von der **ersten Näherung**, die bei Bedarf durch die zweite, dritte, … Näherung verfeinert wird.

Das **Modell**, das wir von der **Realität** entwerfen, hilft und leitet uns, doch niemals sollten wir naiv das Modell für die Wirklichkeit halten. Von dieser ersten Näherung ausgehend können wir unser Modell je nach Bedarf verfeinern und konkreten Gegebenheiten anpassen.

Beispiel: ein Erbe teilen

Aufgabe: Alice und Bob erben 1 000 000€. Das Testament verlangt: Alice nennt dem Notar eine Teilung, x für Bob und $1\,000\,000 - x$ für Alice. Zur Vereinfachung nehmen wir im Folgenden $x \in \{1, 2, \dots, 999\,999\}$ an. Dies kann Bob nun annehmen… oder ablehnen, dann verfällt das Erbe. Was wird passieren? rational? irrational? Ist das Ergebnis gerecht?

Lösung: $\mathscr{R}_0$: Jeder will seine Auszahlung maximieren. Diese Annahme ist grundlegend für unsere Analyse!

$\mathscr{R}_1$: Bob wird jeden Vorschlag $x > 0$ annehmen. Das ist vielleicht wenig, aber besser als nichts.

$\mathscr{R}_2$: Alice weiß dies und schlägt $x = 1€$ vor.

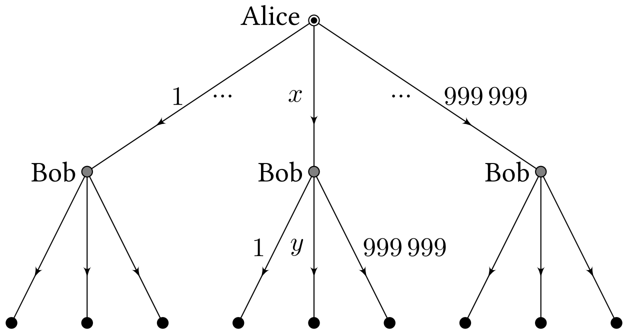
🙂 Dieses einfache Beispiel illustriert die Stufen der Rationalität. Alle Voraussetzungen sind tatsächlich nötig für unsere Analyse!

🙂 Wir werden später dynamische Spiele erklären und diese Lösung als (das einzige) teilspielperfekte Gleichgewicht wiedererkennen.

Übung: Sobald Sie die Techniken kennen, führen Sie dies aus!

Beispiel: ein Erbe teilen

Wir formalisieren folgende Variante: Alice fordert $x \in \{1, 2, \dots, 999\,999\}$. Anschließend fordert Bob $y \in \{1, 2, \dots, 999\,999\}$. Gilt $x + y \leq 1\,000\,000$, so tritt die Aufteilung (x, y) in Kraft, andernfalls verfällt das Erbe.



Hier ist die zeitliche Reihenfolge entscheidend: Alice macht ihr Angebot und kann nicht mehr zurück, Bob ist daher unter Zugzwang. Muss Bob zuerst fordern, so ist es umgekehrt. Als Variante ist auch gleichzeitige verdeckte Abgabe von Alice' Angebot und Bobs Forderung denkbar.

Beispiel: ein Erbe teilen

⚠ Ohne Rationalität ist eine Analyse / Prognose nahezu unmöglich:
$\mathscr{R}_0$: Wenn Alice oder Bob gar kein Geld haben will, oder andere Ziele verfolgt, dann können wir kaum vernünftige Vorhersagen machen.

$\mathscr{R}_1$: Wir gehen hier davon aus, dass Bob streng rational ist. „Wer den Euro nicht ehrt, ist das Erbe nicht wert." Ist das zwingend? Vielleicht hat Bob ein extremes Gerechtigkeitsempfinden und wird nur den Vorschlag $x = 500\,000$€ akzeptieren, nicht weniger, aber auch nicht mehr. Das ist irrational, aber möglich. Vielleicht hat Bob $850\,000$€ Schulden und wird von Mafiakillern verfolgt, dann würde er nur $x \ge 850\,000$€ akzeptieren.

$\mathscr{R}_2$: Wenn Alice an Bobs Rationalität zweifelt, dann sollte sie ihre Strategie anpassen. Zum Beispiel könnte Bob drohen: „Alles unter $300\,000$€ werde ich ablehnen." Aber ist diese Drohung glaubwürdig? Wird er das wirklich tun, wenn er vor der endgültigen Entscheidung steht? Wenn er rational ist, sicher nicht! Andernfalls vielleicht doch…

Alice muss also die Rationalität von Bob einschätzen. Das ist schwierig. Der Idealfall ist perfekte Rationalität, aber das ist nicht immer realistisch.

Beispiel: ein Erbe teilen

Ist das Ergebnis „fair“ oder „gerecht“? Nun ja, das kommt darauf an… Dies sind zunächst keine klar festgelegten Begriffe. Dazu müssten wir die Ziele „Fairness“ oder „Gerechtigkeit“ erst genauer definieren und dann anhand objektiver und nachvollziehbarer Kriterien prüfen.

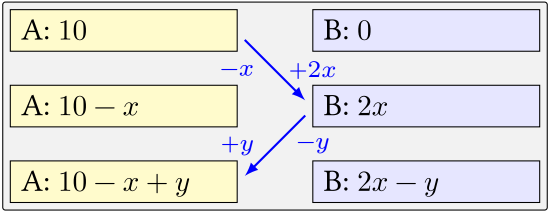
- Wenn das erklärte Ziel ist, das Erbe möglichst hälftig aufzuteilen, dann wird es durch das Testament denkbar schlecht implementiert.
- Wenn das Ziel nur ist, das Testament wortgetreu auszuführen, dann erfüllt das beschriebene rationale Verhalten genau dies.

Genauso gut hätte der Erblasser die Aufteilung 999 999€ für Alice und 1€ für Bob im Testament festlegen können. Ist diese Festlegung un/fair? Das Testament ist ungewöhnlich, aber nicht zwangsläufig un/gerecht; dazu müssten wir viel mehr Vorgeschichte und Kontext kennen.

Ist das Erbe ausgleichende Un/Gerechtigkeit für früheres Verhalten? Und was ist mit Chuck, der nicht erwähnt wurde und nichts bekommt? Vielleicht wäre es besser, das Erbe verfällt an wohltätige Zwecke… Vielleicht will der Erblasser Alice und Bob eine Lehre erteilen?

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

Zwei Spieler A und B interagieren anonym über eine Datenleitung.
Sie (er)kennen sich nicht und begegnen sich vermutlich nie wieder.



Zu Beginn erhält Spieler A ein Guthaben von 10€, Spieler B nur 0€.

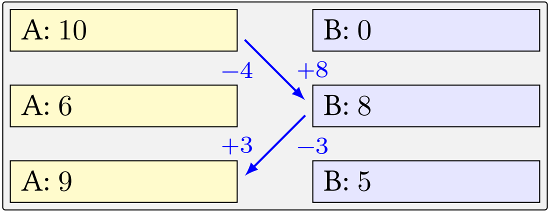
Erster Zug: A schickt an B einen frei gewählten Betrag $x \in \{0, 1, \dots, 10\}$. Dieser Betrag x wird bei A abgebucht und bei B doppelt gutgeschrieben.

Zweiter Zug: B schickt an A davon einen Betrag $y \in \{0, 1, \dots, 2x\}$. Dieser Betrag y wird bei B abgebucht und bei A gutgeschrieben.

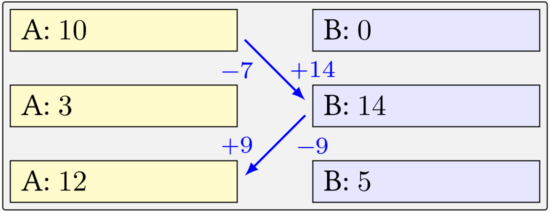
Damit endet das Spiel und jedem wird sein Kontostand ausbezahlt.
Es gelten nur diese einfachen Regeln, und sonst keine weiteren.

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

Beispiel 1: A schickt 4€, B schickt 3€ zurück. ☹ A macht Verlust.



Beispiel 2: A schickt 7€, B schickt 9€ zurück. ☺ Beide profitieren.



Beachte: Der zweite Zug ist ein Nullsummenspiel, der erste Zug nicht!

Das ist ein einfaches, aber typisches Modell wirtschaftlichen Handelns. Wir können die Interaktion als **Kredit und Rückzahlung** interpretieren: Spieler A verleiht einen Teil seines Geldes, Spieler B erwirtschaftet damit eine Verdopplung und zahlt zurück: Tilgung plus Zinsen? Allerdings gibt es keinen Vertrag und auch keine Strafen!

Ebenso können wir es als **Online-Handel** interpretieren: Spieler A geht in Vorleistung und verschickt die Ware, für Spieler B ist diese doppelt so nützlich / wertvoll, schließlich bezahlt B nach seinem eigenen Ermessen. **Pay what you want** wird genutzt bei Spenden, Trinkgeld, Straßenkunst, manchen Restaurants, Veranstaltung / Theater, Hofverkauf / Blumenfeld.

Zugegeben, dieses Modell ist noch allzu simpel und eher unrealistisch, insbesondere fehlen hier alle üblichen sozialen Kontrollmechanismen. Der Vorteil ist jedoch: Alle Regeln sind besonders klar und einfach. Wir können dieses Spiel vollständig analysieren und verstehen.

Das ist ein stark vereinfachtes Modell, sozusagen ein Laborexperiment. Wir blenden alles andere aus und untersuchen es unter dem Mikroskop.

In der Literatur heißt dies **Vertrauensspiel**, engl. *trust game*. Es wirkt zunächst etwas ungewöhnlich, begegnet uns aber im Alltag recht häufig, hier zum Beispiel in Stuttgart-Sonnenberg auf meinem Weg zur Uni:

Zweites Experiment: „Allmende“

Sie bekommen ein Startbudget von 10€. Davon können Sie zwischen 0€ und 10€ in einen gemeinsamen Topf spenden. Dabei wird jede Spende verdreifacht. Der gemeinsame Topf wird gleichmäßig aufgeteilt.

Einfache Beispiele zum interaktiven Ausprobieren:

(1) Angenommen, jeder spendet 0€. Dann hat am Ende jeder 10€.

(2) Angenommen, jeder spendet 10€. Dann hat am Ende jeder 30€.

(3) Angenommen, eine Hälfte spendet 0€, die andere 10€.
Dann bekommt jeder 15€ aus dem gemeinsamen Topf; am Ende
hat die eine Hälfte $10 + 15 = 25$€, die andere Hälfte $0 + 15 = 15$€.

Auch dieses Spiel haben wir für Sie als Online-Spiel implementiert.
Wir spielen es im ersten Durchgang statisch, also jede:r für sich,
im zweiten Durchgang dann dynamisch mit sofortiger Rückmeldung.

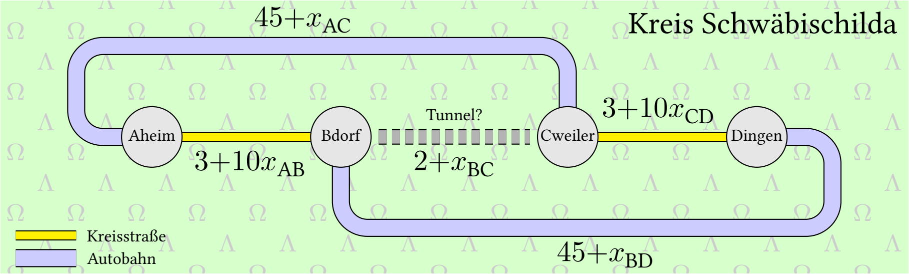
Aufgabe: (0) Ein Ensemble von 20 Personen besucht ein Restaurant. Jede darf wählen: ein gutes Menu für 30€ oder ein exzellentes für 50€. Jede zahlt ihre eigene Rechnung und denkt: „10€ mehr wäre es mir wert, aber nicht 20€.“ Daher entscheidet sie sich für das Menu zu 30€.

(1) Das Ensemble beschließt *vor* dem Restaurant, eine gemeinsame Rechnung zu verlangen und alles durch 20 zu teilen. Was passiert?

Lösung: (1) Jede einzelne Person kostet ihr Upgrade nur noch 1€. Sie wählt also für sich das teurere Menu. Am Ende zahlt jede 50€.

Numbers written on restaurant checks within the confines of restaurants do not follow the same mathematical laws as numbers written on any other pieces of paper in any other parts of the Universe.
Douglas Adams (1952–2001), *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy*

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess



Täglich pendeln 6000 Autofahrer von Aheim nach Dingen, entweder über Bdorf (ABD) oder über Cweiler (ACD). Angegeben sind die Fahrzeiten in Minuten, wobei $x_{ij} \in [0, 6]$ jeweils die Autozahl in Tausend ist. **Aufgabe:**

(0) Erklären Sie dies explizit als strategisches Spiel mit 6000 Spielern.

(1) Finden Sie alle Gleichgewichte: Welcher Verkehrsfluss stellt sich ein?
Lösung: Aufteilung 3000 : 3000, Fahrzeit jeweils 81 Minuten.

(2) Zur Verkürzung der Fahrzeit plant der Landkreis einen Autobahntunnel von Bdorf nach Cweiler. Hilft das oder nicht? Rechnen Sie es aus!
Lösung: Aufteilung 2000 : 2000 : 2000, Fahrzeit jeweils 90 Minuten!

Oft hört man pauschal: „Mehr Straßen garantieren schneller ankommen.“ Das kann helfen, aber keineswegs immer: „Zusätzliche Straßen können Staus verstärken.“ Auch das hört man so pauschal. Schauen wir hin!

Unser Beispiel ist zugegeben konstruiert, dafür ist es besonders einfach. Es soll zunächst illustrieren, dass das Phänomen wirklich möglich ist. Echte Problemfälle muss man wesentlich genauer untersuchen.

Die Zahlen sind so angelegt, dass wir die Lösungen leicht überblicken: In beiden Fällen teilen sich die Verkehrsströme jeweils in gleiche Teile.

Unglaublich: Der Tunnel erhöht die Fahrzeit von 81 auf 90 Minuten! Ohne Absprache gibt es kein Zurück: Nur wenn sich genügend Fahrer für die beiden alten Strecken ABD und ACD entschließen, verringert sich der Stau auf den Landstraßen, und alle sind insgesamt schneller.

Könnten die Pendler nicht ihren alten Strecken folgen und den Tunnel ignorieren? Sicher, doch jeden lockt die Abkürzung mit 68 Minuten. Das Verrückte ist: Jeder einzelne handelt rational! So stellt sich ein neues Gleichgewicht ein, das paradoxerweise für alle schlechter ist.

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess

Lösung: (0) Spielermenge sei $I = \{1, 2, \dots, 6000\}$. Die Strategiemenge für Fahrer $i \in I$ ist $S_i = \{\mathrm{ABD}, \mathrm{ACD}\}$ bzw. mit Tunnel $S_i' = S_i \cup \{\mathrm{ABCD}\}$. Die Verkehrszählung (in Tsd) ergibt $x_{\mathrm{AC}}, x_{\mathrm{BD}}, x_{\mathrm{BC}}, x_{\mathrm{AB}}, x_{\mathrm{CD}} : S \to \mathbb{R}$ mit

$$
\begin{aligned}
x_{\mathrm{AC}}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i = \mathrm{ACD} \,\} &&= x_1 \\
x_{\mathrm{BD}}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i = \mathrm{ABD} \,\} &&= x_2 \\
x_{\mathrm{BC}}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i = \mathrm{ABCD} \,\} &&= x_3 \\
x_{\mathrm{AB}}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i \in \{\mathrm{ABD}, \mathrm{ABCD}\} \,\} &&= x_2 + x_3 \\
x_{\mathrm{CD}}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i \in \{\mathrm{ACD}, \mathrm{ABCD}\} \,\} &&= x_1 + x_3
\end{aligned}
$$

Hieraus berechnen wie die Fahrzeiten, und diese sind zu minimieren:

$$
-u_i : S \to \mathbb{R} : s \mapsto \begin{cases}
48 + x_{\mathrm{AC}}(s) + 10 x_{\mathrm{CD}}(s) & \text{für } s_i = \mathrm{ACD}, \\
48 + 10 x_{\mathrm{AB}}(s) + x_{\mathrm{BD}}(s) & \text{für } s_i = \mathrm{ABD}, \\
8 + 10 x_{\mathrm{AB}}(s) + x_{\mathrm{BC}}(s) + 10 x_{\mathrm{CD}}(s) & \text{für } s_i = \mathrm{ABCD}.
\end{cases}
$$

☹ Die Strategiemenge $S = S_1 \times \dots \times S_{6000}$ ist astronomisch groß!

☺ Das Spiel u ist spieler-symmetrisch: $\mathrm{Sym}(u) = \mathrm{Sym}(I)$. Statt des Strategievektors $s \in S$ genügen uns die Häufigkeiten der Strategien!

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess

(1) Angenommen, x_1 Tsd wählen ACD, x_2 Tsd wählen ABD.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 = 6, \quad x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \\ z_1(x_1, x_2) = [45 + x_1] + [3 + 10x_1] \\ z_2(x_1, x_2) = [3 + 10x_2] + [45 + x_2] \end{aligned}$$

Gleichgewicht herrscht für $z_1 = z_2$, also $x_1 = x_2 = 3$ (LGS, Symmetrie). In der Ausgangssituation ist die Fahrzeit somit $z_1 = z_2 = 81$ Minuten.

(2) Angenommen, x_3 Tsd fahren ABCD durch den neu eröffneten Tunnel.

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 = 6, \quad x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0 \\ &z_1(x_1, x_2, x_3) = [45 + x_1] + [3 + 10(x_1 + x_3)] \\ &z_2(x_1, x_2, x_3) = [3 + 10(x_2 + x_3)] + [45 + x_2] \\ &z_3(x_1, x_2, x_3) = [3 + 10(x_2 + x_3)] + [2 + x_3] + [3 + 10(x_1 + x_3)] \end{aligned}$$

Gleichgewicht herrscht für $z_1 = z_2 = z_3$, also $x_1 = x_2 = x_3 = 2$ (LGS). Mit Tunnel erhöht sich die Fahrzeit auf $z_1 = z_2 = z_3 = 90$ Minuten!

🙂 Spieler-Symmetrie hilft! Die Nash–Gleichgewichte sind strikt! Zur Vereinfachung betrachten wir x_i als kontinuierlich (*non-atomic*).

Das erstaunliche Ergebnis wird als **Braess–Paradox** bezeichnet: Eine zusätzliche Handlungsoption kann die Situation für alle verschlechtern. Es wurde 1968 von dem Mathematiker Dietrich Braess veröffentlicht: *Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung*, Unternehmensforschung Operations Research 12 (1968), 258–268, online verfügbar unter `homepage.ruhr-uni-bochum.de/Dietrich.Braess/paradox.pdf`.

Die Rechnung illustriert wunderbar die Idee des Nash–Gleichgewichts! Die Definition ist einfach, aber die Interpretation bedarf einiger Übung und zahlreicher Beispiele, darunter auch solch verblüffende Paradoxien. Die genaue Analyse löst dieses Scheinparadox allerdings schnell auf. Bei genauerem Hinsehen ähnelt auch dies dem Gefangenendilemma.

Ist es nur eine psychologische Falle? Eine Charakterschwäche im Sinne von Gier schlägt Geist? Nicht nur, jeder einzelne handelt, wie gesagt, vollkommen rational. Dabei optimieren alle Teilnehmer rein individuell. Die vertrackte Situation provoziert dieses Verhalten, es ist das Resultat individueller Optimierung ohne bindende Absprache oder Koordinierung.

Es gibt **physikalische Entsprechungen** mit Federn in der Mechanik oder elektrischen Strömen in einer Schaltung, siehe Cohen, Horowitz: *Paradoxical behaviour of mechanical and electrical networks*, Nature 352 (1991), 699–701, online `www.nature.com/articles/352699a0`.

Das Phänomen ist also kein psychologischer Taschenspielertrick. Kommt das Paradox auch in realen Verkehrssituationen vor? Ja!

Die Süddeutsche Zeitung schreibt in ihrer Ausgabe vom 19. Mai 2010: „So waren die Verkehrsplaner in Stuttgart 1969 überrascht, als nach großen Investitionen ins Straßennetz rund um den Schlossplatz der Verkehrsfluss ins Stocken kam. Die Situation besserte sich erst, nachdem ein Teil der Königsstraße zur Fußgängerzone erklärt wurde.“

Weitere solche Beispiele werden aus New York und Seoul berichtet; das Problem sei unter Experten inzwischen hinlänglich bekannt, so heißt es. Straßenplaner nutzen geeignete Messdaten und Simulationssoftware zur Optimierung, insbesondere zur frühzeitigen Erkennung und Vermeidung paradoxer Verkehrsflüsse. Denken hilft! Mathematik wirkt!

Aufgabe: Entwickeln Sie ein Verkehrsleitsystem, das jedem Fahrer am Ortsausgang von Aheim und Bdorf zufällig eine Route zuweist, sodass die erwartete Fahrzeit für alle gleich ist. Welches Minimum können Sie so erreichen? Hierzu braucht es eine unabhängige Instanz! Muss dieses System Strafen androhen? Erreicht es ein korreliertes Gleichgewicht?

Mehr Straßen erhöhen automatisch den Verkehrsfluss? Nicht immer! Die Planung vor dem Straßenbau ist wichtig, wie oben gesehen, und manchmal erfordert optimaler Betrieb eine aktive zentrale Steuerung

Ähnlich drastisches Beispiel: In manchen Städten ignorieren Fahrer die Ampeln, um sich „eben noch schnell“ über die Kreuzung zu schummeln. In der Rushhour führt dies zum katastrophalen Gegenteil: Stau!

Das kann übrigens auch für Geschwindigkeitsbeschränkungen gelten: Individuelle Disziplin kann allseitigen Nutzen erzeugen. So weit, so klar. Das ist allerdings unpopulär und schwer zu vermitteln: Preis der Freiheit.

Freie Fahrt für freie Bürger! forderte der ADAC 1974 zu Zeiten der Ölpreiskrise, und später die Leipziger Montagsdemonstration 1989.

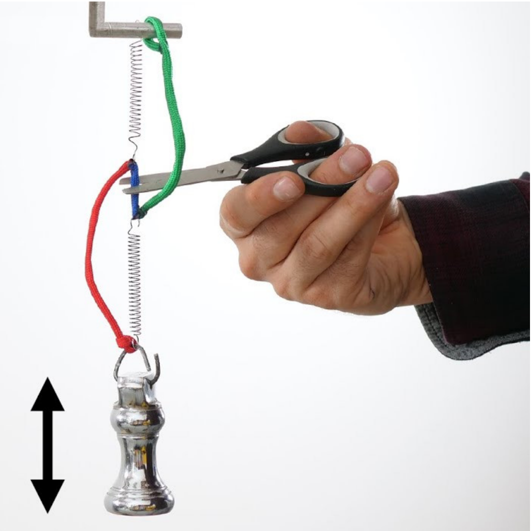
Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess

Die **Verkehrsströmungslehre** (engl. *traffic flow theory and control*) ist ein ausgedehntes Gebiet und alltäglich nahezu überall relevant.

Je nach Trägersystem (Straße, Bahn, Flugzeug, etc) nutzt sie spezielle mathematische Modelle und Methoden: Optimierung (kombinatorisch, numerisch, Simulation) und Stochastik (Warteschlangentheorie) und schließlich Spieltheorie (individuell vs zentral gesteuert).

Den Straßenverkehr kann man dabei kontinuierlich modellieren analog zur Fluiddynamik mit Differentialgleichungen, oder auch mit zellulären Automaten wie im Nagel–Schreckenberg–(NaSch–)Modell, siehe `de.wikipedia.org/wiki/Nagel-Schreckenberg-Modell`.

Seit den 1990er Jahren entwickeln sich spieltheoretische Ansätze zu Psychologie und Rationalität, ökonomischen Anreizen, usw. Die Computersimulation wird ergänzt durch Experimente mit menschlichen Teilnehmern wie in der experimentellen Ökonomik. Einen Querschnitt zeigt der Symposiumsband von Schreckenberg, Selten: *Human Behaviour and Traffic Networks*, Springer 2004. Aktuell stellen Elektromobilität und ÖPNV neue Herausforderungen.



Steve Mould: *The Spring Paradox*, `youtu.be/Cg73j3QYRJc`
Up and Atom: *Braess's Paradox*, `youtu.be/cALezV_Fwi0`

Paradoxe Systeme in der Physik

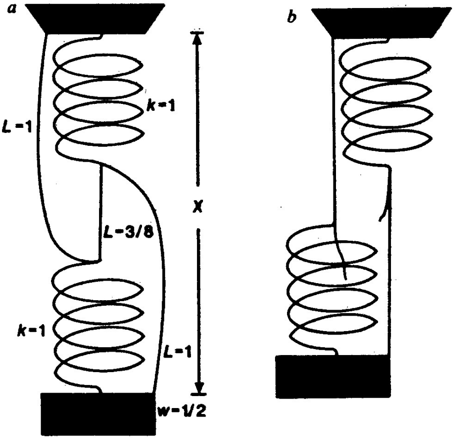


FIG. 1 Mechanical network. Springs have zero unstretched length and spring constant $k=1$. Strings are inelastic. The string that links the two springs has length $\frac{3}{8}$ m. Both safety strings have length 1 m. The weight exerts a force of $\frac{1}{2}$ N. *a*, In the initial network, both safety strings are limp, and the distance X from support to weight is $1\frac{3}{8}$ m. *b*, After the linking string is cut, the weight is higher at equilibrium; the new distance from support to weight is $1\frac{1}{4}$ m.

Nature 352 (1991), 699–701, `www.nature.com/articles/352699a0`

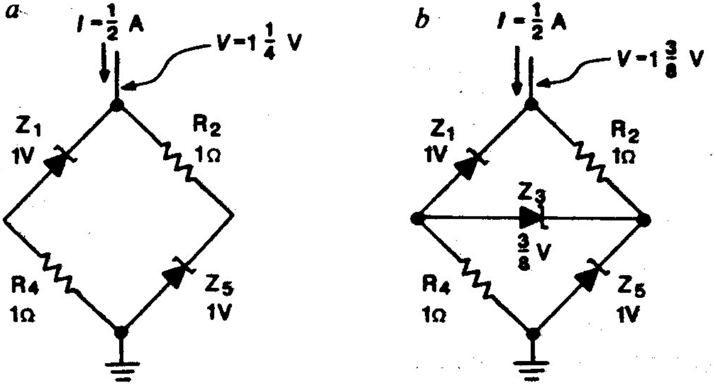


FIG. 3 Electrical network of ideal components. *a*, Initially, current flows symmetrically through left and right branches, and the voltage drop from source to ground is $1\frac{1}{4}$ V. *b*, When a $\frac{3}{8}$-V Zener diode is introduced across the network, the current through the 1-V Zener diodes drops to zero and all current flows through the 1-Ω resistors and the $\frac{3}{8}$-V Zener diode, producing a larger voltage drop from source to ground of $1\frac{3}{8}$ V.

Nature 352 (1991), 699–701, `www.nature.com/articles/352699a0`

Aufgabe: Führen Sie das oben skizzierte mechanische System aus und rechnen Sie das behauptete paradoxe Verhalten sorgfältig nach! Wenn Sie es praktisch-konkret mögen, können Sie es sogar bauen.

Projekt: Wie können Sie dies für Wasser realisieren? oder Wärme? Lässt sich dies ebenso einfach im Experiment demonstrieren?

Projekt: Er/Finden Sie (potentiell) paradoxe Systeme in Ihrem Alltag:

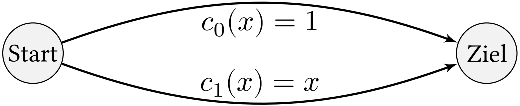
- Nutzung von Aufzügen und Treppen: Warteschlangen?
- In der Mensa: Essensausgabe? Geschirrrückgabe?
- Anmeldung zu Übungsgruppen, Seminaren, etc.

Vermutlich müssen Sie hier geeignete Annahmen / Parameter wählen. Selbst wenn die so konstruierten Beispiele etwas unrealistisch anmuten, so illustrieren sie doch immerhin die Möglichkeit paradoxen Verhaltens.

Pigous Beispiel: schockierend einfach

„[The individual is] led by an invisible hand to promote an end which was no part of his intention.“ (Adam Smith, *The Wealth of Nations*, 1976)

„Selfish behavior need not produce a socially optimal outcome.“
Extremes Beispiel von A. C. Pigou, *The Economics of Welfare*, 1920:



Zwei Routen stehen zur Verfügung: Auf der oberen ist die Fahrzeit immer 1 Stunde, auf der unteren x Stunden bei Auslastung $x \in [0, 1]$.

Aufgabe: Was ist das Gleichgewicht bei (1) individueller Optimierung vs (2) zentraler Optimierung durch ein verbindliches Verkehrsleitsystem?

Lösung: (1) Alle wählen den unteren Weg, die Fahrzeit ist 1 Stunde.
(2) Jeweils die Hälfte wird (zufällig) nach oben oder unten geleitet. Niemand ist schlechter dran als in (1). Die Hälfte der Fahrer benötigt nur noch $1/2$ Stunde. Die mittlere Fahrzeit sinkt von 1 auf $3/4$ Stunde!

Pigous Beispiel: schockierend einfach

Erfahrungsgemäß akzeptieren Autofahrer:innen nur widerwillig etwaige Eingriffe in ihre Entscheidungsfreiheit, siehe *Freie Fahrt für freie Bürger!* Dennoch kann eine zentrale Koordinierung – mit bindender Wirkung! – die Effizienz für alle steigern, in günstigen Fällen wie oben skizziert.

Solche Fragen stellen sich zum Beispiel auch in digitalen Netzwerken: Datenpakete werden von ihrem Start zum gewünschten Ziel geleitet, und auch hier entstehen Kosten und Wartezeiten. Die Koordination kann zentral organisiert werden, oder aber den Akteuren überlassen werden.

Somit erweisen sich diese paradoxen Beispiele nicht als exotisch, wie es zunächst scheinen mag, sondern eröffnen ein faszinierendes Thema. Sowohl auf unseren „Datenautobahnen“ als auch auf realen Straßen lohnt es, effiziente Mechanismen zu suchen und zu implementieren.

Zum Vergleich und als Kontrast: In der klassischen Logistik transportiert ein Unternehmen die Waren und optimiert dazu zentral alle Abläufe. Das ist bereits eine hohe (mathematische) Kunst. Durch dezentral und egoistisch handelnde Akteure entstehen völlig neue Herausforderungen!

Wie hoch ist der Preis der Anarchie?

Im obigen Braess–Beispiel wächst die Fahrzeit von 81 auf 90 Minuten, im viel einfacheren Pigou–Beispiel von $3/4$ auf 1 Stunde. Gibt es noch schlimmere Beispiele? Wie groß kann die Ineffizienz maximal werden?

Gefragt und beantwortet wurde dies von T. Roughgarden, E. Tardos: *How bad is selfish routing?* Journal of the ACM 49 (2002) 236-259. Das Ergebnis ist ebenso elegant wie überraschend:

Satz 2A: Preis der Anarchie, Roughgarden–Tardos 2002

Gegeben sei ein Straßennetz. Die Fahrzeit für jede einzelne Strecke e sei affin-linear, also von der Form $c_e(x) = a_e + b_e x_e$ bei Auslastung x_e.

Sei C die Fahrzeit bei kollektiver Optimierung und I die Fahrzeit bei individueller Optimierung. Dann gilt die Schranke $I/C \leq 4/3$.

Bestenfalls gibt es keine Diskrepanz, schlimmstensfalls führt Egoismus zu 33% Ineffizienz. Diese Schranke hängt von den Kostenfunktionen ab, siehe *Routing Games*, Kapitel 18 in *Algorithmic Game Theory*, CUP 2007; online frei zugänglich unter `www.timroughgarden.org`.

Wie hoch ist der Preis der Anarchie?

Arthur Cecil Pigou (1877–1959) war ein britischer Ökonom. In seinem berühmtesten Werk *The Economics of Welfare* (1920) entwickelt er das Konzept der Externalitäten seines Lehrers Alfred Marshall (1842–1924).

Es ist erstaunlich, dass es in Satz 2A eine universelle Schranke gibt! Sogar noch erstaunlicher ist, dass dies nahezu einhundert Jahre lang niemandem aufgefallen ist, ja dass nicht einmal die Frage gestellt wurde. Dementsprechend hat das Ergebnis ein neues Forschungsgebiet eröffnet.

Individuelles versus zentrales Routing ist ein aktuelles Forschungsthema in der Schnittmenge von Verkehrsplanung, Spieltheorie und Algorithmik. Zu diesem Themenkomplex gibt es ein unterhaltsam-informatives Interview mit Tim Roughgarden, `youtu.be/w7ddIRFfqM` (80min).

Among many recognitions, Tim has received the Gödel Prize for his research in computational game theory, a field that resides in the intersection of two disciplines: economics and computer science. We talk to Tim about one of the central insights of that work: the Prize of Anarchy, which quantifies the loss in efficiency of a system due to selfish behaviour of its agents.

Was bedeuten „Moral“ und „Ethik“?

Eine **Moral** ist (1) ein Normensystem für das rechte Handeln von (2) vernunftbegabten Wesen mit (3) Anspruch auf Allgemeingültigkeit. Hierzu ist die **Ethik** die wissenschaftliche Beschäftigung mit der Moral.

Praxis, konkret	Theorie, abstrakt
Performanz	Kompetenz
(recht) erziehen	Pädagogik
(gut) unterrichten	Didaktik
(richtig) formulieren	Grammatik
(richtig) rechnen	Mathematik
(gut) wirtschaften	Ökonomik
(moralisch) handeln	Ethik

The aim of theory really is, to a great extent, that of systematically organizing past experience in such a way that the next generation […] will be able to absorb the essential aspects in as painless a way as possible.
Michael F. Atiyah (1929–2019), *How research is carried out*

Was bedeuten „Moral“ und „Ethik“?

Es ist sinnvoll, den Gegenstand und die Untersuchung desselben zu unterscheiden, und genau dazu verhelfen uns präzise Bezeichnungen. In der Umgangssprache geraten diese Begriffspaare oft durcheinander. Hier ein paar einfache doch eindrückliche Beispiele zur Illustration:

Ein moralisches Problem haben Sie, wenn Sie sich um die Richtigkeit Ihres Handelns sorgen. Ethische Probleme hingegen beschäftigen Sie, wenn Sie z.B. versuchen, Kant oder andere Moralphilosophen zu lesen.

Sie haben ein psychisches Problem, wenn Sie unter einer Phobie leiden. Hingegen untersuchen Sie ein psychologisches Problem, wenn Sie sich fragen, wie Phobien mit Kindheitserfahrungen zusammenhängen.

Sie haben ein soziales Problem, wenn Sie sich ausgegrenzt fühlen. Hingegen studieren Sie ein soziologisches Problem, wenn Sie versuchen, Ausgrenzung gesellschaftswissenschaftlich zu erklären.

Sie haben ein rechnerisches Problem, wenn Ihre konkret vorliegende Rechnung nicht aufgeht. Hingegen haben Sie ein mathematisches Problem, wenn Sie Mathematik und ihre Anwendungen erforschen.

Wie verhalten sich Ratio und Moral?

⚠ Rationales / ökonomisches / nutzenmaximierendes Verhalten kann moralisch oder unmoralisch sein, das hängt von den (Spiel-)Regeln ab und von den (gesellschaftlich vereinbarten) moralischen Normen.

Handle nur nach derjenigen Maxime, durch die du zugleich wollen kannst, dass sie ein allgemeines Gesetz werde.
Immanuel Kant (1724-1804), *Kritik der praktischen Vernunft* (1788)

Erst kommt das Fressen, dann die Moral.
Bertolt Brecht (1898-1956), *Dreigroschenoper* (1928)

☺ Gleichsinnige, günstige Ausrichtung [*alignment*]: Ratio $=$ Moral

☹ Gegensinnige Ausrichtung [*misalignment*, Dilemma]: Ratio $\neq$ Moral

⚠ Unsere Gesellschaft braucht Nachhaltigkeit und Kooperation. Wir wollen und müssen solche Dilemmata erkennen und lösen.

Mechanismendesign: Individuelles Verhalten können wir nicht ändern, aber wir können versuchen, gute (Spiel-)Regeln zu implementieren.

Wie verhalten sich Ratio und Moral?

Wie können wir soziale Dilemmata erkennen und eventuell auflösen? Zunächst einmal müssen wir Spiele verstehen und Muster erkennen: Die Spielregeln sind vorgegeben, welches Verhalten folgt daraus? Ist dieses Verhalten gesellschaftlich günstig / erwünscht / moralisch?

Sodann wollen wir geeignete Mechanismen / Spielregeln konstruieren. Das klingt zunächst abstrakt, ist aber absolut konkret. Wir tun es täglich: Wenn wir Prüfungen organisieren, wollen wir Ehrlichkeit belohnen und Betrug bestrafen. Ja, wir müssen dies geradezu, denn alles andere wäre naiv und bald zum Scheitern verurteilt. Das gilt allgemein, nicht nur für Prüfungsordnungen, sondern für alle Gesetze, Kontrollen, Anreize, etc.

Diese Überlegungen führen uns von simplen Spielen zu komplexeren Konflikten, von einfachen Modellen zu gesellschaftlichem Verhalten. Daher betone ich hier das Grundprinzip des Mechanismendesign: Individuelles Verhalten können wir nicht direkt ändern oder vorgeben, aber wir können versuchen, gute (Spiel-)Regeln zu implementieren, die das gewünschte Verhalten ermöglichen, nicht hindern, sondern fördern.

Fazit: Was ist und was soll die Spieltheorie?

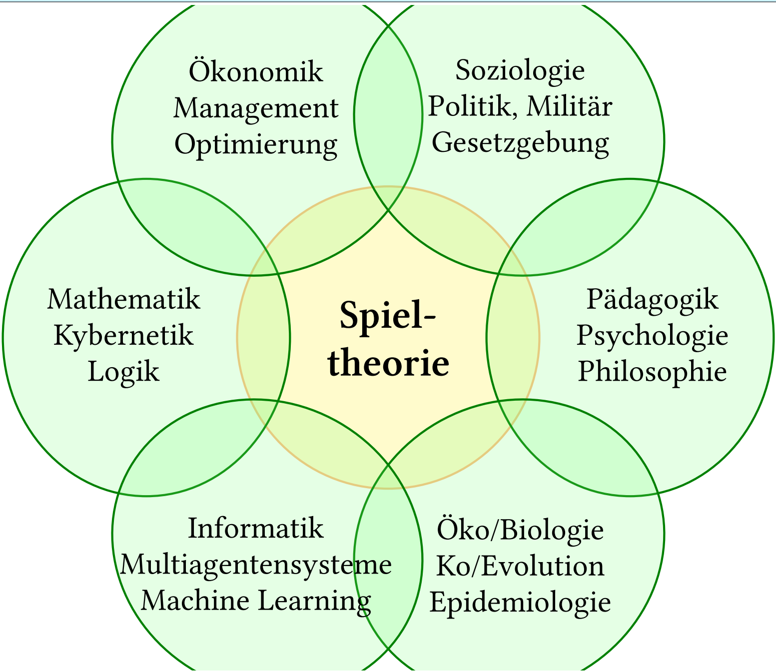
Spieltheorie versucht, strategisches / ökonomisches / menschliches Verhalten zu beschreiben, zu erklären, vorherzusagen, zu optimieren.
🙂 Sie bietet eine Sprache zur Beschreibung von Konflikten
🙂 und umfangreiche Werkzeuge zur ihrer Analyse.

Rationales Verhalten können wir berechnen, menschliches beobachten.
🙂 In günstigen Fällen können wir reales Verhalten rational erklären.
☹ Meist weichen Beobachtung & Experiment von der Theorie ab.
Unbeschränkte Rationalität ist selten, Komplexität (über)fordert.

Mechanismen: Regeln gestalten, Verhalten fördern, Ziele erreichen.
Erziehung, Hoch/Schule, Gesellschaft, Wirtschaft, Gesetzgebung, etc.

To be literate in the modern age, you need to have a general understanding of game theory.
Paul Samuelson (1915–2009), Nobelpreis 1970

Wer nutzt Spieltheorie?



Wer nur einen Hammer hat, sieht überall Nägel.

Wer Spieltheorie versteht, erkennt überall Spiele.

Kapitel B

Spieltheorie und Ethik, zweiter Abend

To be literate in the modern age, you need to have
a general understanding of game theory.
Paul Samuelson (1915–2009), Nobelpreis 1970

Inhalt dieses Kapitels B

Herzlichen Dank für die freundliche Einladung, hier im Ökumenischen Zentrum vorzutragen, heute sogar an einem zweiten Abend!

Letzten Montag ging es um **einfache Spiele**, die einmal gespielt werden und dann nie wieder, das heißt, die Spieler:innen treffen einmal anonym aufeinander und trennen sich anschließend sofort wieder.

Letztes Mal haben wir dazu insbesondere den spieltheoretischen Begriff der **Rationalität** erklärt und empirisch-kritisch diskutiert. Das werde ich heute nicht wiederholen. Alle, die heute neu hinzukommen, haben dadurch vermutlich keinen Nachteil. Es gilt: **Learning by doing.**

Im heutigen zweiten Teil geht es um **wiederholte Spiele**, die mehrfach hintereinander gespielt werden, eventuell sogar „unendlich“ oft, wie wir gleich erklären. Dabei entstehen überraschende, neue Phänomene!

Was ist und was soll die Spieltheorie?

Spieltheorie versucht, strategisches / ökonomisches / menschliches Verhalten zu beschreiben, zu erklären, vorherzusagen, zu optimieren.

Die Sehnsucht nach Glück, das Verlangen nach einem erfüllten Leben, ist von jeher tief im menschlichen Herzen verwurzelt. Es hängt großenteils von unserem eigenen Handeln und von den Beziehungen zwischen uns Menschen ab, ob dieser Wunsch verwirklicht wird. Was ist aber dieses Handeln, das die einzelnen Personen, die Gemeinschaften und die Völker zu einem wahrhaft gelungenen Leben, zum Glück führt? Wie kann man es bestimmen?

Päpstliche Bibelkommission, *Bibel und Moral* (2008)

Worum geht es bei wiederholten Spielen? Anwendungen:

- Langfristige Verträge, etwa Arbeits- oder Kooperationsverträge.
- Teamarbeit, soziale Bindungen, Konventionen und Sanktionen.
- Familiäre Bindungen, etwa Ehe oder Kindererziehung.

Wiederholte Spiele dienen zur Untersuchung langfristiger Interaktion: Spieler beurteilen ihre Aktionen nicht nur nach dem sofortigen Gewinn, sondern auch ihre Auswirkung auf zukünftiges Verhalten der Mitspieler. Dazu müssen sie kurz- gegen langfristige Konsequenzen abwägen.

Das Ziel unserer Untersuchung ist nun, mögliche Verhaltensweisen mathematisch präzise zu beschreiben und spieltheoretisch zu erklären:

- Lohnt sich kurzfristiger Egoismus oder langfristige Kooperation?
- Welche Vereinbarungen sind lukrativ und selbststabilisierend?
- Wie müssen Zurechtweisungen auf Abweichungen reagieren?
- Wann / wie funktioniert Abschreckung durch Strafandrohung?

Viele Strategien sind aus dem Alltag intuitiv vertraut und werden hier mathematisch erklärt und quantifiziert. Eine Vereinbarung ist nur dann rational glaubwürdig, wenn sie ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist.

📖 G.J. Mailath, L. Samuelson: *Repeated games and reputations – long-run relationships.* Oxford University Press 2006.

Wir beginnen mit dem Gefangendilemma als wiederholtes Spiel. Dieses einfache Modell analysieren wir ausführlich und detailliert. Die dabei gemachten Beobachtungen sind recht allgemein gültig und führen uns zu Nashs Folk Theorem: Wir erarbeiten eine vereinfachte, aber quantitativ präzisierte Version aus dieser berühmten Satzfamilie.

Mögliche Anwendungen und Analogien sind überaus vielfältig:

- Langfristige Verträge, etwa Arbeits- oder Kooperationsverträge.
- Teamarbeit, soziale Bindungen, Konventionen und Sanktionen.
- Familiäre Bindungen, etwa Ehe oder Kindererziehung.

Der letzte Punkt löst oft Verwunderung und manchmal Ablehung aus: „Hier geht es um Gefühl, nicht um Kalkül!“ Sind hier Rationalität und mathematische Analyse nicht fehl am Platze? Geht es nicht vielmehr um wahre Liebe, Zuneigung, Verantwortung, Verlässlichkeit, usw.? Ja, auch, und gerade diese Emotionen und Normen sind interessant! Sie sind nicht zufällig, sondern Ergebnis unserer Evolution: biologisch, sozial und individuell. Die Spieltheorie bietet mögliche Erklärungen.

Wiederholte Spiele

Sprichwörter bündeln Erfahrungen, besonders auch spieltheoretische. Die folgenden wollen wir mathematisch erklären und nachrechnen.

Fool me once, shame on you!
Fool me twice, shame on me!

[Betrügst du mich einmal, Schande über dich!
Betrügst du mich zweimal, Schande über mich!]

On peut tromper une fois mille personnes,
mais on ne peut pas tromper mille fois une personne.

[Du kannst tausend Personen einmal betrügen,
aber nicht tausendmal dieselbe Person.]

Bei wiederholter Interaktion besteht die Möglichkeit der Kooperation, aber auch des Betrugs. Zusammenarbeit ist nur dann langfristig stabil, wenn Kooperation ausreichend belohnt, Betrug dagegen bestraft wird. Diese qualitative Erkenntnis wollen wir nun quantitativ ausarbeiten.

Diese Weisheit wurde in vielen Varianten formuliert und wiederentdeckt. Mit Blick auf die politische Entwicklung möchte ich hinzufügen:

You can fool all the people some of the time
and some of the people all the time,
but you cannot fool all the people all the time.

Diese englische Version wird Abraham Lincoln zugeschrieben, wohl zu Unrecht, siehe `quoteinvestigator.com/2013/12/11/cannot-fool/`.
Der Ursprung, soweit überhaupt noch aufspürbar, findet sich vermutlich in dem Artikel „Dieu“ der *Encyclopédie* von Diderot und d’Alembert, `enccre.academie-sciences.fr/encyclopedie/article/v4-2500-0/`:

On peut tromper quelques hommes,
ou les tromper tous dans certains lieux et en certains temps,
mais non pas tous les hommes dans tous les lieux et dans tous les siècles.

Diesen Erfahrungen wollen wir nun mathematisch auf den Grund gehen.

Wiederholte Spiele: vom Konflikt zur Kooperation?

Alice und Bob spielen das folgende Spiel:

B A	0	1
0	0 0	−2 6
1	6 −2	4 4

Aufgabe: (1) Spielen wir es! … Was ist rational bei einmaligem Spiel?

(2a) bei zweimaligem Spiel? … Auszahlungen mit $1/2$ diskontiert.
(2b) bei zweimaligem Spiel? … Münzwurf, Fortsetzungswkt $1/2$.
(3) bei dreimaligem Spiel? … Münzwurf, Fortsetzungswkt $1/2$.
(4) bei viermaligem Spiel? … Münzwurf, Fortsetzungswkt $1/2$.
(5) bei fünfmaligem Spiel? … Münzwurf, Fortsetzungswkt $1/2$.

(6) bei unendlichem Spiel? … Münzwurf, Fortsetzungswkt $1/2$.

Kreative Summation nach Guido Grandi (1703)

These: Jedes mathematische Phänomen lässt sich finanziell ausnutzen.
Ziel: Ich will aus nichts Geld machen. Hier mein genialer Businessplan:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & 0 \\
\stackrel{\text{(a)}}{=} & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \dots \\
\stackrel{\text{(b)}}{=} & (1-1) & + & (1-1) & + & (1-1) & + & (1-1) & + & \dots \\
\stackrel{\text{(c)}}{=} & 1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & \mp & \dots \\
\stackrel{\text{(d)}}{=} & 1 & + & (-1+1) & + & (-1+1) & + & (-1+1) & + & \dots \\
\stackrel{\text{(e)}}{=} & 1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \dots \\
\stackrel{\text{(f)}}{=} & 1
\end{array}
$$

Der italienische Mönch und Mathematiker Guido Grandi erklärte damit 1703 wie Gott das Universum aus dem Nichts erschaffen haben könnte. Können wir diesen göttlichen Trick auch ökonomisch nutzen?

Aufgabe: Sie misstrauen der Rechnung? Wo genau steckt der Fehler?

Lösung: Bei jeder Gleichung „$A = B$“ müssen wir *drei* Fragen klären: Sind die linke Seite A und die rechte Seite B wohldefinierte Objekte? Erst dann können wir die Gleichheit beider Objekte untersuchen! Meistens beachten wir nur letzteres, doch das scheitert hier.

Die ersten Gleichheitszeichen (a,b) und die letzten (e,f) sind korrekt, doch die mittleren (c,d) haben überhaupt keinen Sinn: Die Summe $S := 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ definiert keinen Wert! Diese Reihe konvergiert nicht. Dennoch verspüren viele Menschen das unbändige Verlangen, auch solchen Reihen irgendwelche Werte zuzuweisen.

Welche Zahl soll S sein? Selbst wenn wir phantasievoll irgendeinen Wert zuweisen / erfinden / definieren, etwa $1/2$, mindestens eine der beiden mittleren Gleichungen (c,d) wird falsch, in den meisten Fällen beide. Zu solch hoffnungslosem Unsinn sagt man auch *not even wrong*.

Dennoch ist dies eine beliebte Betrugsmasche, nach dem Muster „heute arm = … schwurbel schwurbel schwurbel … = morgen reich“.

Fun fact: Die möglichen Werte $S = 0$ und $S = 1$ wurden oben „erklärt“. Wenn S einen Wert hat, dann gilt $S = 1 - S$, also $2S = 1$, somit $S = 1/2$.

Den Wert $1/2$ erhalten wir auch, wenn wir naiv die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1/(1-z)$ bei $z = -1$ auswerten (unseriös), oder raffiniert die Konvergenz erzwingen, etwa durch Cesàro–Summation (seriös).

Damit noch nicht genug! Wir könnten auch folgende Reihe nutzen:

$$\frac{1+z}{1+z+z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{3k} - z^{3k+2} = 1 - z^2 + z^3 - z^5 + z^6 - z^8 + \dots$$

Ausgewertet bei $z = 1$ erhalten wir den Wert $S = 2/3$. Die Analysis bietet alle nötigen Grundlagen, um genau diesem Schlamassel zu entgehen.

Reihen sind ein wunderbares Werkzeug, sie sind schön und nützlich. Nur konvergent sollten Sie sein, sonst haben sie keinen Wert!

🙂 Zur Konvergenz von Reihen bietet die Analysis wirksame Kriterien. Für konvergente Reihen gelten dann überaus nützliche Rechenregeln.

Doch genug von mühsamer Mathematik, von seriösen Rechenregeln, von langweiliger und unnützer Haarspalterei. Wer braucht Korrektheit, wenn Kreativität lockt? Also zurück zu meinem genialen Businessplan! Ist Wissenschaft nicht nur dann gut, wenn sie Profit generiert? Oder wenigstens den oberflächlichen Anschein davon?

Bisher war natürlich alles Schwindel! Hier ist mein verbesserter Plan: Am Tag 1 leihe ich mir 1 Euro, den ich dann am Tag 2 zurückzahle. Auch am Tag 2 leihe ich mir 1 Euro, den ich am Tag 3 zurückzahle. Dies setze ich nun unbegrenzt fort. Was ich leihe, zahle ich zurück... dennoch verschafft mir diese Reihe 1 Euro, den ich nie zurückzahle!

Anschaulich: Die Schulden werden nach Unendlich verschoben. Für manche Menschen bedeutet $t = \infty$ einfach alles nach ihnen. Wie bitte, Sie halten das für unrealistisch, gar verrückt? Ja, sicher. Dennoch wird diese Methode erstaunlich häufig angewendet. Diese Masche gelingt, solange sie akzeptiert wird.

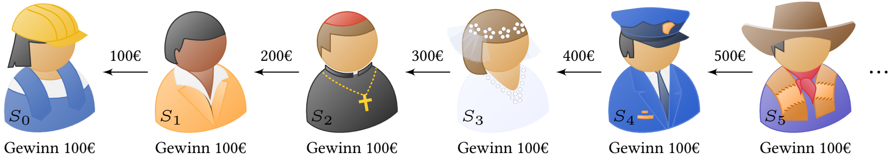
Schneeballsystem und Ponzi–Betrug

Charles Ponzi: „Investieren Sie jetzt, alle werden gewinnen!“

Absolut verlässliche Garantie

Ich bin ein grundehrlicher Garantieschein und immer verlässlich.
Wer mich für n Euro kauft, darf mich für $n + 100$ Euro verkaufen.
Dank dieser Eigenschaft bringe ich allen Wohlstand und Glück.

These: Jedes mathematische Phänomen lässt sich finanziell ausnutzen.



Wundersame Vermehrung des Geldes: *Everyone’s a winner?*
Sie glauben, so naiv kann doch niemand sein? **Greater Fool Theory**:
Denken Sie an Cryptos oder NFTs! J. Geuter, `youtu.be/8ciirqCCqd0`

Metamathematische Erfahrung führt zur folgenden provokanten These: Jedes mathematische Phänomen lässt sich finanziell ausnutzen (in gut gemeinten Anwendungen) bzw. ausbeuten (in betrügerischer Absicht).

Letzteres gilt besonders für wenig bekannte Regelmäßigkeiten (Sätze), noch besser eignen sich Unverständnis und weit verbreitete Fehler. Ausgenutzt wird hierbei nicht direkt der mathematische Sachverhalt, sondern vor allem die ungleich verteilte Information darüber.

Einige Indizien sprechen für die häufige Richtigkeit der Vermutung. Glücksspiele, auch und besonders unsere staatlichen Lotterien, verdienen Geld mit der Risikoliebe — und irrationalem Handeln, vermutlich Unwissen. Daher heißen sie auch *Steuer auf Dummheit.*

Neben legaler Ausnutzung mathematisch-logischen Unwissens gibt es auch die illegale, kriminelle Seite: Das nennen wir Betrug. Hier blühen die erstaunlichsten Schöpfungen menschlicher Dreistigkeit, gefördert durch die erstaunlichsten Auswüchse menschlicher Dummheit. Dumm-dreist versprochen wird: *Everyone’s a winner, baby, that’s no lie!*

Wir machen folgendes **Finanzexperiment** – bitte nur in Gedanken!

„Ich darf mich vorstellen, mein Name ist Charles Ponzi, Finanzgenie. Bitte passen Sie gut auf und machen Sie mit, alle werden gewinnen! Ich bin Spieler 0*, Sie sind Spieler* 1*, Ihr Nachbar ist Spieler* 2*, usw. Spieler 1: Sie geben mir 100€, Ihr Nachbar gibt Ihnen dann 200€, Ihnen bleiben 100€ Gewinn. Spieler 2: Sie haben gerade 200€ gegeben, Ihr Nachbar gibt Ihnen jedoch 300€, also bleiben auch Ihnen 100€ Gewinn. Und so weiter, und so weiter. Jeder Teilnehmer macht so 100€ Gewinn.“*

Wo genau liegt das Problem? Nicht alle durchschauen es sofort…
Als Grundregel helfen **Erhaltungssätze**: Werte kann man nicht mühelos vermehren, das sollte jeden warnen: *There are no free lunches!*

Eine genauere Analyse offenbart das **Problem der Endlichkeit**. $\mathscr{R}_1$: Der letzte Spieler S_n bleibt auf seinen Schulden sitzen. Ist er rational, wird er schon zuvor nichts zahlen. $\mathscr{R}_2$: Ist S_{n-1} rational zweiter Stufe, so sieht er den Zusammenbruch kommen und wird zuvor nichts zahlen…
Die frühen Spieler benötigen jedoch Rationalität sehr hoher Stufe!

Schneeballsystem und Ponzi–Betrug

Schneeballsystem nennt man ein betrügerisches Geschäftsmodell, das zu seinem Betrieb immer neue Teilnehmer benötigt: Es gibt kein profitables Produkt, sondern Gewinne entstehen hauptsächlich oder ausschließlich durch das frisch zufließende Kapitel neuer Teilnehmer.

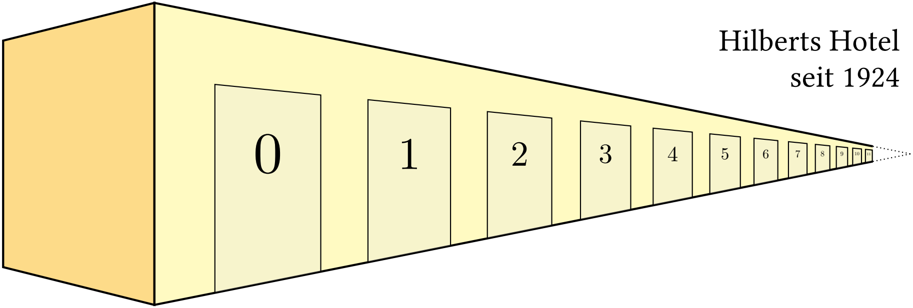
Dies heißt auch **Ponzi–Betrug**, engl. *Ponzi scheme*: Beiträge neuer Teilnehmer bezahlen die Ausschüttungen der vorgehenden Teilnehmer.

Berühmt-berüchtigt wurde diese Betrugsmasche durch **Charles Ponzi**, der in den 1920er Jahren Anleger in den USA um 20Mio Dollar prellte. Er versprach phantastische Renditen und lockte immer neue Investoren. Seine Methode **robbing Peter to pay Paul** flog nach acht Monaten auf.

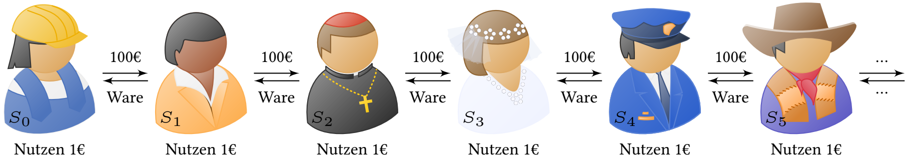
Aktuelles Beispiel eines baugleichen Systems ist der Betrugsskandal des Investmentunternehmens von **Bernard Madoff**. Es brach 2008 in der Bankenkrise zusammen, Investoren verloren etwa 18Mrd Dollar.

Ähnlich funktionieren **Kettenbriefe** und **Pyramidensysteme**, die heute im Internet kursieren: *Make Money Fast*, siehe `youtu.be/VNieth9wBTQ`. Dieser Schwindel versucht, Schulden nach Unendlich zu verschieben.

Ist das Geldsystem ein Segen oder ein Betrug?



These: Jedes mathematische Phänomen lässt sich finanziell ausnutzen.



Wundersamer Nutzen des Geldes: *Everyone's a winner!* Ponzi–Betrug?
Kann Geld aus dem Nichts entstehen? Arte: 42, `youtu.be/NMUFAzV6C5M`

Ist das Geldsystem ein Segen oder ein Betrug?

Als erstes möchte ich ehrlich zugeben: Das gezeigte Modell ist zwar leicht verständlich, aber leider auch extrem vereinfacht und allzu simpel. Komplizierte Geldsysteme versteht vermutlich kaum jemand so recht, oder bestenfalls nur in Analogie zu simplen Fällen wie diesem.

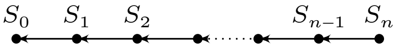
Spieler 0 bekommt Ware, die er nützlich findet und haben möchte. Spieler 1 bekommt im Gegenzug 100€; sie selbst sind für ihn unnütz, aber sie dienen ihm als Platzhalter. Spieler 1 weiß, oder besser: hofft, dass er damit Spieler 2 bezahlen kann. Und tatsächlich:

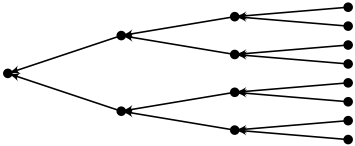
Spieler 1 bekommt Ware, die er nützlich findet und haben möchte. Spieler 2 bekommt im Gegenzug 100€; sie selbst sind für ihn unnütz, aber sie dienen ihm als Platzhalter. Spieler 2 weiß, oder besser: hofft, dass er damit Spieler 3 bezahlen kann. Und tatsächlich: …

Jeder Spieler S_n weiß, mit einer kleinen Wkt $\varepsilon_n \in]0, \varepsilon]$ kann das System im nächsten Schritt zusammenbrechen. Der erwartete Verlust $\varepsilon_n \cdot$ 100€ ist jedoch geringer als der erwartete Nutzen, hier beispielhaft 1€.
Daher ist es für jeden Spieler lukrativ, dieses Risiko einzugehen.

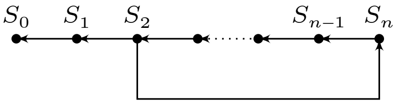
Ist das Geldsystem ein Segen oder ein Betrug?

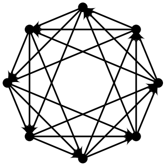
Nutzentransfer in einfachen Beispielen dargestellt als Graph:



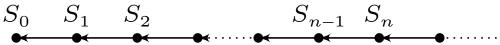


☹ Gleichgewicht unmöglich: Ponzi–Betrug, Schneeballsystem





☺ Gleichgewicht möglich: Geldzirkulation, evtl. Abfluss, Steuern, etc.



(potentiell) unendlich viele Spieler

☺ Gleichgewicht möglich: Generationenvertrag, Rentensystem, etc.

Anders als beim Ponzi–Betrug kann Geldzirkulation überall positiven Nutzen erzeugen. Das sagt noch nichts über un/gerechte Verteilung!

In unserem simplen Beispiel hat jeder denselben Nutzen / Gewinn 1€. Zur Rationalität genügt, dass jeder positiven Nutzen hat; dieser kann unterschiedlich verteilt sein, gar extrem ungerecht. Solche Phänomene beobachten wir tatsächlich deutlich in der uns umgebenden Ökonomie.

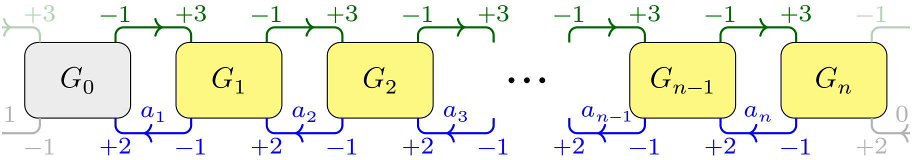
Das herrschende Geldsystem ist das Geldsystem der Herrschenden.
Es wird verteidigt mit dem ideologischen Anspruch der Gerechtigkeit. In der Praxis kann es dies oft nicht einlösen. Liegt das am Geldsystem selbst oder an anderen Faktoren? Darüber lohnt es sich zu streiten.

> *Geld ist eine neue Form der Sklaverei, die sich von der alten nur unterscheidet, indem sie unpersönlich ist, dass es keine direkte Beziehung zwischen Herren und Sklaven gibt.*
> Leo Tolstoi (1828–1910)

Insgesamt wird der Kapitalismus kritisiert als Variante des Ponzi-Betrugs:
Aus marxistischer Sicht zerstört er seine gesellschaftlichen Grundlagen.
Aus ökologischer Sicht zerstören wir so unsere natürlichen Ressourcen.
Ist die fehlende Nachhaltigkeit korrigierbar oder systematisch?

Überlappende Generationen: endliche Generationenfolge

Die Generationen $G_0, G_1, \dots, G_n$ interagieren nach folgendem Muster:



Jede Generation G_i kennt nur die Aktion $a_{i-1} \in \{0, 1\}$ ihrer Eltern G_{i-1}. Sie entscheidet sich daraufhin entweder für Egoismus ($a_i = 0$) oder Altersversorgung ($a_i = 1$). Ihre Auszahlung ist $u_i = 2 - 1a_i + 2a_{i+1}$. Wie skizziert gelten die Randbedingungen $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = 0$.

Jede Generation G_i hat demnach vier mögliche Strategien:

Egoist	$E = \left[\begin{smallmatrix} 0\mapsto 0 \\ 1\mapsto 0 \end{smallmatrix}\right]$,	Altruist	$A = \left[\begin{smallmatrix} 0\mapsto 1 \\ 1\mapsto 1 \end{smallmatrix}\right]$,
Kontra	$K = \left[\begin{smallmatrix} 0\mapsto 1 \\ 1\mapsto 0 \end{smallmatrix}\right]$,	Nachmacher	$N = \left[\begin{smallmatrix} 0\mapsto 0 \\ 1\mapsto 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Aufgabe: Untersuchen Sie den endlichen Fall $n < \infty$, dann $n = \infty$. Was sind hier Gleichgewichte? Kann Altersversorgung rational sein?

🙂 Unser Modell ist extrem vereinfacht, aber es illustriert das Prinzip. Es ist ein Gleichnis, ein einfaches Lehrbeispiel und leicht zu verstehen. Wir suchen alle stabilen Lösungen, also **Nash–Gleichgewichte**.

Zur Vereinfachung nehmen wir hier an, jede Generation G_i investiert automatisch in ihre Kinder G_{i+1}. Auch dies könnten wir als strategische Option untersuchen, ich gehe auf diese Verfeinerung nicht weiter ein.

Konrad Adenauer wird in dieser Frage der Ausspruch zugeschrieben: „Kinder bekommen die Leute immer.“ — Aus heutiger Sicht ein Irrtum.

Die Werteskalen und konkret angesetzten Zahlen sind etwas willkürlich. Uns geht es um die Frage, ob und wie Gleichgewichte möglich sind.

Die Frage mag überraschen: Jeder Akteur, die Generation G_i, trifft nur eine Entscheidung, nämlich die Zuwendung a_i an ihre Elterngeneration G_{i-1}, jedoch **ohne irgendeine Gegenleistung** erhoffen zu können.

Ist diese Zuwendung also irrational im Sinne individueller Maximierung? Oder gibt es doch Mechanismen, die sie materiell belohnen könnten? Genau diesen Fragen gehen wir in den nächsten Aufgaben nach!

Aufgabe: (0) Formulieren Sie dies sorgfältig als strategisches Spiel

$$u : \prod_{i\in I} S_i \to \mathbb{R}^I : s \mapsto u(s).$$

Lösung: (0) Die Spielermenge ist $I = \{1, 2, \dots, n\}$. Jede Generation G_i kennt nur die Aktion $a_{i-1} \in \{0, 1\}$ ihrer Eltern und muss daraufhin ihre Aktion $a_i \in \{0, 1\}$ wählen. Somit hat sie die vier möglichen Strategien

Egoist	$E = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 0\\ 1\mapsto 0\end{smallmatrix}\right]$,	Altruist	$A = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 1\\ 1\mapsto 1\end{smallmatrix}\right]$,
Kontra	$K = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 1\\ 1\mapsto 0\end{smallmatrix}\right]$,	Nachmacher	$N = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 0\\ 1\mapsto 1\end{smallmatrix}\right]$.

Jeder Spieler $i \in I$ hat also die Strategiemenge $S_i = \{E, A, K, N\}$. Der Strategievektor $s \in S := \prod_{i\in I} S_i$ bestimmt den Aktionsvektor $a \in \{0, 1\}^I$: Wir setzen $a_0 = 1$ und rekursiv $a_i = s_i(a_{i-1})$ für $i \in I$ sowie $a_{n+1} = 0$.

Die Auszahlung $u : S \to \mathbb{R}^I$ ist in diesem Modell $u_i(s) = 2 - 1a_i + 2a_{i+1}$.
Für Generation G_1 sind die Strategien $E \equiv K$ und $A \equiv K$ äquivalent, denn jedes Paar führt jeweils zu derselben Aktion a_1 und Auszahlung.

Die Randbedingungen, hier $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = 0$, sind etwas willkürlich, aber notwendig. Anschaulich können wir $s_0 = A$ und $s_{n+1} = E$ setzen.

Beobachtbar sind in diesem Spiel nur die Aktionen $a_i \in \{0, 1\}$.
Diese allein bestimmen bereits alle Auszahlung $u_i = 2 - 1a_i + 2a_{i+1}$.
Sprichwörtlich sagt hierzu der Volksmund: „Nur die Taten zählen."
Biblisch: „An ihren Früchten sollt ihr sie erkennen." (Matthäus 7,20)

Die **Strategie** s_i ist hier jedoch nicht die Aktion a_i selbst, sondern die Methode (Funktion, Handlungsanweisung), um diese Aktion zu ermitteln. Die auszuführende Aktion a_i ist nämlich nicht konstant vorgeschrieben, sondern hängt ab von der vom Spieler i beobachteten Vorgeschichte.

Dieses raffinierte Modell unterscheidet auf genial-einfache Weise zwischen **Genotyp** $s_i \in \{E, A, K, N\}$, den individuellen Strategien, und **Phänotyp** $a_i \in \{0, 1\}$, den ausgespielten Aktionen abhängig von der Vorgeschichte. Der Phänotyp entsteht aus Genotyp und Umwelt.

Ebenso können wir uns die Strategie s_i von Spieler i als seine **Moral** vorstellen, also seine (explizite) Vorschrift für das „rechte Handeln". Die Handlung $a_i = s_i(a_{i-1})$ ist seine Reaktion auf die Handlungen anderer, also auf die in der Gesellschaft vorgefundenen Umstände.

Überlappende Generationen: endliche Generationenfolge

Aufgabe: (1) Finden Sie alle Gleichgewichtsauszahlungen $u(s) \in \mathbb{R}^I$!
(2) Genauer gefragt: Welche Gleichgewichte $s \in \mathrm{NE}(u)$ liegen dahinter?

Lösung: (1) Der konstante Strategievektor $s = (E, E, \dots, E)$ führt zu den Aktionen $a = (0, 0, \dots, 0)$ mit den Auszahlungen $u(s) = (2, 2, \dots, 2)$. Hier ist s ein Nash–Gleichgewicht: Kein Spieler kann sich verbessern.

Jedes Nash–Gleichgewicht $s \in S$ führt zu genau demselben Ergebnis: Rückwärtsinduktion: Wäre $a \neq (0, 0, \dots, 0)$, dann existierte ein letzter Spieler $i \in I$ mit $a_i = 1$, also $a_{i+1} = \dots = a_{n+1} = 0$, und i könnte sich aus eigener Kraft verbessern. Somit wäre s kein Gleichgewicht.

🙂 Damit kennen wir alle Gleichgewichtsauszahlungen $u(s) \in \mathbb{R}^I$!

(2) Sei $s \in \mathrm{NE}(u)$. Aus (1) wissen wir bereits $a_i(s) = 0$ für alle $i \in I$. Aufgrund der vorgegebenen Randbedingung $a_0 = 1$ gilt $s_1 \in \{E, K\}$. Für $i \geq 2$ gilt $a_{i-1} = a_i = 0$, also $s_i \in \{E, N\}$. Wäre $s_i = N$, so könnte Spieler $i - 1$ sich aus eigener Kraft verbessern. Also bleibt nur $s_i = E$.

🙂 Damit kennen wir alle Nash–Gleichgewichte $s \in \mathrm{NE}(u)$!

Bei nur **endlich vielen Generationen** ist dies ein Ponzi–Betrug: Dieses Umverteilungssystem muss irgendwann zusammenbrechen!

$\mathscr{R}_1$: Die letzte Generation G_n hat kein Interesse an einer Zuwendung an ihre Elterngeneration G_{n-1}. Im Gegenteil schadet sich G_n damit. Bei rationalem Verhalten wird die Generation G_n also $a_n = 0$ wählen.

$\mathscr{R}_2$: Die vorletzte Generation G_{n-1} sieht dies kommen, Rationalität zweiter Stufe vorausgesetzt. Daher wird auch sie $a_{n-1} = 0$ wählen.

So geht es weiter: $a_n = 0$ führt zu $a_{n-1} = 0$ bis schließlich $a_1 = 0$. Bei rationaler Spielweise entstehen hier also keinerlei Zuwendungen.

Diese raffinierte Schlussweise kennen wir als **Rückwärtsinduktion**. Wir eliminieren hierbei schrittweise alle strikt dominierten Strategien

Zu beachten ist hierbei jedoch, dass die Generation G_i Rationalität der Stufe $n - i + 1$ benötigt. Die frühen Generationen benötigen demnach Rationalität sehr hoher Stufe! Das entspricht genau dem Ponzi–Betrug.

Die Schlussweise gilt nicht mehr im Falle unendlich vieler Generationen. Tatsächlich finden wir im unendlichen Falle völlig neue Gleichgewichte.

Überlappende Generationen: endliche Generationenfolge

Unser Argument beruht auf Rationalität im Sinne der Definition 1A. Dies wird klarer, wenn wir zum Kontrast folgende Alternative betrachten: Generation G_n möchte zwar ihren Nutzen maximieren (Axiom $\mathscr{R}_0$ gilt), ignoriert aber, dass sie die letzte Generation ist (Axiom $\mathscr{R}_1$ ist verletzt).

Aufgabe: Was passiert, wenn die letzte Generation irrational handelt? Im Angesicht des Weltuntergangs verfolgt sie vielleicht andere Ziele und könnte sich für irgendeine Strategie $s_n \in \{E, A, K, N\}$ entscheiden.

Lösung: (3) Wir fixieren $s_n = E$. Das ist die dominante Strategie. Es gelten dieselben Argumente und Ergebnisse wie zuvor in (1,2).

(4) Wir fixieren $s_n = A$. Für alle vorigen Spieler $i = n-1, \dots, 1$ gelten dieselben Argumente wie zuvor: Wir finden $s_i = E$ und $s_1 \in \{E, K\}$.

(5) Wir fixieren $s_n = K$. Für alle vorigen Spieler $i = n-1, \dots, 1$ gelten dieselben Argumente wie zuvor: Wir finden $s_i = E$ und $s_1 \in \{E, K\}$.

(6) Wir fixieren $s_n = N$. Für Spieler $n-1$ ist nun $s_{n-1} = A$ dominant. Für alle Spieler $i = n-2, \dots, 1$ finden wir per Rückwärtsinduktion $s_i = E$ und schließlich $s_1 \in \{E, K\}$. (Siehe unten, das Experiment im Casino.)

Bei endlich vielen Generationen gibt es nur ein Gleichgewicht (1). Selbst bei irrationalem Verhalten bricht das System irgendwann ein. Selbst wenn die frühen Spieler von diesem System profitieren sollten, so ist doch klar: irgendein späterer Spieler muss die Zeche zahlen.

In der Realität treten Betrugssysteme mit diesem Muster tatsächlich auf. Warum fallen Spieler darauf herein? Mehrere Erklärungen sind denkbar:

Die frühen Spieler können irrational handeln, weil sie das Spielsystem nicht durchschauen oder analysieren können. (Annahme $\mathscr{R}_1$ ist verletzt.)

Es könnte auch sein, dass frühe Spieler durchaus das Spielsystem durchschauen, also für sie die Annahme $\mathscr{R}_1$ gilt, sie aber umgekehrt auf die Naivität späterer Spieler hoffen. (Annahme $\mathscr{R}_2$ ist verletzt.)

Bei beschränkter Rationalität gibt es genug Möglichkeiten, auf solche Betrugssysteme hereinzufallen. Erfahrung lehrt, dass dies geschieht. Das gilt insbesondere, wenn sich Details und Darstellung ändern, und so die erneute Analyse die Kapazitäten der Spieler übersteigt. Zudem ist das Internet ideal zur Verbreitung von Betrügereien.

Fazit: Was ist und was soll die Spieltheorie?

Spieltheorie versucht, strategisches / ökonomisches / menschliches Verhalten zu beschreiben, zu erklären, vorherzusagen, zu optimieren.
🙂 Sie bietet eine Sprache zur Beschreibung von Konflikten
🙂 und umfangreiche Werkzeuge zur ihrer Analyse.

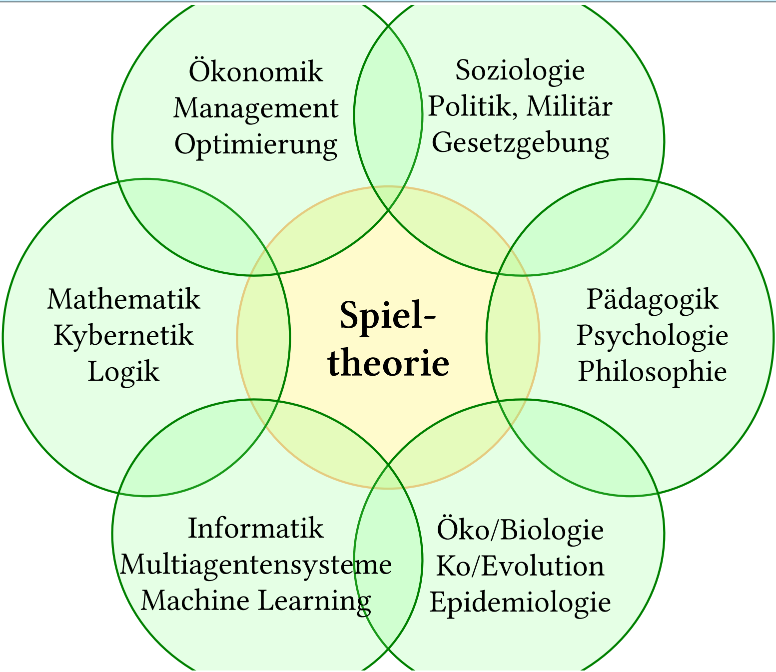
Rationales Verhalten können wir berechnen, menschliches beobachten.
🙂 In günstigen Fällen können wir reales Verhalten rational erklären.
☹️ Meist weichen Beobachtung & Experiment von der Theorie ab.
Unbeschränkte Rationalität ist selten, Komplexität (über)fordert.

Mechanismen: Regeln gestalten, Verhalten fördern, Ziele erreichen.
Erziehung, Hoch/Schule, Gesellschaft, Wirtschaft, Gesetzgebung, etc.

To be literate in the modern age, you need to have a general understanding of game theory.
Paul Samuelson (1915–2009), Nobelpreis 1970

Wer nutzt Spieltheorie?

Wer nur einen Hammer hat, sieht überall Nägel.



Wer Spieltheorie versteht, erkennt überall Spiele.