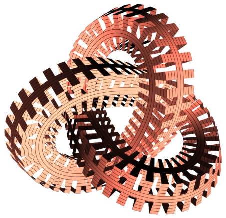
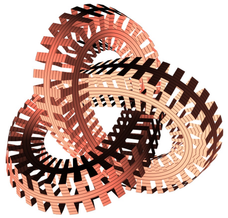
Knoten und Zöpfe



Michael Eisermann

22. September 2012

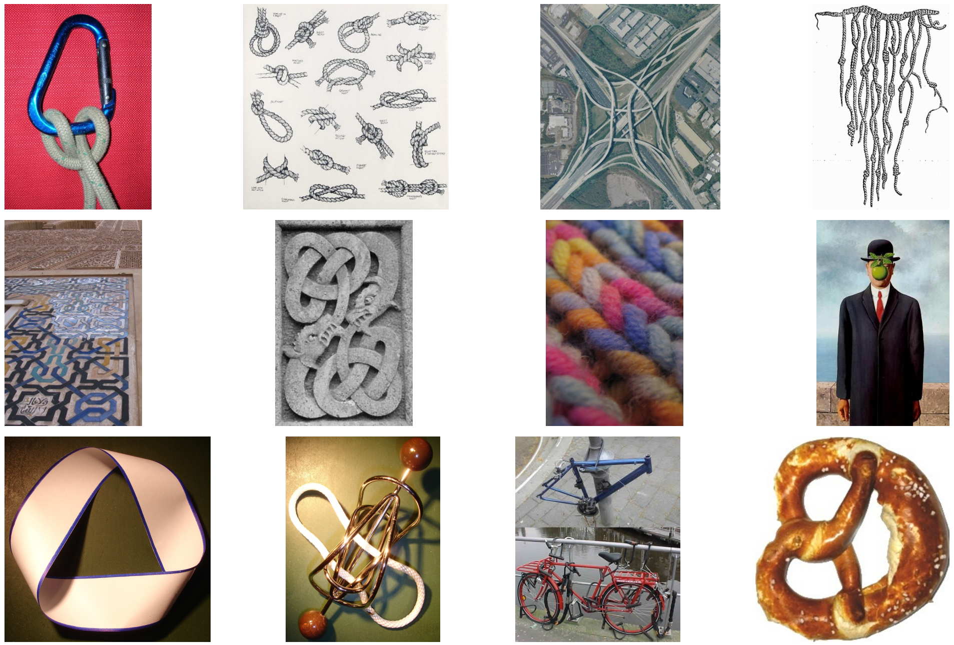


Mathetag für Schüler an der Universität Stuttgart

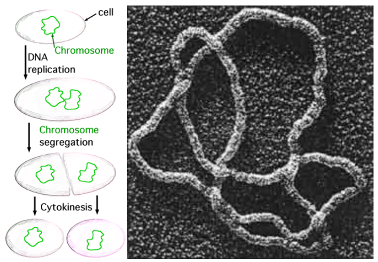
www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/popularisation/#Mathetag2012

Überblick

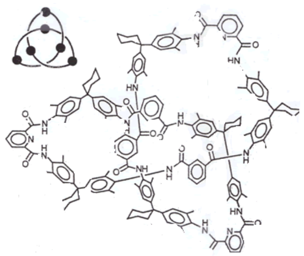
Knoten sind überall in unserer 3-dimensionalen Welt



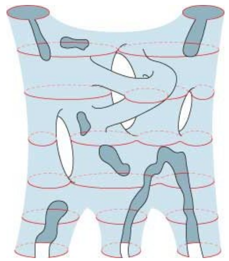
Knoten finden sich auch in den Naturwissenschaften



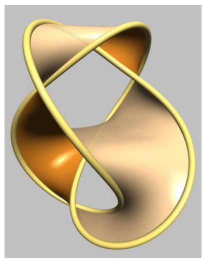
(a) Biologie



(b) Chemie



(c) theoretische Physik



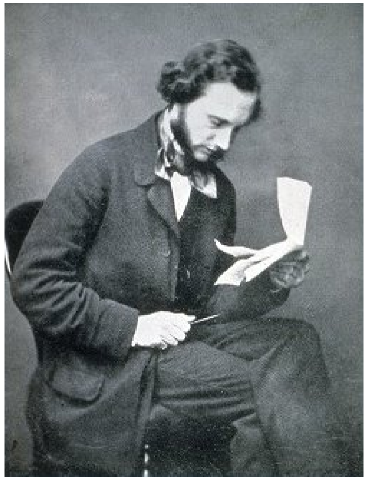
(d) Mathematik

Vorläufer im 19. Jahrhundert

Carl Friedrich Gauß
(1777-1855)

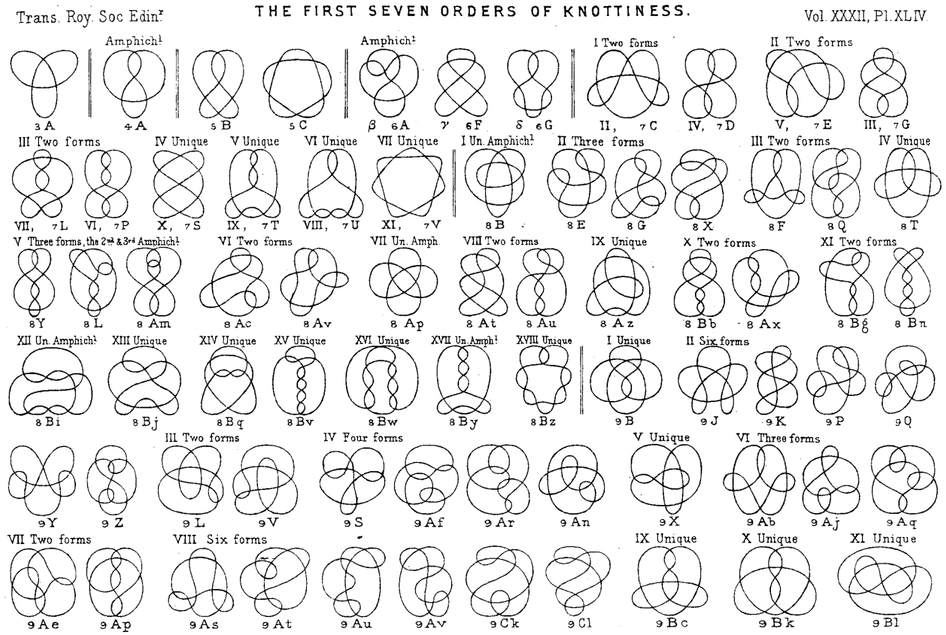
deutscher Mathematiker, Physiker, Astronom, Professor in Göttingen

William Thomson, Lord Kelvin
(1824-1907)

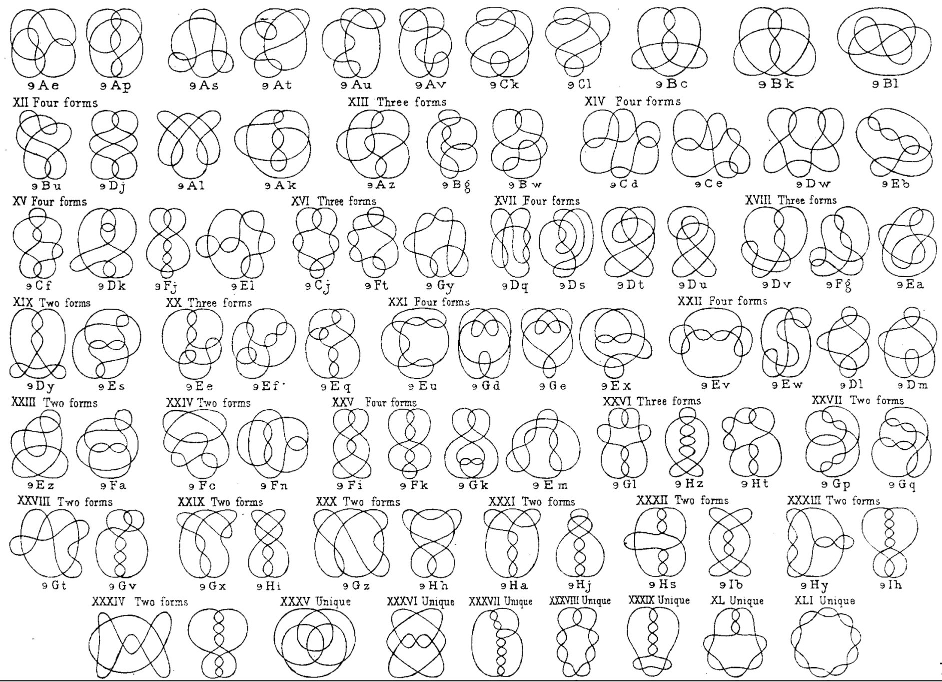


englischer Physiker und Ingenieur, Professor in Glasgow

Knotentabellen von Tait–Little–Kirkman, 1870–1890



Knotentabellen von Tait–Little–Kirkman, 1870–1890



Erstes Experiment: Spin und Dirac–Zöpfe

Lässt sich der folgende Zopf entwirren?

eine volle Drehung

Lässt sich der folgende „doppelt so komplizierte“ Zopf entwirren?

zwei volle Drehungen

Fragen präzisieren und passende Werkzeuge erstellen:

- Was ist ein Zopf? Welche Bewegungen sind erlaubt?
- Was ist ein Dirac–Zopf? Welche Bewegungen sind erlaubt?
- Welche Hindernisse gibt es bei möglichen Umformungen?

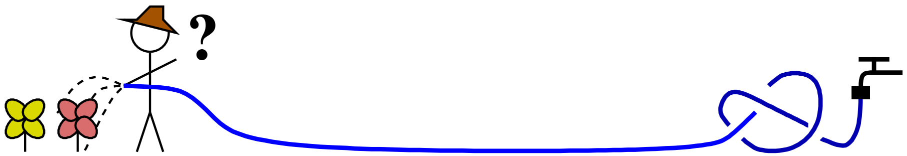
Zweites Experiment: Topologische Jonglage

Kann man ein Seil verknoten
mit nur einer Hand?

Kann man ein Seil
ebenso entknoten?

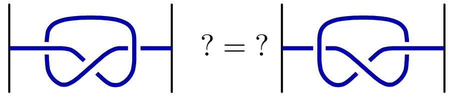
Fragen präzisieren und passende Werkzeuge erstellen:

- Was ist ein Knoten? Welche Bewegungen sind erlaubt?
- Wie kann man Knoten miteinander verknüpfen?
- Gibt es inverse Knoten, sozusagen „Anti-Knoten“?

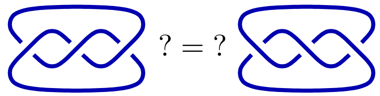


Drittes Experiment: Chiralität

Ist die Kleeblattschlinge äquivalent zu ihrem Spiegelbild?

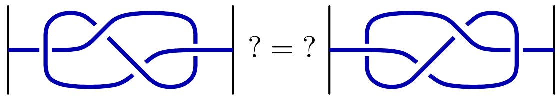


die Kleeblattschlinge ihr Spiegelbild

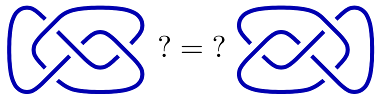


geschlossen Spiegelbild

Ist der Achterknoten äquivalent zu seinem Spiegelbild?

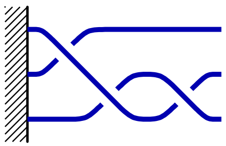


der Achterknoten sein Spiegelbild

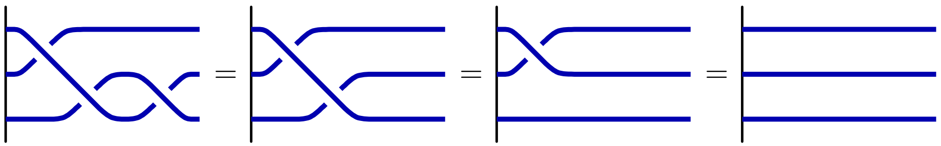


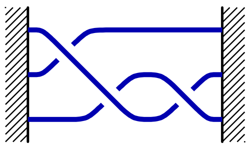
geschlossen Spiegelbild

Wie modelliert man Zöpfe?

Erstes Modell:  Die Stränge sind flexibel, sie dürfen sich bewegen.

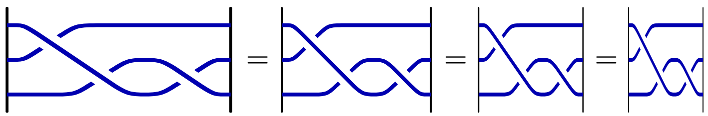
Schlechte Nachricht: In diesem ersten Modell sind alle Zöpfe gleich.

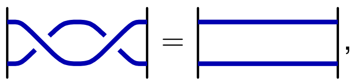


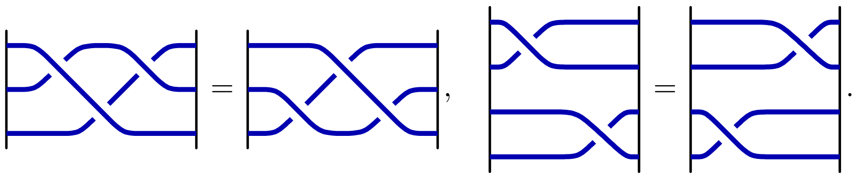
Besseres Modell:  Wir fixieren die Enden links und rechts. Nur in der Mitte dürfen sich die Stränge bewegen.

Wie modelliert man Zöpfe?

Die Länge ist unwesentlich:



Elementare Bewegungen: 

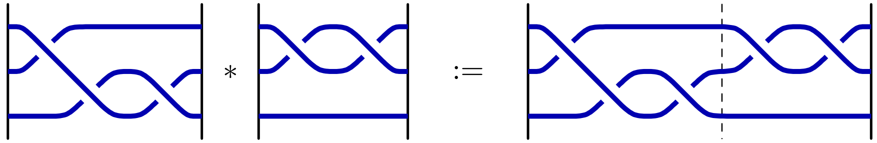


Satz (Emil Artin 1925)

Diese Bewegungen reichen bereits aus.

Wir können Zöpfe verknüpfen!

Zöpfe auf n Strängen erlauben eine Verknüpfung:

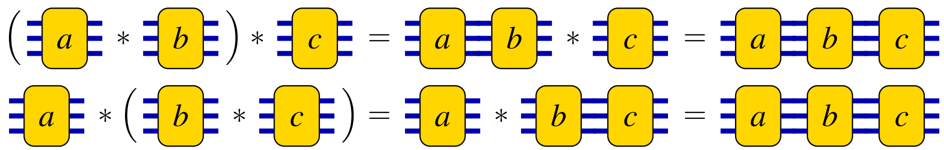


Welche Rechenregeln gelten hier?

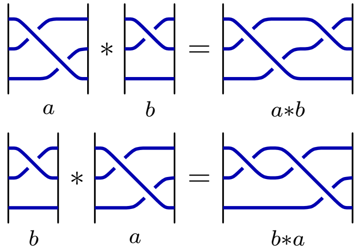
1. Ist diese Verknüpfung assoziativ?
$$(a * b) * c = a * (b * c)$$
2. Ist diese Verknüpfung kommutativ?
$$a * b = b * a$$
3. Gibt es ein neutrales Element?
$$a * 1 = a \quad \text{und} \quad 1 * a = a$$
4. Gibt es zu jedem Zopf einen inversen Zopf?
$$a * a^{-1} = 1 \quad \text{und} \quad a^{-1} * a = 1$$

Die Verknüpfung von Zöpfen

Ist sie assoziativ? Ja!

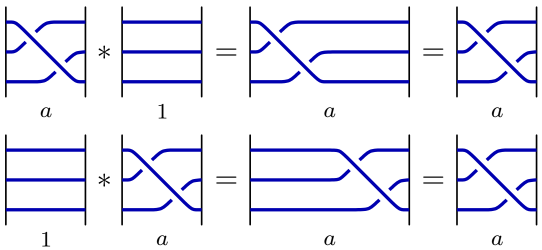


Ist sie kommutativ? Nein!

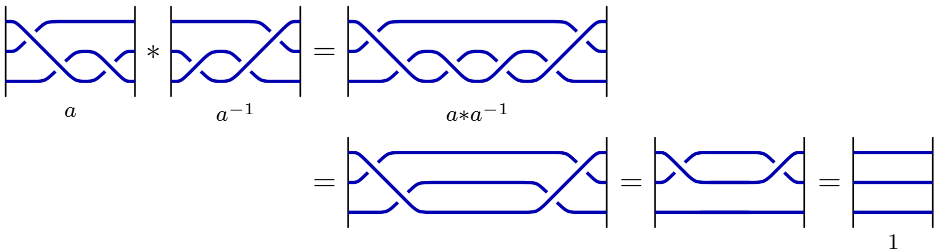


Die Verknüpfung von Zöpfen

Gibt es ein neutrales Element? Ja!



Gibt es zu jedem Zopf einen inversen Zopf? Ja!



Die Verknüpfung von Zöpfen: Zusammenfassung

Wir können mit Zöpfen rechnen wie mit Zahlen!

- Die Verknüpfung von Zöpfen ist assoziativ:
$$(a * b) * c = a * (b * c)$$
- Es gibt ein neutrales Element 1, nämlich den trivialen Zopf:
$$a * 1 = 1 * a = a$$
- Zu jedem Zopf a gibt es einen inversen Zopf a^{-1}, sein Spiegelbild:
$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$$

Definition

Eine Verknüpfung mit diesen Eigenschaften heißt *Gruppe*.

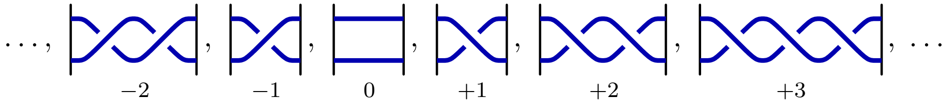
Satz (Emil Artin 1925)

Die Verknüpfung von Zöpfen auf n Strängen ist eine Gruppe, $(B_n, *)$.

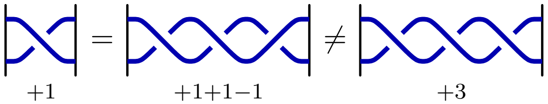
Wie kann man diese Gruppen verstehen?

$n = 1$: Auf nur einem Strang ist jeder Zopf trivial: 

$n = 2$: Zöpfe auf zwei Strängen verstehen wir auch noch gut:



Die Anzahl der Kreuzungen kann sich bei Bewegung ändern.

Beispiel: 

Was zählt ist der Drall $v\colon (\mathbf{B}_2, *) \to (\mathbb{Z}, +)$.

$$v(\ ) = +1, \qquad v(\ ) = -1, \qquad v(a * b) = v(a) + v(b).$$

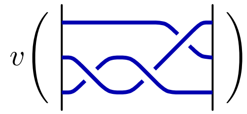
Korollar (Folgerung aus dem Satz von Artin)

Zöpfe auf zwei Strängen werden durch ihren Drall klassifiziert.

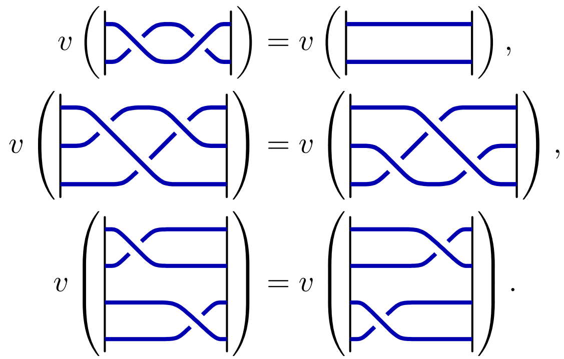
Der Drall ist eine Invariante

Der Drall ist eine Abbildung $v\colon (\mathbf{B}_n, *) \to (\mathbb{Z}, +)$ mit

$$v(\ ) = +1, \qquad v(\ ) = -1, \qquad v(a * b) = v(a) + v(b).$$

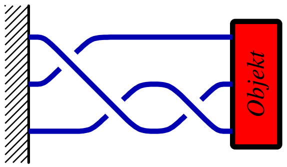
Zum Beispiel gilt  $= +1 + 1 - 1 = 1$

Nachweis der Invarianz:

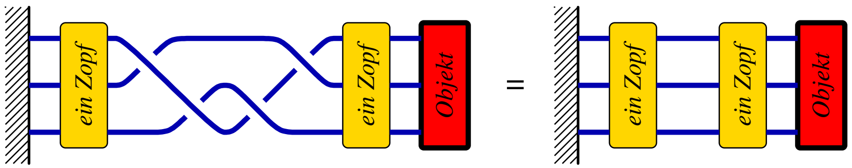


Dirac–Zöpfe (Theorie des Elektrons, Nobel–Preis 1933)

Wir ersetzen die rechte Wand durch ein kleineres Objekt.



Die Stränge können sich nun um das Objekt herum bewegen:

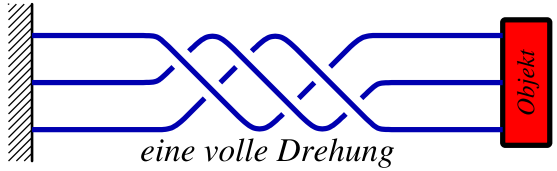


Dirac–Zöpfe verhalten sich genauso wie Artin–Zöpfe.

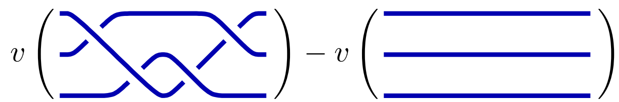
Einzige Neuerung: Dirac–Zöpfe erlauben diese zusätzliche Bewegung.

Das Phänomen des Spin

Ist der folgende Dirac–Zopf z äquivalent zum trivialen Zopf? Beweis?



Der Schlüssel ist folgende Beobachtung:

 $= 4$

Ist der Dirac–Zopf z^2 äquivalent zum trivialen Zopf? Beweis?

Topologische Jonglage

Kann man ein Seil verknoten
mit nur einer Hand?

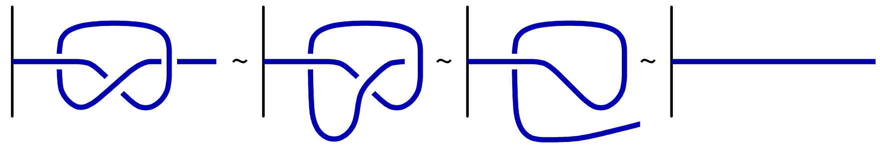
Kann man ein Seil
ebenso entknoten?

Komplementäre Strategien:

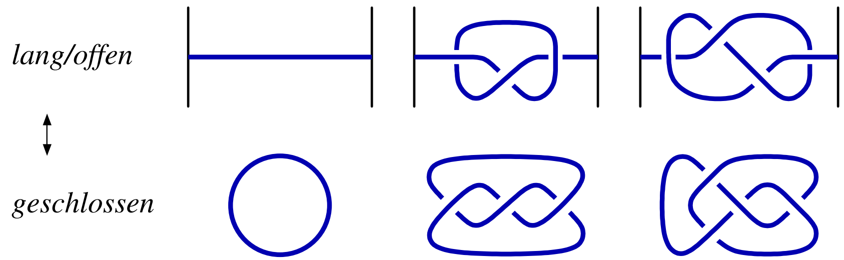
- Um zu beweisen, dass etwas möglich ist, genügt es, es zu tun. Mathematiker nennen dies einen „konstruktiven Beweis“.
- Um zu beweisen, dass etwas unmöglich ist, genügt es nicht, zu scheitern. In diesem Fall müssen wir das Hindernis verstehen. . .

Wie modelliert man Knoten?

Beobachtung — In einem allzu naiven Modell sind alle Knoten gleich:



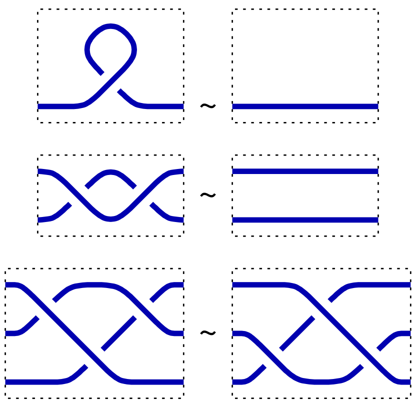
Zwei Modelle sind möglich (und erweisen sich als gleichwertig):



Wie zuvor darf sich der Strang bewegen.

Reidemeister–Züge

Die folgenden Züge ändern das *Diagramm*, nicht aber den *Knoten*:

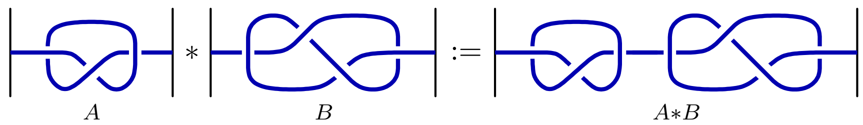


Satz (Kurt Reidemeister 1926)

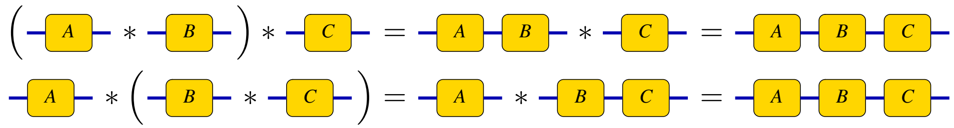
Diese Bewegungen reichen bereits aus.

Wir können Knoten verknüpfen!

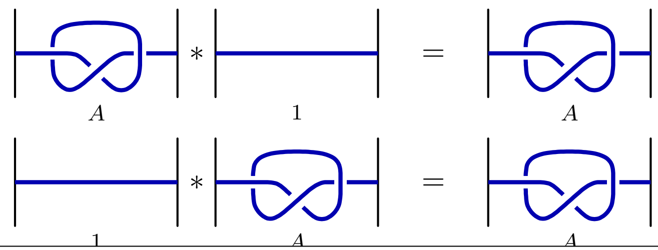
Auch Knoten erlauben eine Verknüpfung:



Ist sie assoziativ? $(A * B) * C = A * (B * C)$? Ja, klar!

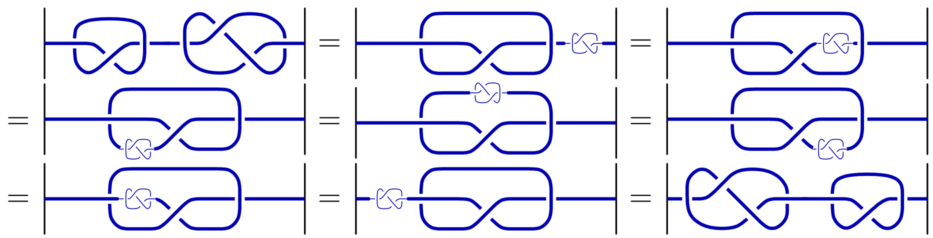


Gibt es ein neutrales Element? $A * 1 = A$ und $1 * A = A$? Ja, klar!

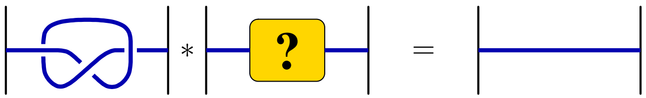


Die Verknüpfung von Knoten

Ist sie kommutativ? $A * B = B * A$?



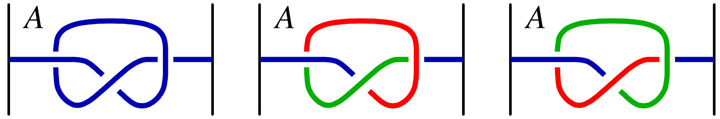
Gibt es Inverse? $A * A^{-1} = 1$ und $A^{-1} * A = 1$?



Das präzisiert unsere Frage zur „topologischen Jonglage“!

Dreifärbungen (Ralph Fox 1971)

Wir betrachten ein Knotendiagramm und färben es blau, rot und grün.



Dabei verlangen wir folgende Regeln:

1. An jeder Kreuzung treffen entweder alle drei Farben zusammen oder nur eine einzige. (Wir verbieten zweifarbige Kreuzungen.)
2. Der Eingang ist blau; der Ausgang wird es dann auch sein.

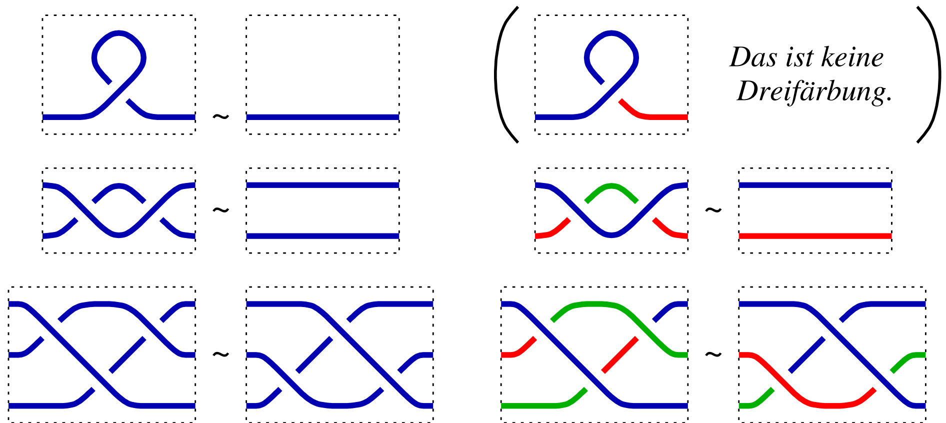
Für jedes Knotendiagramm D sei $\mathrm{col}(D)$ die Anzahl der Dreifärbungen. Wir finden zum Beispiel $\mathrm{col}(A) = 3$ aber $\mathrm{col}(T) = \mathrm{col}(T') = 1$.

Dreifärbungen sind invariant!

Satz (Fox 1971)

Aus $D \sim D'$ *folgt* $\mathrm{col}(D) = \mathrm{col}(D')$.

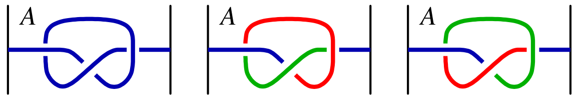
Beweis. Reidemeister–Züge transportieren die Färbungen:



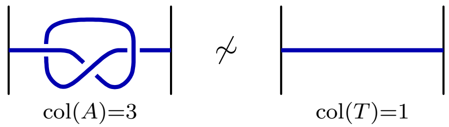
Umgekehrt gilt daher: Aus $\mathrm{col}(D) \neq \mathrm{col}(D')$ folgt $D \not\sim D'$.

Gibt es inverse Knoten?

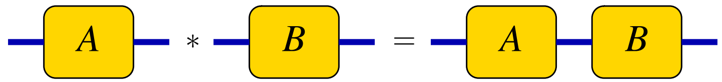
Die Kleeblattschlinge erlaubt genau 3 Dreifärbungen:



Daraus folgt, dass die Kleeblattschlinge nicht trivial ist:



Besser noch: Wir finden $\mathrm{col}(A * B) = \mathrm{col}(A) \cdot \mathrm{col}(B)$.



Aus $A * B = 1$ folgt demnach $\mathrm{col}(A) \cdot \mathrm{col}(B) = 1$. Das ist unmöglich!

Satz

Zur Kleeblattschlinge gibt es keinen inversen Knoten.

Zusammenfassung

Wir können mit Zöpfen rechnen wie mit Zahlen. $\longrightarrow$ *Gruppe*.
Der Drall veranschaulicht das Phänomen des Spin. $\longrightarrow$ *Invariante*.

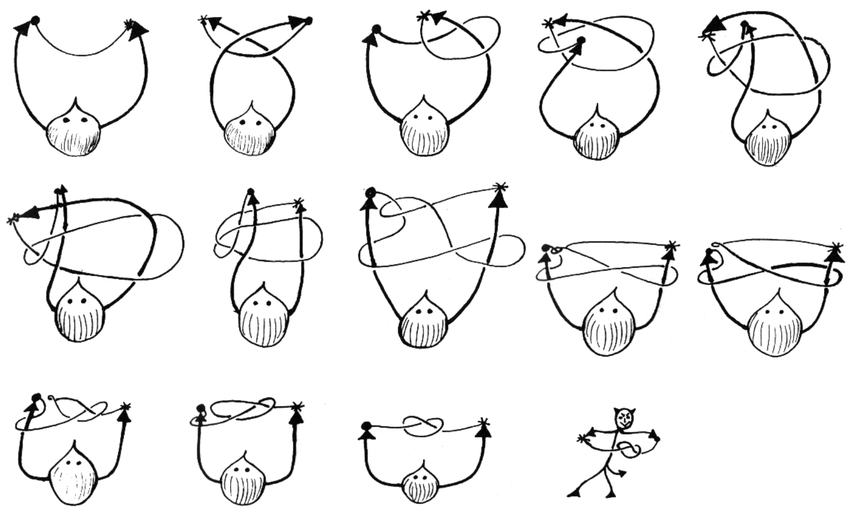
Auch mit Knoten können wir rechnen. Hier fehlen aber die Inversen.
Zur Kleeblattschlinge existiert kein Anti-Knoten. $\longrightarrow$ *Invariante*.

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit!

`www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/popularisation/`
`#Mathetag2012`

Ein topologischer Zaubertrick

Ein Zauberer hält ein unverknotetes Seil an beiden Enden.
Er behauptet, ohne loszulassen das Seil verknoten zu können.

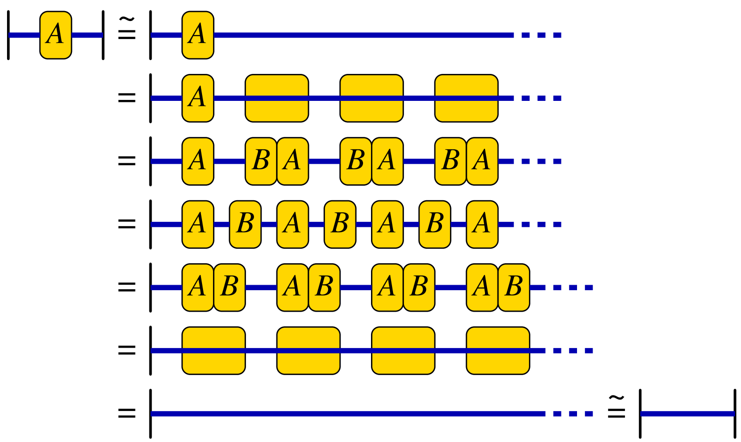


Ist dieses Kunststück auf ehrliche Weise möglich?

Ein mathematischer Zauber–Trick

Satz
Für alle Knoten A und B gilt: Aus $A * B = 1$ folgt $A = B = 1$.

Beweis-Idee (nach Barry Mazur 1962) Wir wissen $BA = AB = 1$.



Knoten ············> *unendliche Knoten* ············> *Knoten*

Ist der Mazur–Trick ein Beweis oder ein Schwindel?

Diese schöne Rechnung gibt es auch für Zahlen.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & 0 \\
= & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \dots \\
= & (1-1) & + & (1-1) & + & (1-1) & + & (1-1) & + & \dots \\
= & 1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & + & \dots \\
= & 1 & + & (-1+1) & + & (-1+1) & + & (-1+1) & + & \dots \\
= & 1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \dots \\
= & 1
\end{array}
$$

Das darf doch nicht wahr sein! Aber wo liegt der Fehler?

Zerlegung von Knoten

„In Donalds Luftschlauch sind einige Knoten. Wie viele sind es?“

Fragen präzisieren und passende Werkzeuge erstellen:

- Wie lässt sich ein Knoten in Teilknoten zerlegen?
- Gibt es unzerlegbare Knoten? Wie erkennt man diese?
- Ist die Zerlegung in unzerlegbare Knoten eindeutig?

Primfaktorzerlegung von Knoten

Ein Knoten A heißt *prim* oder auch *unzerlegbar*, wenn aus jeder Zerlegung $A = B * C$ stets entweder $B = 1$ oder $C = 1$ folgt.

Z.B. ist die Kleeblattschlinge prim. Es gibt unendlich viele weitere.

Satz (Schubert 1949)

Jeder Knoten lässt sich eindeutig in ein Produkt von Primknoten zerlegen.

Die natürlichen Zahlen $(\mathbb{N}, \cdot)$ erfreuen sich derselben Eigenschaft!

Korollar

Die Verknüpfung von Knoten entspricht der Multiplikation natürlicher Zahlen.

Produkt von Zahlen $\longleftrightarrow$ Verknüpfung von Knoten

Einselement $\longleftrightarrow$ trivialer Knoten

Primzahlen $\longleftrightarrow$ Primknoten