Casino Royal

Experimentelle Spieltheorie

Prof. Dr. Michael Eisermann

zusammen mit Dr. Friederike Stoll

`eiserm.de/popularisierung`

Universität Stuttgart

Tag der Wissenschaft, 25.06.2022

Habe Mut, dich deines eigenen
Verstandes zu bedienen!

Much to learn, you still have.
This is just the beginning.

Begrüßung

Herzlich willkommen beim Tag der Wissenschaft an der Uni Stuttgart!

Ich möchte Ihnen einen kleinen Einblick in die Spieltheorie geben und mit Ihnen auch ein paar schöne Bei-Spiele ausprobieren.

Die Spieltheorie als Wissenschaft wird seit knapp 100 Jahren betrieben und ist somit vergleichsweise noch jung. Nach zaghaften Anfängen in den 1920er Jahren hat sie sich seit den 1950ern rasant entwickelt und ist inzwischen ein riesiges Gebiet mit zahlreichen Anwendungen.

(Zum Vergleich: Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist viel älter. Sie begann im 17. Jh. mit Fragestellungen zum Glücksspiel. Wirklich alt ist die Geometrie, als Theorie ca. 2500 Jahre, angewandt schon seit Anbeginn menschlicher Zivilisation.)

Ich habe ein paar Bei-Siele ausgewählt, nur wenige, aber sehr schöne, die uns hoffentlich viel Freude bereiten – auch mit Oho und Aha!


Universität Stuttgart - Winnersemester 2019/20
Michael €isermann
Friederike $toll
CASINO ROYAL
V57
$PIELTHEORI€
& ökonomisches Verhalten
Die Würfel sind gefallen: Die Spieltheorie geht in die zweite Runde! Diese Veranstaltung präsentiert grundlegende Modelle und Beispiele, Begriffe und Techniken der Spieltheorie: statische und dynamische Spiele, Normalform und extensive Form, vollständige und unvollständige Information, Rationalität, Nash-Gleichgewichte und verfeinerte Lösungskonzepte, Lösungsmethoden, lineare Programme und Simplexalgorithmus, Anwendungen der Mikroökonomie, kollektive Entscheidungen und Verhandlungstheorie, Koalitionen und kooperative Spieltheorie, Auktionen und Mechanismendesign. Jetzt neu: angewandt-experimentelle Spieltheorie im hauseigenen Casino Royal. Freitags 14 Uhr ist Lucky Hour. Mesdames et messieurs, faites vos jeux !
Ab 17. Oktober im Hörsaal

Was ist und was soll die Spieltheorie?

Spieltheorie versucht, strategisches / ökonomisches / menschliches Verhalten zu beschreiben, zu erklären, vorherzusagen, zu optimieren.

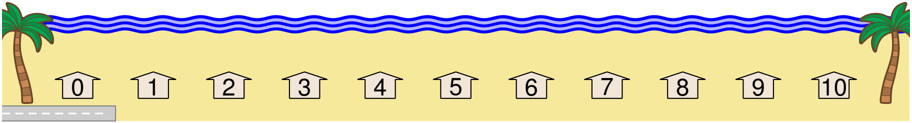
To be literate in the modern age, you need to have
a general understanding of game theory.
(Paul Samuelson, 1915–2009, Nobelpreis 1970)

Spiele beschreiben Konflikte, Konkurrenz und Kooperation:

- Mehrere Akteure interagieren (Individuen, Firmen, Staaten, KI).
- Jeder Akteur hat gewisse Handlungsoptionen (Züge, Strategien).
- Aus diesen Möglichkeiten wählt jeder Akteur aus (frei, unabhängig).
- Daraus entsteht für jeden ein Ergebnis (Nutzen, Auszahlung, etc).
- Jeder Spieler versucht, sein eigenes Ergebnis zu maximieren.

If people do not believe that mathematics is simple,
it is only because they do not realize how complicated life is.
(John von Neumann, 1903–1957)

Un/Klug positionieren: Kiosk am Strand



Sie eröffnen einen Kiosk, mögliche Positionen sind $x \in \{0, 1, \dots, 10\}$. Die Badegäste sind gleichverteilt und gehen immer zum nächsten Kiosk. Jeder Spieler (Kiosk) maximiert seine Kundenzahl (Umsatz, Marktanteil). Bei sonst gleichem Anteil sucht jeder die Nähe zur Zufahrtstraße bei 0.

Aufgabe: (1) Sie haben die einzige Lizenz. Wo bauen Sie Ihren Kiosk?
(2) Sie haben die erste von zwei Lizenzen. Wo bauen Sie Ihren Kiosk?
(3) Sie haben die erste von drei Lizenzen. Wo bauen Sie Ihren Kiosk?
Finden Sie zu jedem Zug von A die beste Antwort von B und von C!

Lösung: Bei rationalem Verhalten finden wir folgende Anordnungen:

(1)	A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(2)	0	1	2	3	B	A	6	7	8	9	10
(3)	0	1	B	C	4	5	6	7	A	9	10

Un/Klug positionieren: Kiosk am Strand

Ausführlich: Frage (1) wird gelöst durch die offensichtliche Optimierung. Bei Frage (2) suchen wir zu jedem Zug von A die beste Antwort von B:

A	B										$1 : 10$
	A	B									$2 : 9$
		A	B								$3 : 8$
			A	B							$4 : 7$
				A	B						$5 : 6$
				B	A						$6 : 5$
					B	A					$5 : 6$
						B	A				$4 : 7$
							B	A			$3 : 8$
								B	A		$2 : 9$
									B	A	$1 : 10$

Versuchen Sie, die Lösung sauber aufzuschreiben: Wie organisieren Sie Ihre Notation und Ihre Argumente möglichst klar und nachvollziehbar?

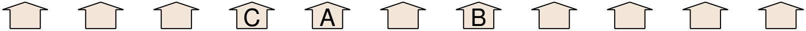
Un/Klug positionieren: Kiosk am Strand

Antwort (3) ist länger, wir müssen systematisch und sorgfältig vorgehen. Dies ist ein einfach-schönes Beispiel der kombinatorischen Spieltheorie: Wir durchsuchen hier einen endlichen Entscheidungsbaum, zählen alle Möglichkeiten auf und sortieren sie nach den Kriterien der Rationalität.

⚠ Jeder Spieler muss bei seiner Analyse Annahmen machen über die Rationalität seiner Gegenspieler. Ich nenne dazu ein einfaches Beispiel:

Wäre B gierig und dumm, dann wäre Platz 4 für A ein guter Zug: Spieler B wird kurzsichtig Platz 5 wählen, und Spieler C folgt auf Platz 6.

Sind B und C rational, dann wäre Platz 4 für A ein schlechter Zug: Spieler B wird schlau Platz 6 wählen, und Spieler C folgt auf Platz 3.



Um unsere Analyse zu vereinfachen, nehmen wir hier vollständige Rationalität an, wie oben erklärt. Damit wird das Kioskproblem stark vereinfacht und lösbar durch eine kombinatorische Optimierung.

Aufgabe: Diskutieren und lösen Sie das Problem für drei Kiosklizenzen. Versuchen Sie, Ihre Lösung sauber aufzuschreiben: Wie organisieren Sie Ihre Notation und Argumente möglichst klar und nachvollziehbar?

Wenn Sie Freude daran haben, diskutieren Sie Erweiterungen:
Was passiert, wenn Kiosk A und C demselben Spieler gehören?
Was passiert, wenn Kiosk B und C demselben Spieler gehören?
Was passiert, wenn Kiosk A und B demselben Spieler gehören?

Aufgabe: Wenn Sie programmieren, dann können Sie die einfachen, aber lästig-länglichen Aufzählungen einem Computer übertragen.

Tipp: Programmieren Sie so am besten gleich das allgemeinere Problem für einen Strand der Länge ℓ und k Kiosklizenzen, wobei $1 \le k \le \ell$ gelte, oder allgemein einen Graphen mit Kantenlängen und Eckengewichten.

Herausforderung: Erweitern Sie dies zu Koalitionen, wobei sich die Kioske in feste Gruppen einteilen, so wie die Filialen einer Kette.
Denkbar sind zwei Spieler, die abwechselnd ihre Kioske setzen.
Kniffliger: Ein Losverfahren entscheidet, wer als nächster setzt.

Ein Modell, viele Anwendungen

Es geht in der Spieltheorie einerseits um konkrete Spiele und Strategien, um explizite Probleme und präzise Lösungen, um rationales Handeln, empirisch notgedrungen ebenso um begrenzt rationales Verhalten. Auf präzise Fragen erhoffen wir uns ebenso präzise Antworten.

Andererseits geht es auch um gemeinsame Muster und Mechanismen. Wenn Alice und Bob einen Kuchen oder ein Erbe teilen, dann beschreibt das im Prinzip auch allgemeine Teilungs- und Verhandlungsprobleme. Die Details sind verschieden, aber die Mechanismen sind ähnlich.

Die hier untersuchten Spiele sind stark vereinfacht, manchmal lächerlich, oft genug übertrieben simpel, doch sie treffen häufig einen wahren Kern. Solch konkrete Beispiele benennen und repräsentieren typische Muster. Ihre Einfachheit zeigt den Problemkern besonders klar und deutlich.

In konkreten Anwendungen müssen wir genaue Daten berücksichtigen, es gibt viel mehr Wenn-und-Aber, und all das ist auch gut und richtig so. Dennoch: Nach Sichtung und Abwägung aller Details, stellt sich in erster Näherung häufig genug ein einfaches Muster als wesentlich heraus.

Ein Modell, viele Anwendungen

Das Strandkiosk-Problem ist eine schöne kombinatorische Aufgabe. Sie steht hier stellvertretend für ähnliche Spiele, allgemein für Konflikte um eine räumliche Marktaufteilung, Konkurrenz um Marktanteile, etc. Der Kampf um den Strand kann auch noch anderes darstellen!

Denken Sie zum Beispiel an ein politisches Spektrum; die verbreitete Sprechweise von „links“ und „rechts“ ist eine hilfreiche Vereinfachung. Wir gehen davon aus, dass Wähler über das Spektrum verteilt sind und immer genau die Partei wählen, die ihrer Position am nächsten liegt.

Wenn es nur eine Partei A gibt, wie positioniert sie sich im Spektrum? Nun, das ist eigentlich egal, da sie ohnehin alle Wählerstimmen erhält. Genau dies ist in Ein-Parteien-Staaten tatsächlich zu beobachten.

Wenn es aber zwei Parteien A und B gibt, wie positioniert sich die erste? Genau dieses Problem haben wir oben gelöst! Tatsächlich beobachten wir in der politischen Debatte den Kampf um die „Mitte der Gesellschaft“. Gibt es weitere Parteien C,D,. . . , so entflammen zudem Flügelkämpfe. Jetzt wissen Sie genauer, warum das strategisch unvermeidlich ist.

Ein Modell, viele Anwendungen

Moment mal, können wir das banale Strandkiosk-Problem ernsthaft vergleichen mit hochkomplizierten parteipolitischen Strategien? Genau genommen natürlich nicht, aber grob gesagt schon.

Das ist die Stärke und zugleich die Begrenzung abstrakter Modelle: Sie treffen einen Kern des Problems, sie sind einfach und übersichtlich und leicht zu verstehen, sie taugen wunderbar als erste Näherung. Sie dienen als Ausgangspunkt und Orientierung für Anwendungen.

Für eine genauere Analyse im konkreten Einzelfall dürfen wir natürlich nicht stur bei dieser Grundidee verharren, sondern müssen wesentlich weiter gehen und genauer hinschauen. Im obigen Parteienbeispiel:

- Die politische Landschaft ist heute nicht (mehr) eindimensional.
- Das Wählerverhalten ist nicht (mehr) ganz so einfach vorhersehbar.
- Der Kampf um den linken / rechten Rand ist ein heikler Balanceakt.

Daher müssen wir unser Modell weiter verfeinern und kalibrieren durch genauere Daten. Auch begrenzt rationales Verhalten ist zu erwarten, dies untersucht die empirische Spieltheorie und Verhaltensökonomik.

Ein Modell, viele Anwendungen

Ökonomische Modelle können uns gute grundlegende Einsichten über komplizierte Situationen vermitteln, Geschichten erzählen, dafür sind sie großartig. Aber wie benutzt man Modelle richtig?
(John Kay im Interview, Die Zeit 25. Juli 2019)

Wir werden dieses bemerkenswerte Phänomen noch oft beobachten: Selbst einfache Spiele können den wahren Kern eines Konflikts treffen. Physiker sprechen hier traditionell nüchtern von der **ersten Näherung**, die bei Bedarf durch die zweite, dritte, ... Näherung verfeinert wird.

Das **Modell**, das wir von der **Realität** entwerfen, hilft und leitet uns, doch niemals sollten wir naiv das Modell für die Wirklichkeit halten. Von dieser ersten Näherung ausgehend können wir unser Modell je nach Bedarf verfeinern und konkreten Gegebenheiten anpassen.

Die Wirklichkeit ist komplizierter als sie auf den ersten Blick scheint. Dies erfordert intellektuelle Redlichkeit und mathematische Sorgfalt. Das spieltheoretische Modell dient als Grundlage. Selbst wo es versagt, ist es der Maßstab für die Abweichung von Prognose und Beobachtung.

Definition 1A: Stufen der Rationalität

Unter **(unbeschränkter) Rationalität** verstehen wir folgende Axiome:

$\mathscr{R}_0$: Jeder Spieler will sein Ergebnis (Nutzen, Gewinn, ...) maximieren.

$\mathscr{R}_1$: Jeder Spieler versteht zudem alle Spielregeln und Konsequenzen.

$\mathscr{R}_2$: Es gilt die vorige Aussage $\mathscr{R}_1$, und jeder Spieler weiß dies.

$\mathscr{R}_3$: Es gilt die vorige Aussage $\mathscr{R}_2$, und jeder Spieler weiß dies.

etc... Genauer definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ die Aussage

$\mathscr{R}_n$: Es gilt die Aussage $\mathscr{R}_{n-1}$, und jeder Spieler weiß dies.

$\mathscr{R}_\infty$: Es gilt die Aussage $\mathscr{R}_n$ für jede Stufe $n \in \mathbb{N}$.

Axiome $\mathscr{R}_0$ und $\mathscr{R}_1$ sind extrem wichtige Annahmen für die Spieltheorie: Erst damit können wir das Spielerverhalten mathematisch analysieren. Je nach Spiel nutzen wir auch die Verschärfungen $\mathscr{R}_2, \mathscr{R}_3, \mathscr{R}_4, \dots$ usw.

In Spielanalysen bzw. Beweisen ist es zur Klärung nützlich anzugeben, welche Stufe $\mathscr{R}_n$ der Rationalität wir jeweils benutzen und voraussetzen. Implizite Annahmen formulieren wir damit explizit, präzise und bequem.

Diese Axiome sind meist **Grundlage der Spieltheorie**. Wir müssen sie gründlich verstehen und an möglichst zahlreichen Beispielen erproben.

Als Warnung bzw. freundliche Enttäuschung schicke ich gleich vorweg: Diese Idealisierungen gelten in vielen realen Situationen leider nicht! Diese Eigenschaften sind zwar wünschenswert, doch oft nicht erfüllt. Alles hängt von den Akteuren ab: Menschen, Unternehmen, Staaten, KI.

Axiom $\mathscr{R}_0$ bedeutet: Die im Spiel formulierte Nutzenfunktion erfasst das Wesentliche. Wir verkneifen uns danach metaphysische Spekulationen über Moral, Ethik, Gerechtigkeit, Egoismus vs Altruismus, Erziehung, Tradition, Religion, Sünde, Fegefeuer, jüngstes Gericht, Karma, etc. . .

Damit will ich nicht behaupten, dass diese Fragen unwichtig wären, sie liegen nur außerhalb der Reichweite unseres mathematischen Modells. Sie sind nicht Teil des Spiels; wenn doch, dann in der Nutzenfunktion:

Wenn wir diese Begriffe in der Spieltheorie betrachten wollen, und das sollten wir, dann dürfen wir sie nicht implizit und vage dazufabulieren, sondern müssen sie explizit und präzise im Spiel codieren.

Axiom $\mathscr{R}_1$ bedeutet: Jeder Spieler kennt und versteht die Regeln des Spiels, er kennt alle Handlungsoptionen und deren Konsequenzen.

Das ist eine zentrale, aber manchmal allzu starke Annahme: Für das Spiel Schach kenne ich zwar alle Regeln, aber nicht alle Konsequenzen; mir fehlt die Rechenkapazität, ausreichend viele Züge vorauszudenken.

Das gilt selbst für sehr einfache Spiele, wie unsere folgenden Beispiele. Sie erfahren damit ganz konkret, dass Sie zwar die Regeln verstehen, aber nicht sofort alle Konsequenzen erkennen. Wir sehen das daran, dass Sie als Spieler nicht sofort die beste Strategie wählen, sondern noch Fehler machen. Sie beherrschen das Spiel erst nach etwas Übung!

Gerade hierzu ist es wichtig, diesen Vortrag mit konkreten Beispielen aufzubauen, die Sie dann auch ernsthaft bearbeiten und lösen sollen. Andernfalls hören Sie schöne Theorie und glauben, damit sei alles klar.

Die Wirklichkeit ist viel komplizierter… und auch viel interessanter! Neben der Spieltheorie lohnt sich immer auch das soziale Experiment. Die tatsächlich beobachtete Rationalität ist allzu oft doch beschränkt.

Axiome $\mathscr{R}_2$, $\mathscr{R}_3$ usw. codieren die **gegenseitigen Einschätzungen**.
„Als Spieler verhalte ich mich rational. Dazu muss ich das Verhalten der anderen Spieler vorhersehen, antizipieren, besser gesagt: berechnen. Am besten gelingt mir dies, wenn ich weiß, dass auch alle anderen Spieler sich rational verhalten. Davon will / muss / kann ich ausgehen.“

Wir nennen dies **gemeinsames Wissen**, engl. *common knowledge*.
Es genügt nicht, dass etwas wahr ist, es muss auch jeder wissen.
Und man muss sich darauf verlassen können, dass es jeder weiß.
Und auch darauf, dass jeder weiß, dass jeder es weiß. Usw.

Das ist ein allgemeines und wichtiges Konzept: Das Wissen eines Spielers besteht neben seiner reinen Sachkenntnis auch aus seinem Metawissen über das Wissen der anderen Spieler. „Ich weiß, dass du weißt, dass ich weiß, . . . “. Das klingt vertrackt und ist es meist auch.

In strategischen Situationen sind Wissen und Nichtwissen entscheidend. Für die Analyse von Spielen (und überall sonst) ist daher die Verteilung von Wissen und der Zugang zu Information von zentraler Bedeutung.

In this ocean of madness, an island of reason

Rationalität dient uns als Leuchtturm im Ozean der Unsicherheit.
Sie markiert ein behütetes Eiland sicheren, gefestigten Wissens.
Sie dient uns zur Navigation, selbst in unkartierten Gewässern.
Selbst fern der Rationalität hilft sie uns zur Orientierung.

Ist Rationalität ein geeignetes Fundament?

Manche Zuhörer wehren sich vehement dagegen, den Menschen auf den **Homo oeconomicus** zu reduzieren. Manche sträuben sich auch dagegen, dass ich dafür das hehre Wort „Rationalität“ missbrauche.

Als Mathematiker möchte ich die Gemüter beruhigen und die Wut mäßigen: Zunächst ist die Definition eine ehrliche Klarstellung!

Es ist sehr wichtig, keine unbewiesenen Annahmen zu treffen,
aber noch wichtiger ist es, keine Worte zu benutzen,
hinter denen sich kein klarer Sinn verbirgt.
(William Kingdon Clifford, 1845–1879)

Die obige Definition präzisiert explizit die zu diskutierenden Axiome: Dies sind unsere Annahmen, Voraussetzungen, Arbeitshypothesen. Es sind keineswegs pauschale Behauptungen über die Wirklichkeit.

Wir werden damit einfache Modelle untersuchen und daran viel lernen. Aussagen über das Modell, unsere Annahmen und ihre Folgerungen, lassen sich manchmal in der Wirklichkeit wiederfinden, andermal nicht.

Müssen wir alles so genau nehmen? Ja, sicher!

Auf den ersten Blick scheint es vielen von Ihnen vermutlich übertrieben, dass ich in guter mathematischer Tradition mit einer Definition beginne und den Begriff der „Rationalität“ definiere, zumindest etwas präzisiere. Dies dient als hilfreiche Abkürzung und bequeme Zusammenfassung.

Ist das nicht ohnehin alles klar? Sind Definitionen nicht übertrieben? Ich denke, nein! Gerade der Begriff „Rationalität“ kann sehr verschieden aufgefasst werden, daher möchte ich hier klar und deutlich aussprechen, was ich darunter verstehen will, und wie Sie mich bitte verstehen sollen.

Natürlich können Sie zur Rationalität eine andere Auffassung vertreten, doch wir müssen jeweils eindeutig darlegen, was wir darunter verstehen. Das ist eine Frage guter Kommunikation. Andernfalls provozieren wir nur unnötige Missverständnisse, und unsere Diskussion dreht sich im Kreis.

Die mathematische Vorgehensweise der Spieltheorie ist daher gar nicht überraschend, sondern entspricht dem Vorbild anderer Wissenschaften: Wir wollen ganz konkrete Probleme lösen und Anwendungen verstehen, dazu müssen wir Begriffe klären und tragfähige Argumente entwickeln.

Modell und Wirklichkeit

Zur Illustration gebe ich einfache, konkrete **Anwendungsbeispiele**. Sie sind zwar extrem vereinfacht und etwas fiktiv, aber doch lehrreich: Sie zeigen ganz handfeste Konsequenzen von Ir/Rationalität, und dass wir uns mit dieser Problematik genauer auseinandersetzen müssen.

Das ist die Stärke und zugleich die Begrenzung **abstrakter Modelle**: Sie treffen einen Kern des Problems, sie sind einfach und übersichtlich und leicht zu verstehen, sie taugen wunderbar als erste Näherung. Sie dienen als Ausgangspunkt und Orientierung für Anwendungen.

Wir werden dieses bemerkenswerte Phänomen noch oft beobachten: Selbst einfache Spiele können den wahren Kern eines Konflikts treffen. Physiker sprechen hier traditionell nüchtern von der **ersten Näherung**, die bei Bedarf durch die zweite, dritte, ... Näherung verfeinert wird.

Das **Modell**, das wir von der **Realität** entwerfen, hilft und leitet uns, doch niemals sollten wir naiv das Modell für die Wirklichkeit halten. Von dieser ersten Näherung ausgehend können wir unser Modell je nach Bedarf verfeinern und konkreten Gegebenheiten anpassen.

Beispiel: ein Erbe teilen

Aufgabe: Alice und Bob erben $1\,000\,000$€. Das Testament verlangt: Alice nennt dem Notar eine Teilung, x für Bob und $1\,000\,000 - x$ für Alice. Zur Vereinfachung nehmen wir im Folgenden $x \in \{1, 2, \dots, 999\,999\}$ an. Dies kann Bob nun annehmen… oder ablehnen, dann verfällt das Erbe. Was wird passieren? rational? irrational? Ist das Ergebnis gerecht?

Lösung: $\mathscr{R}_0$: Jeder will seine Auszahlung maximieren. Diese Annahme ist grundlegend für unsere Analyse!

$\mathscr{R}_1$: Bob wird jeden Vorschlag $x > 0$ annehmen. Das ist vielleicht wenig, aber besser als nichts.

$\mathscr{R}_2$: Alice weiß dies und schlägt $x = 1$€ vor.

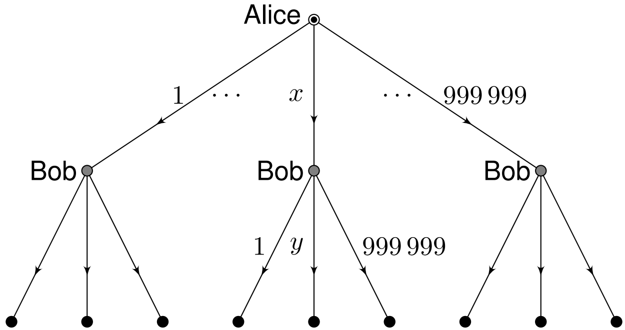
Dieses einfache Beispiel illustriert die Stufen der Rationalität. Alle Voraussetzungen sind tatsächlich nötig für unsere Analyse!

Wir werden später dynamische Spiele erklären und diese Lösung als (das einzige) teilspielperfekte Gleichgewicht wiedererkennen.

Übung: Sobald Sie die Techniken kennen, führen Sie dies aus!

Beispiel: ein Erbe teilen

Wir formalisieren folgende Variante: Alice fordert $x \in \{1, 2, \dots, 999\,999\}$. Anschließend fordert Bob $y \in \{1, 2, \dots, 999\,999\}$. Gilt $x + y \leq 1\,000\,000$, so tritt die Aufteilung (x, y) in Kraft, andernfalls verfällt das Erbe.



Hier ist die zeitliche Reihenfolge entscheidend: Alice macht ihr Angebot und kann nicht mehr zurück, Bob ist daher unter Zugzwang. Muss Bob zuerst fordern, so ist es umgekehrt. Als Variante ist auch gleichzeitige verdeckte Abgabe von Alice’ Angebot und Bobs Forderung denkbar.

Beispiel: ein Erbe teilen

⚠ Ohne Rationalität ist eine Analyse / Prognose nahezu unmöglich: $\mathscr{R}_0$: Wenn Alice oder Bob gar kein Geld haben will, oder andere Ziele verfolgt, dann können wir kaum vernünftige Vorhersagen machen.

$\mathscr{R}_1$: Wir gehen hier davon aus, dass Bob streng rational ist. „Wer den Euro nicht ehrt, ist das Erbe nicht wert." Ist das zwingend? Vielleicht hat Bob ein extremes Gerechtigkeitsempfinden und wird nur den Vorschlag $x = 500\,000$€ akzeptieren, nicht weniger, aber auch nicht mehr. Das ist irrational, aber möglich. Vielleicht hat Bob $850\,000$€ Schulden und wird von Mafiakillern verfolgt, dann würde er nur $x \ge 850\,000$€ akzeptieren.

$\mathscr{R}_2$: Wenn Alice an Bobs Rationalität zweifelt, dann sollte sie ihre Strategie anpassen. Zum Beispiel könnte Bob drohen: „Alles unter $300\,000$€ werde ich ablehnen." Aber ist diese Drohung glaubwürdig? Wird er das wirklich tun, wenn er vor der endgültigen Entscheidung steht? Wenn er rational ist, sicher nicht! Andernfalls vielleicht doch. . .

Alice muss also die Rationalität von Bob einschätzen. Das ist schwierig. Der Idealfall ist perfekte Rationalität, aber das ist nicht immer realistisch.

Beispiel: ein Erbe teilen

Ist das Ergebnis „fair“ oder „gerecht“? Nun ja, das kommt darauf an... Dies sind zunächst keine klar festgelegten Begriffe. Dazu müssten wir die Ziele „Fairness“ oder „Gerechtigkeit“ erst genauer definieren und dann anhand objektiver und nachvollziehbarer Kriterien prüfen.

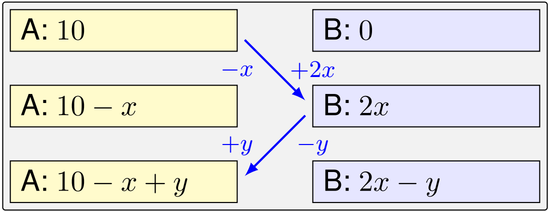
- Wenn das erklärte Ziel ist, das Erbe möglichst hälftig aufzuteilen, dann wird es durch das Testament denkbar schlecht implementiert.
- Wenn das Ziel nur ist, das Testament wortgetreu auszuführen, dann erfüllt das beschriebene rationale Verhalten genau dies.

Genauso gut hätte der Erblasser die Aufteilung $999\,999$€ für Alice und 1€ für Bob im Testament festlegen können. Ist diese Festlegung un/fair? Das Testament ist ungewöhnlich, aber nicht zwangsläufig un/gerecht; dazu müssten wir viel mehr Vorgeschichte und Kontext kennen.

Ist das Erbe ausgleichende Un/Gerechtigkeit für früheres Verhalten? Und was ist mit Chuck, der nicht erwähnt wurde und nichts bekommt? Vielleicht wäre es besser, das Erbe verfällt an wohltätige Zwecke... Vielleicht will der Erblasser Alice und Bob eine Lehre erteilen?

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

Zwei Spieler A und B interagieren anonym über eine Datenleitung.
Sie (er)kennen sich nicht und begegnen sich vermutlich nie wieder.



Zu Beginn erhält Spieler A ein Guthaben von 10€, Spieler B nur 0€.

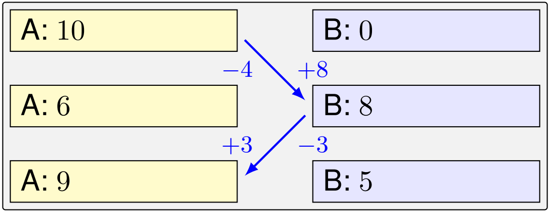
Erster Zug: A schickt an B einen frei gewählten Betrag $x \in \{0, 1, \dots, 10\}$.
Dieser Betrag x wird bei A abgebucht und bei B doppelt gutgeschrieben.

Zweiter Zug: B schickt an A davon einen Betrag $y \in \{0, 1, \dots, 2x\}$.
Dieser Betrag y wird bei B abgebucht und bei A gutgeschrieben.

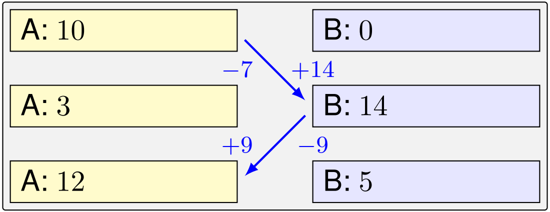
Damit endet das Spiel und jedem wird sein Kontostand ausbezahlt.
Es gelten nur diese einfachen Regeln, und sonst keine weiteren.

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

Beispiel 1: A schickt 4€, B schickt 3€ zurück. ☹ A macht Verlust.



Beispiel 2: A schickt 7€, B schickt 9€ zurück. ☺ Beide profitieren.



Beachte: Der zweite Zug ist ein Nullsummenspiel, der erste Zug nicht!

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

Das ist ein einfaches, aber typisches Modell wirtschaftlichen Handelns. Wir können die Interaktion als **Kredit und Rückzahlung** interpretieren: Spieler A verleiht einen Teil seines Geldes, Spieler B erwirtschaftet damit eine Verdopplung und zahlt zurück: Tilgung plus Zinsen? Allerdings gibt es keinen Vertrag und auch keine Strafen!

Ebenso können wir es als **Online-Handel** interpretieren: Spieler A geht in Vorleistung und verschickt die Ware, für Spieler B ist diese doppelt so nützlich / wertvoll, schließlich bezahlt B nach seinem eigenen Ermessen. **Pay what you want** wird genutzt bei Spenden, Trinkgeld, Straßenkunst, manchen Restaurants, Veranstaltung / Theater, Hofverkauf / Blumenfeld.

Zugegeben, dieses Modell ist noch allzu simpel und eher unrealistisch, insbesondere fehlen hier alle üblichen sozialen Kontrollmechanismen. Der Vorteil ist jedoch: Alle Regeln sind besonders klar und einfach. Wir können dieses Spiel vollständig analysieren und verstehen.

Das ist ein stark vereinfachtes Modell, sozusagen ein Laborexperiment. Wir blenden alles andere aus und untersuchen es unter dem Mikroskop.

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

In der Literatur heißt dies **Vertrauensspiel**, engl. *trust game*. Es wirkt zunächst etwas ungewöhnlich, begegnet uns aber im Alltag recht häufig, hier zum Beispiel in Stuttgart-Sonnenberg auf meinem Weg zur Uni:

Zweites Experiment: „Allmende“

Sie bekommen ein Startbudget von $10€$. Davon können Sie zwischen $0€$ und $10€$ in einen gemeinsamen Topf spenden. Jede Spende wird verdreifacht. Der gemeinsame Topf wird gleichmäßig aufgeteilt.

Einfache Beispiele zum interaktiven Ausprobieren:

(1) Angenommen, jeder spendet $0€$. Dann hat am Ende jeder $10€$.

(2) Angenommen, jeder spendet $10€$. Dann hat am Ende jeder $30€$.

(3) Angenommen, eine Hälfte spendet $0€$, die andere $10€$.
Dann bekommt jeder $15€$ aus dem gemeinsamen Topf; am Ende hat die eine Hälfte $10 + 15 = 25€$, die andere Hälfte $0 + 15 = 15€$.

Auch dieses Spiel haben wir für Sie als Online-Spiel implementiert. Wir spielen es im ersten Durchgang statisch, also jede:r für sich, im zweiten Durchgang dann dynamisch mit sofortiger Rückmeldung.

Das Restaurant-Paradox

Aufgabe: (0) Ein Ensemble von 20 Personen besucht ein Restaurant. Jede darf wählen: ein gutes Menu für 30€ oder ein exzellentes für 50€. Jede zahlt ihre eigene Rechnung und denkt: „10€ mehr wäre es mir wert, aber nicht 20€.“ Daher entscheidet sie sich für das Menu zu 30€.

(1) Das Ensemble beschließt *vor* dem Restaurant, eine gemeinsame Rechnung zu verlangen und alles durch 20 zu teilen. Was passiert?

Lösung: (1) Jede einzelne Person kostet ihr Upgrade nur noch 1€. Sie wählt also für sich das teurere Menu. Am Ende zahlt jede 50€.

Numbers written on restaurant checks within the confines of restaurants do not follow the same mathematical laws as numbers written on any other pieces of paper in any other parts of the Universe.
(Douglas Adams, 1952–2001, *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy*)

Ein **soziales Dilemma** liegt vor, wenn individuell rationales Verhalten ein suboptimales / ineffizientes Gesamtergebnis erzeugt, also die Akteure insgesamt schlechter dastehen als durch Absprache möglich wäre, etwa durch sozial kontrollierte Übereinkunft oder einen einklagbaren Vertrag.

Häufig ist ein **Vertrag** zu aufwändig oder schlicht gänzlich unmöglich. Zudem müssten Verstöße kontrolliert und sanktioniert werden können. Auch das liegt oft außerhalb der Reichweite der einzelnen Akteure; hierzu wird eine übergeordnete (z.B. staatliche) Struktur benötigt.

Solidarität versus Unvernunft. Gegenseitige Hilfe ist nicht nur eine urmenschliche Regung, sondern kann durchaus individuell rational sein, zum eigenen Vorteil, etwa bei Versicherungen oder Katastrophenhilfe. Meist geht dies über die spontane Hilfe im konkreten Einzelfall hinaus, dazu soll sie als verlässliche, allgemeine Zusicherung formuliert werden.

Bei **Fehlkonstruktion** kann Solidarität jedoch falsche Anreize setzen, im Extremfall fördert sie (global gesehen) unvernünftiges Verhalten: Tendenz zu unnötigen Risiken oder achtloser Verschwendung.

Soziales Dilemma

Der schottische Ökonom **Adam Smith** (1723–1790) prägte in seinem Hauptwerk *Der Wohlstand der Nationen* (1776) die vielzitierte Idee der „unsichtbaren Hand des Marktes“: Sie sorge dafür, so seine Hoffnung, dass individueller Egoismus automatisch zu kollektiver Wohlfahrt führe.

Bei einem **sozialen Dilemma** jedoch wirkt Egoismus genau umgekehrt: Individuell rationales Verhalten führt für alle zu einer Verschlechterung. Das widerlegt allzu naive Hoffnungen oder kühne Verallgemeinerungen: Die „unsichtbare Hand“ mag manchmal wirken, aber keineswegs immer.

Soziologen sprechen von **sozialen Fallen** oder **paradoxen Effekten**: Individuell rationales Verhalten kann zu irrationalen Ergebnissen führen. Naive Analysen verfallen häufig dem Irrtum, unvernünftige Ergebnisse auf unvernünftiges Handeln zurückzuführen. Das Gegenteil ist der Fall.

Das Ziel des **Mechanismendesign** (engl. *mechanism design*) ist die Schaffung eines Rahmens, der das gewünschte Verhalten ermöglicht. Die invidivuelle Entscheidungsfreiheit kann / soll / darf dabei nicht direkt eingeschränkt werden, allein der gemeinsame Rahmen wird gestaltet.

Aufgabe: Nennen, formalisieren und analysieren Sie weitere Beispiele, die ähnlich strukturiert sind und zu sozialen Dilemmata führen können: (1) zunächst auf lokaler Ebene, etwa in einer Wohngemeinschaft, (2) auf nationaler bzw. europäischer Ebene, (3) schließlich global. Welche Mechanismen wären jeweils denkbar, hilfreich, praktikabel? Das führt schnell zu aktuellen und brisanten politischen Fragen!

Skizze: Hier eine Auswahl möglicher Beispiele, die Liste ist endlos.

(1) Sollte eine WG einen gemeinsamen Getränkekühlschrank haben? Ist die WG-Regel „Jeder spült den Abwasch nach Bedarf“ sinnvoll? Wie bezahlt die WG Strom, Wasser, etc. bei gemeinsamem Zähler? Sollte der öffentliche Personennahverkehr (ÖPNV) gratis sein?

⚠ Solche Fragen werden meist nur qualitiativ-vage diskutiert. Wenn Sie dies genauer ausführen wollen, quantitativ als mathematisches Modell, so müssen Sie zuerst die zu Grunde gelegte Nutzenfunktion klären. Beim ÖPNV können zwar höhere Kosten entstehen, doch dafür die Umwelt geschont werden. Die genaue Zielfunktion ist entscheidend!

(2) Sollte das Studium (vollkommen oder weitgehend) gratis sein?
Sollten wir unsere Finanzämter mit mehr Personal ausstatten?
Wem nützt eine private Kranken- oder eine Bürgerversicherung?
Schafft die Währungsunion Anreize zu achtloser Haushaltsführung?
Gilt dies ebenso für den innerdeutschen Länderfinanzausgleich?

(3) Wie können wir den menschengemachten Klimawandel bremsen?
Wie kann bzw. sollte Emissionsrechtehandel institutionalisiert werden?
Wie können wir Rodung und Abholzung der Urwälder verhindern?
Wie können wir die Überfischung der Weltmeere verhindern?
Wie können wir die Ressourcen der Menschheit schützen?

⚠ Damit zielen wir auf aktuelle, zentrale Probleme der Menschheit.
Eine mathematische Analyse scheint möglich, etwa durch Entwicklung geeigneter Mechanismen, eine praktikable Lösung ist hingegen schwer.
Es genügt leider nicht, eine vernünftige Lösung auszuklügeln, sie muss auch akzeptiert und umgesetzt werden. Gute Ideen scheitern leider oft.
Das von allen gemeinsam gewünschte Ziel wird dem Egoismus geopfert.

Die Tragik des Gemeinguts / *tragedy of the commons*

Nach obigem Muster funktionieren viele soziale **Konfliktsituationen** wie Schwarzfahren, Versicherungs-/Sozialbetrug, Steuerhinterziehung.

Der individuelle Nutzen ist klein, der allgemeine Schaden ist groß, doch durch die große Zahl der Betroffenen wird der Schaden verteilt und dem einzelnen nur zu einem kleinen Bruchteil in Rechnung gestellt.

Das zynische Motto: **Gewinne privatisieren, Verluste sozialisieren.** Das ist insbesondere bei Bankenkrisen und -rettungen hochaktuell. Auch die wiederkehrenden Eurokrisen folgen einer ähnlichen Struktur.

Die **Politik der hohen Schornsteine** verteilt Abgase möglichst weit, die Emissionen insgesamt werden jedoch nicht reduziert, im Gegenteil! Jeder Akteur zielt nicht auf das Gesamtergebnis, sondern seinen Vorteil.

Dagegen scheint kein Kraut gewachsen, oft versagen die Mechanismen der sozialen Kontrolle, Religion, Moral, Ethik. Genau hierzu formulierte Immanuel Kant in seiner Ethik den **kategorischen Imperativ**:
„Handle nur nach derjenigen Maxime, durch die du zugleich wollen kannst, dass sie ein allgemeines Gesetz werde.“

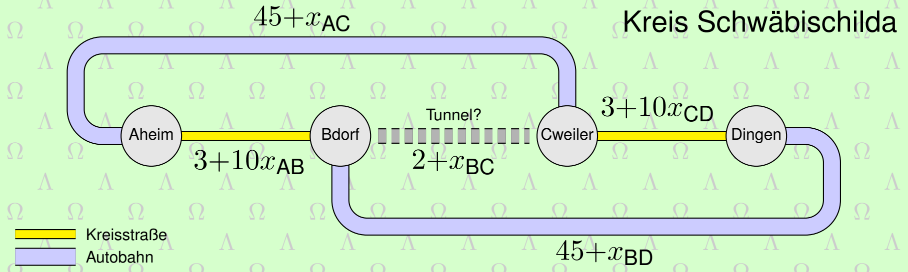
Das Problem heißt **Tragik der Allmende** [*tragedy of the commons*]. Eine *Allmende* ist gemeinschaftlich genutztes Eigentum, zum Beispiel landwirtschaftliche Nutzfläche oder Weidefläche. Allmenden sind heute noch beispielsweise im Schwarzwald und im Alpenraum verbreitet.

Commoners sind Bauern oder Hirten, die gemeinsam Kroneigentum als Allmende bewirtschaften. Der Begriff *tragedy of the commons* wurde 1833 geprägt vom Ökonomen William Forster Lloyd (1794–1852) und 1968 vom Ökologen Garrett Hardin (1915–2003) in *Science* ausgeführt.

Akute Beispiele für die **Ausbeutung natürlicher Ressourcen** sind: Überfischung der Weltmeere, Raubbau an Regenwäldern, Plünderung von Wildtierbeständen, Verschmutzung der Atmosphäre, anthropogene Klimaveränderung. Gemeines Muster: Individueller kurzfristiger Vorteil (Gier) schlägt gemeinsamen langfristigen Nutzen (Nachhaltigkeit).

Die **Spieltheorie** kann solche Mechanismen zunächst nur *erklären*, immerhin. Voraussetzung ist eine ehrliche, kritische, detaillierte Analyse. Die Menschheit wird beweisen müssen, ob sie diesen unvermeidlichen Konflikten gewachsen ist und rechtzeitig wirksame *Lösungen* findet.

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess



Täglich pendeln 6000 Autofahrer von Aheim nach Dingen, entweder über Bdorf (ABD) oder über Cweiler (ACD). Angegeben sind die Fahrzeiten in Minuten, wobei $x_{ij} \in [0, 6]$ jeweils die Autozahl in Tausend ist. **Aufgabe:**

(0) Erklären Sie dies explizit als strategisches Spiel mit 6000 Spielern.
(1) Finden Sie alle Gleichgewichte: Welcher Verkehrsfluss stellt sich ein?
Lösung: Aufteilung $3000 : 3000$, Fahrzeit jeweils 81 Minuten.

(2) Zur Verkürzung der Fahrzeit plant der Landkreis einen Autobahntunnel von Bdorf nach Cweiler. Hilft das oder nicht? Rechnen Sie es aus!
Lösung: Aufteilung $2000 : 2000 : 2000$, Fahrzeit jeweils 90 Minuten!

Oft hört man pauschal: „Mehr Straßen garantieren schneller ankommen.“ Das kann helfen, aber keineswegs immer: „Zusätzliche Straßen können Staus verstärken.“ Auch das hört man so pauschal. Schauen wir hin!

Unser Beispiel ist zugegeben konstruiert, dafür ist es besonders einfach. Es soll zunächst illustrieren, dass das Phänomen wirklich möglich ist. Echte Problemfälle muss man wesentlich genauer untersuchen.

Die Zahlen sind so angelegt, dass wir die Lösungen leicht überblicken: In beiden Fällen teilen sich die Verkehrsströme jeweils in gleiche Teile.

Unglaublich: Der Tunnel erhöht die Fahrzeit von 81 auf 90 Minuten! Ohne Absprache gibt es kein Zurück: Nur wenn sich genügend Fahrer für die beiden alten Strecken ABD und ACD entschließen, verringert sich der Stau auf den Landstraßen, und alle sind insgesamt schneller.

Könnten die Pendler nicht ihren alten Strecken folgen und den Tunnel ignorieren? Sicher, doch jeden lockt die Abkürzung mit 68 Minuten. Das Verrückte ist: Jeder einzelne handelt rational! So stellt sich ein neues Gleichgewicht ein, das paradoxerweise für alle schlechter ist.

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess

Lösung: (0) Spielermenge sei $I = \{1, 2, \dots, 6000\}$. Die Strategiemenge für Fahrer $i \in I$ ist $S_i = \{\mathsf{ABD}, \mathsf{ACD}\}$ bzw. mit Tunnel $S_i' = S_i \cup \{\mathsf{ABCD}\}$. Die Verkehrszählung (in Tsd) ergibt $x_{\mathsf{AC}}, x_{\mathsf{BD}}, x_{\mathsf{BC}}, x_{\mathsf{AB}}, x_{\mathsf{CD}} : S \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}
x_{\mathsf{AC}}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i = \mathsf{ACD} \,\} &&= x_1 \\
x_{\mathsf{BD}}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i = \mathsf{ABD} \,\} &&= x_2 \\
x_{\mathsf{BC}}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i = \mathsf{ABCD} \,\} &&= x_3 \\
x_{\mathsf{AB}}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i \in \{\mathsf{ABD}, \mathsf{ABCD}\} \,\} &&= x_2 + x_3 \\
x_{\mathsf{CD}}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i \in \{\mathsf{ACD}, \mathsf{ABCD}\} \,\} &&= x_1 + x_3
\end{aligned}$$

Hieraus berechnen wie die Fahrzeiten, und diese sind zu minimieren:

$$-u_i : S \to \mathbb{R} : s \mapsto \begin{cases} 48 + x_{\mathsf{AC}}(s) + 10 x_{\mathsf{CD}}(s) & \text{für } s_i = \mathsf{ACD}, \\ 48 + 10 x_{\mathsf{AB}}(s) + x_{\mathsf{BD}}(s) & \text{für } s_i = \mathsf{ABD}, \\ 8 + 10 x_{\mathsf{AB}}(s) + x_{\mathsf{BC}}(s) + 10 x_{\mathsf{CD}}(s) & \text{für } s_i = \mathsf{ABCD}. \end{cases}$$

☹ Die Strategiemenge $S = S_1 \times \dots \times S_{6000}$ ist astronomisch groß!

☺ Das Spiel u ist spieler-symmetrisch: $\mathrm{Sym}(u) = \mathrm{Sym}(I)$. Statt des Strategievektors $s \in S$ genügen uns die Häufigkeiten der Strategien!

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess

(1) Angenommen, x_1 Tsd wählen ACD, x_2 Tsd wählen ABD.

$$x_1 + x_2 = 6, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$
$$z_1(x_1, x_2) = \big[45 + x_1\big] + \big[3 + 10x_1\big]$$
$$z_2(x_1, x_2) = \big[3 + 10x_2\big] + \big[45 + x_2\big]$$

Gleichgewicht herrscht für $z_1 = z_2$, also $x_1 = x_2 = 3$ (LGS, Symmetrie). In der Ausgangssituation ist die Fahrzeit somit $z_1 = z_2 = 81$ Minuten.

(2) Angenommen, x_3 Tsd fahren ABCD durch den neu eröffneten Tunnel.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$
$$z_1(x_1, x_2, x_3) = \big[45 + x_1\big] + \big[3 + 10(x_1 + x_3)\big]$$
$$z_2(x_1, x_2, x_3) = \big[3 + 10(x_2 + x_3)\big] + \big[45 + x_2\big]$$
$$z_3(x_1, x_2, x_3) = \big[3 + 10(x_2 + x_3)\big] + \big[2 + x_3\big] + \big[3 + 10(x_1 + x_3)\big]$$

Gleichgewicht herrscht für $z_1 = z_2 = z_3$, also $x_1 = x_2 = x_3 = 2$ (LGS). Mit Tunnel erhöht sich die Fahrzeit auf $z_1 = z_2 = z_3 = 90$ Minuten!

☺ Spieler-Symmetrie hilft! Die Nash–Gleichgewichte sind strikt! Zur Vereinfachung betrachten wir x_i als kontinuierlich (*non-atomic*).

Das erstaunliche Ergebnis wird als **Braess–Paradox** bezeichnet: Eine zusätzliche Handlungsoption kann die Situation für alle verschlechtern. Es wurde 1968 von dem Mathematiker Dietrich Braess veröffentlicht: *Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung*, Unternehmensforschung Operations Research 12 (1968), 258–268, online verfügbar unter `homepage.ruhr-uni-bochum.de/Dietrich.Braess/paradox.pdf`.

Die Rechnung illustriert wunderbar die Idee des Nash–Gleichgewichts! Die Definition ist einfach, aber die Interpretation bedarf einiger Übung und zahlreicher Beispiele, darunter auch solch verblüffende Paradoxien. Die genaue Analyse löst dieses Scheinparadox allerdings schnell auf. Bei genauerem Hinsehen ähnelt auch dies dem Gefangenendilemma.

Ist es nur eine psychologische Falle? Eine Charakterschwäche im Sinne von Gier schlägt Geist? Nicht nur, jeder einzelne handelt, wie gesagt, vollkommen rational. Dabei optimieren alle Teilnehmer rein individuell. Die vertrackte Situation provoziert dieses Verhalten, es ist das Resultat individueller Optimierung ohne bindende Absprache oder Koordinierung.

Es gibt **physikalische Entsprechungen** mit Federn in der Mechanik oder elektrischen Strömen in einer Schaltung, siehe Cohen, Horowitz: *Paradoxical behaviour of mechanical and electrical networks*, Nature 352 (1991), 699–701, online `www.nature.com/articles/352699a0`.

Das Phänomen ist also kein psychologischer Taschenspielertrick. Kommt das Paradox auch in realen Verkehrssituationen vor? Ja!

Die Süddeutsche Zeitung schreibt in ihrer Ausgabe vom 19. Mai 2010: „So waren die Verkehrsplaner in Stuttgart 1969 überrascht, als nach großen Investitionen ins Straßennetz rund um den Schlossplatz der Verkehrsfluss ins Stocken kam. Die Situation besserte sich erst, nachdem ein Teil der Königsstraße zur Fußgängerzone erklärt wurde.“

Weitere solche Beispiele werden aus New York und Seoul berichtet; das Problem sei unter Experten inzwischen hinlänglich bekannt, so heißt es. Straßenplaner nutzen geeignete Messdaten und Simulationssoftware zur Optimierung, insbesondere zur frühzeitigen Erkennung und Vermeidung paradoxer Verkehrsflüsse. Mathematik wirkt!

Aufgabe: Entwickeln Sie ein Verkehrsleitsystem, das jedem Fahrer am Ortsausgang von Aheim und Bdorf zufällig eine Route zuweist, sodass die erwartete Fahrzeit für alle gleich ist. Welches Minimum können Sie so erreichen? Hierzu braucht es eine unabhängige Instanz! Muss dieses System Strafen androhen? Erreicht es ein korreliertes Gleichgewicht?

Mehr Straßen erhöhen automatisch den Verkehrsfluss? Nicht immer! Die Planung vor dem Straßenbau ist wichtig, wie oben gesehen, und manchmal erfordert optimaler Betrieb eine aktive zentrale Steuerung

Ähnlich drastisches Beispiel: In manchen Städten ignorieren Fahrer die Ampeln, um sich „eben noch schnell“ über die Kreuzung zu schummeln. In der Rushhour führt dies zum katastrophalen Gegenteil: Stau!

Das kann übrigens auch für Geschwindigkeitsbeschränkungen gelten: Individuelle Disziplin kann allseitigen Nutzen erzeugen. So weit, so klar. Das ist allerdings unpopulär und schwer zu vermitteln: Preis der Freiheit.

Freie Fahrt für freie Bürger! forderte der ADAC 1974 zu Zeiten der Ölpreiskrise, und später die Leipziger Montagsdemonstration 1989.

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess

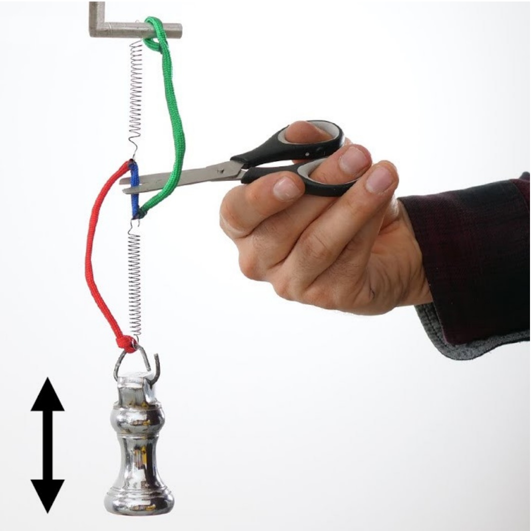
Die **Verkehrsströmungslehre** (engl. *traffic flow theory and control*) ist ein ausgedehntes Gebiet und alltäglich nahezu überall relevant.

Je nach Trägersystem (Straße, Bahn, Flugzeug, etc) nutzt sie spezielle mathematische Modelle und Methoden: Optimierung (kombinatorisch, numerisch, Simulation) und Stochastik (Warteschlangentheorie) und schließlich Spieltheorie (individuell vs zentral gesteuert).

Den Straßenverkehr kann man dabei kontinuierlich modellieren analog zur Fluiddynamik mit Differentialgleichungen, oder auch mit zellulären Automaten wie im Nagel–Schreckenberg–(NaSch–)Modell, siehe `de.wikipedia.org/wiki/Nagel-Schreckenberg-Modell`.

Seit den 1990er Jahren entwickeln sich spieltheoretische Ansätze zu Psychologie und Rationalität, ökonomischen Anreizen, usw. Die Computersimulation wird ergänzt durch Experimente mit menschlichen Teilnehmern wie in der experimentellen Ökonomik. Einen Querschnitt zeigt der Symposiumsband von Schreckenberg, Selten: *Human Behaviour and Traffic Networks*, Springer 2004. Aktuell stellen Elektromobilität und ÖPNV neue Herausforderungen.

Paradoxe Systeme in der Physik



Steve Mould: *The Spring Paradox*, `youtu.be/Cg73j3QYRJc`
Up and Atom: *Braess's Paradox*, `youtu.be/cALezV_Fwi0`

Paradoxe Systeme in der Physik

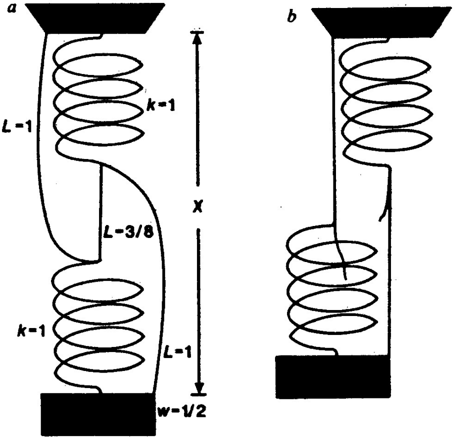


FIG. 1 Mechanical network. Springs have zero unstretched length and spring constant $k=1$. Strings are inelastic. The string that links the two springs has length $\frac{3}{8}$ m. Both safety strings have length 1 m. The weight exerts a force of $\frac{1}{2}$ N. *a*, In the initial network, both safety strings are limp, and the distance X from support to weight is $1\frac{3}{8}$ m. *b*, After the linking string is cut, the weight is higher at equilibrium; the new distance from support to weight is $1\frac{1}{4}$ m.

Nature 352 (1991), 699–701, `www.nature.com/articles/352699a0`

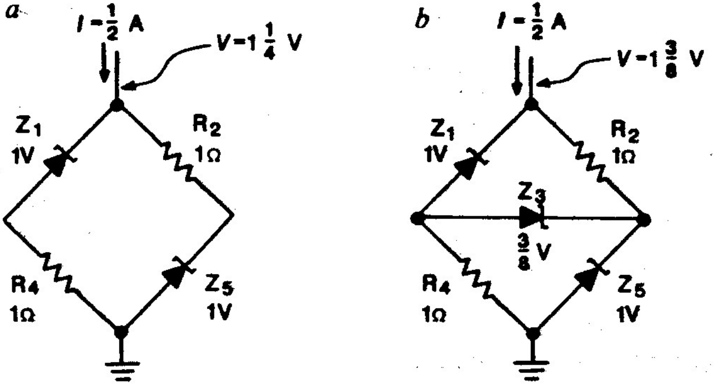


FIG. 3 Electrical network of ideal components. *a*, Initially, current flows symmetrically through left and right branches, and the voltage drop from source to ground is $1\frac{1}{4}$ V. *b*, When a $\frac{3}{8}$-V Zener diode is introduced across the network, the current through the 1-V Zener diodes drops to zero and all current flows through the 1-Ω resistors and the $\frac{3}{8}$-V Zener diode, producing a larger voltage drop from source to ground of $1\frac{3}{8}$ V.

Nature 352 (1991), 699–701, `www.nature.com/articles/352699a0`

Aufgabe: Führen Sie das oben skizzierte mechanische System aus und rechnen Sie das behauptete paradoxe Verhalten sorgfältig nach! Wenn Sie es praktisch-konkret mögen, können Sie es sogar bauen.

Projekt: Wie können Sie dies für Wasser realisieren? oder Wärme? Lässt sich dies ebenso einfach im Experiment demonstrieren?

Projekt: Er/Finden Sie (potentiell) paradoxe Systeme in Ihrem Alltag:

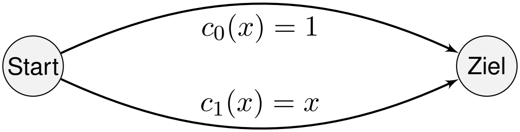
- Nutzung von Aufzügen und Treppen: Warteschlangen?
- In der Mensa: Essensausgabe? Geschirrrückgabe?
- Anmeldung zu Übungsgruppen, Seminaren, etc.

Vermutlich müssen Sie hier geeignete Annahmen / Parameter wählen. Selbst wenn die so konstruierten Beispiele etwas unrealistisch anmuten, so illustrieren sie doch immerhin die Möglichkeit paradoxen Verhaltens.

Pigous Beispiel: schockierend einfach

⚠ *Selfish behavior need not produce a socially optimal outcome.*

Extremes Beispiel von A. C. Pigou, *The Economics of Welfare*, 1920:



Zwei Routen stehen zur Verfügung: Auf der oberen ist die Fahrzeit immer 1 Stunde, auf der unteren x Stunden bei Auslastung $x \in [0, 1]$.

Aufgabe: Was ist das Gleichgewicht bei (1) individueller Optimierung vs (2) zentraler Optimierung durch ein verbindliches Verkehrsleitsystem?

Lösung: (1) Alle wählen den unteren Weg, die Fahrzeit ist 1 Stunde.
(2) Jeweils die Hälfte wird (zufällig) nach oben oder unten geleitet.
Niemand ist schlechter dran als in (1). Die Hälfte der Fahrer benötigt nur noch $^1/_2$ Stunde. Die mittlere Fahrzeit sinkt von 1 auf $^3/_4$ Stunde!

Pigous Beispiel: schockierend einfach

Erfahrungsgemäß akzeptieren Autofahrer:innen nur widerwillig etwaige Eingriffe in ihre Entscheidungsfreiheit, siehe *Freie Fahrt für freie Bürger!* Dennoch kann eine zentrale Koordinierung – mit bindender Wirkung! – die Effizienz für alle steigern, in günstigen Fällen wie oben skizziert.

Solche Fragen stellen sich zum Beispiel auch in digitalen Netzwerken: Datenpakete werden von ihrem Start zum gewünschten Ziel geleitet, und auch hier entstehen Kosten und Wartezeiten. Die Koordination kann zentral organisiert werden, oder aber den Akteuren überlassen werden.

Somit erweisen sich diese paradoxen Beispiele nicht als exotisch, wie es zunächst scheinen mag, sondern eröffnen ein faszinierendes Thema. Sowohl auf unseren „Datenautobahnen“ als auch auf realen Straßen lohnt es, effiziente Mechanismen zu suchen und zu implementieren.

Zum Vergleich und als Kontrast: In der klassischen Logistik transportiert ein Unternehmen die Waren und optimiert dazu zentral alle Abläufe. Das ist bereits eine hohe (mathematische) Kunst. Durch dezentral und egoistisch handelnde Akteure entstehen völlig neue Herausforderungen!

Wie hoch ist der Preis der Anarchie?

Im obigen Braess–Beispiel wächst die Fahrzeit von 81 auf 90 Minuten, im viel einfacheren Pigou–Beispiel von $3/4$ auf 1 Stunde. Gibt es noch schlimmere Beispiele? Wie groß kann die Ineffizienz maximal werden?

Gefragt und beantwortet wurde dies von T. Roughgarden, E. Tardos: *How bad is selfish routing?* Journal of the ACM 49 (2002) 236-259.

Satz 2A: Preis der Anarchie, Roughgarden–Tardos 2002

Gegeben sei ein Straßennetz. Die Fahrzeit für jede einzelne Strecke e sei affin-linear, also von der Form $c_e(x) = a_e + b_e x_e$ bei Auslastung x_e.

Sei C^* die Fahrzeit bei kollektiver Optimierung und C die Fahrzeit bei individueller Optimierung. Dann gilt die Schranke $C/C^* \leq 4/3$.

Bestenfalls gibt es keine Diskrepanz, schlimmstensfalls führt Egoismus zu 33% Ineffizienz. Diese Schranke hängt von den Kostenfunktionen ab, siehe *Routing Games*, Kapitel 18 in *Algorithmic Game Theory*, CUP 2007; online frei zugänglich unter `www.timroughgarden.org`.

Wie hoch ist der Preis der Anarchie?

Es ist erstaunlich, dass es hier eine universelle Schranke gibt! Ebenso erstaunlich ist es, dass dies nahezu einhundert Jahre lang niemandem aufgefallen ist, ja dass nicht einmal die Frage gestellt wurde. Dementsprechend hat das Ergebnis eines neues Gebiet eröffnet.

Individuelles versus zentrales Routing ist ein aktuelles Forschungsthema in der Schnittmenge zwischen Spieltheorie und Algorithmik. Zu diesem Themenkomplex gibt es ein unterhaltsam-informatives Interview mit Tim Roughgarden, `youtu.be/w7ddIRFfqM` (80min).

Among many recognitions, Tim has received the Gödel Prize for his research in computational game theory, a field that resides in the intersection of two disciplines: economics and computer science. We talk to Tim about one of the central insights of that work: the Prize of Anarchy, which quantifies the loss in efficiency of a system due to selfish behaviour of its agents.

Fazit: Was ist und was soll die Spieltheorie?

Spieltheorie versucht, strategisches / ökonomisches / menschliches Verhalten zu beschreiben, zu erklären, vorherzusagen, zu optimieren.
☺ Sie bietet eine Sprache zur Beschreibung von Konflikten
☺ und umfangreiche Werkzeuge zur ihrer Analyse.

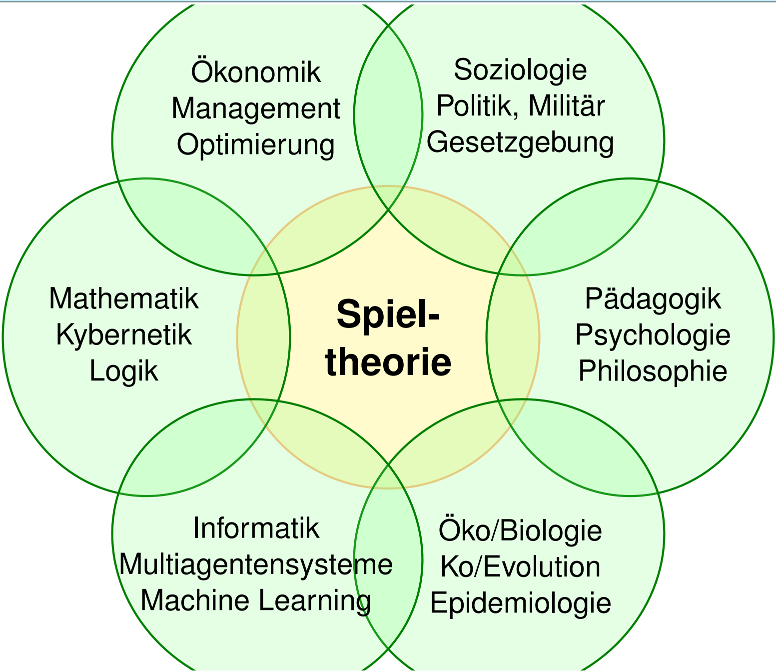
Rationales Verhalten können wir berechnen, menschliches beobachten.
☺ In günstigen Fällen können wir reales Verhalten rational erklären.
☹ Meist weichen Beobachtung & Experiment von der Theorie ab.
Unbeschränkte Rationalität ist selten, Komplexität (über)fordert.

Mechanismen: Regeln gestalten, Verhalten fördern, Ziele erreichen.
Erziehung, Hoch/Schule, Gesellschaft, Wirtschaft, Gesetzgebung, etc.

To be literate in the modern age, you need to have
a general understanding of game theory.
(Paul Samuelson, 1915–2009, Nobelpreis 1970)

Wer nutzt Spieltheorie?

Wer nur einen Hammer hat, sieht überall Nägel.



Wer Spieltheorie versteht, erkennt überall Spiele.