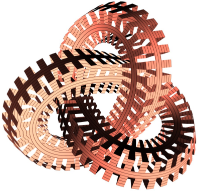
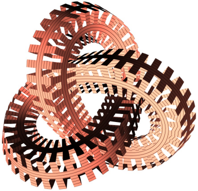
# Knoten und Zöpfe



Prof. Dr. Michael Eisermann

Institut für Geometrie und Topologie
Universität Stuttgart



Vortrag am 16./17.11.2011
zuletzt kompiliert am 17. November 2011

Unitag der Universität Stuttgart

`www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/popularisation/#Unitag2011`

# An wen richtet sich dieser Vortrag?

Dieser Vortrag ist in erster Linie ein Stück Unterhaltungsmathematik.

Er richtet sich an interessierte Laien, zum Beispiel Oberstufenschüler, die zum Unitag oder zum Tag der Wissenschaften kommen, und etwas über Mathematik erfahren möchten. Ich setze daher kaum Vorkenntnisse voraus, wohl aber Neugier und Mut, den eigenen Verstand zu gebrauchen.

Mein Ziel ist die Popularisierung mathematischer Ideen und Arbeitsweisen.

Der Vortrag versucht damit auch auf die Frage „Was ist Mathematik?“ zu antworten. Das ist eine sehr schwierige Frage und erlaubt keine kurze Antwort. Dennoch will ich hier eine versuchen: Mathematik besteht aus konkreten Problemen und abstrakten Begriffen zu deren Lösung. Dass beide sich bestens ergänzen, erfährt jeder Anwender der Mathematik. Ohne eigene Erfahrung hingegen kann man diese Beschreibung wohl kaum verstehen. Der Vortrag soll dieses Zusammenspiel an einem kleinen Beispiel illustrieren.

# Überblick

# Einleitung

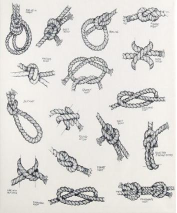
Knoten, Zöpfe und andere verknotete Objekte gibt es überall in unserer dreidimensionalen Umwelt. Sie sind manchmal lästig, oft auch nützlich, zum Beispiel beim Bergsteigen oder beim Segeln…

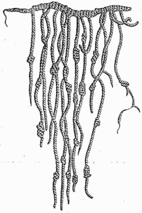
Knoten treten nicht nur im Alltag sondern auch in den Naturwissenschaften auf. Das Erbmaterial einer Bakterie zum Beispiel bildet einen geschlossenen Kreis. Dieser kann verknotet sein, und im Allgemeinen ist er es auch… was der Zellteilung im Weg stehen kann.

Auch in der theoretischen Physik treten Strukturen auf, die Knoten und Zöpfen ähneln. In der Mathematik schließlich dienen sie dazu, die Beschaffenheit und die Geometrie dreidimensionaler Räume zu verstehen.

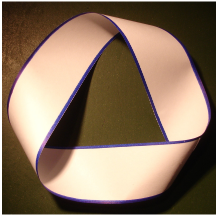
Selbst auf einem elementaren Niveau enthüllt dieses Thema erstaunliche und schöne Strukturen. Davon möchte ich in diesem Vortrag sprechen. Ich möchte drei motivierende Experimente und Fragen voranstellen. Anschließend werde ich versuchen, mathematische Werkzeuge zu ihrer Beantwortung zu erstellen. (Aus Zeitnot zumindest für eine der drei Fragen.)

# Knoten finden sich überall in unserer $3$-dimensionalen Welt

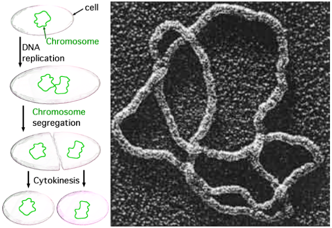





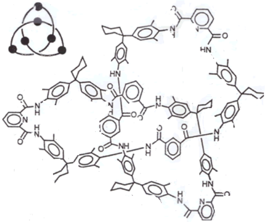


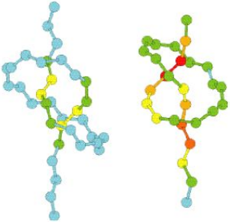

# Knoten finden sich auch in den Wissenschaften



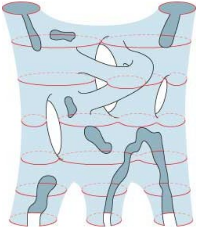

(a) Biologie



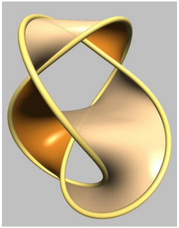
(b) Chemie



(c) Nanotechnologie



(d) theoretische Physik



(e) Mathematik

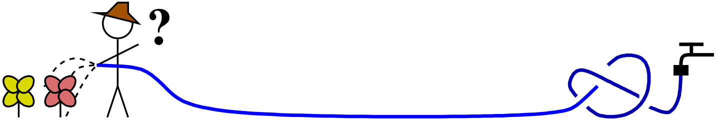
# Topologische Jonglage

Kann man ein Seil verknoten
mit nur einer Hand?

Kann man ein Seil
ebenso entknoten?

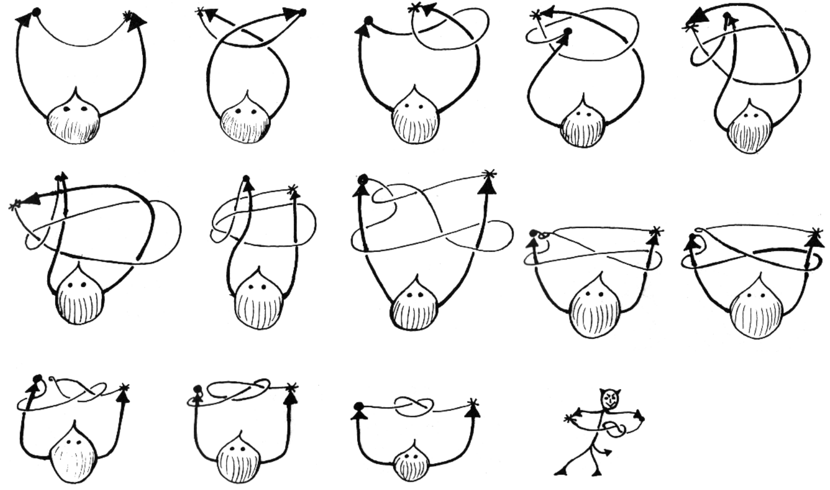
Mathematische Fragen:

- Was ist ein Knoten? Welche Bewegungen sind erlaubt?
- Wie kann man Knoten miteinander verknüpfen?
- Gibt es inverse Knoten, sozusagen „Anti-Knoten"?



# Topologischer Zaubertrick

Ein Zauberer hält ein unverknotetes Seil an beiden Enden.
Er behauptet, ohne loszulassen das Seil verknoten zu können.



Ist dieses Kunststück auf ehrliche Weise möglich?

# Dirac–Zöpfe und Spin

Experiment: Lässt sich der folgende Zopf entwirren?

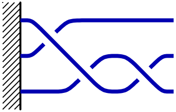

*eine volle Drehung*

Lässt sich der folgende „doppelt so komplizierte“ Zopf entwirren?


*zwei volle Drehungen*

Wir wollen diese Fragen präzisieren und passende Werkzeuge erstellen:

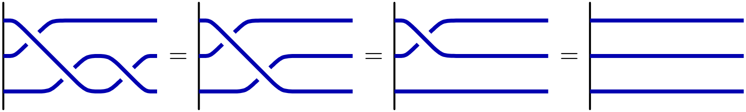
- Was ist ein Zopf? Welche Bewegungen sind erlaubt?
- Was ist ein Dirac–Zopf? Welche Bewegungen sind erlaubt?
- Welche Hindernisse gibt es bei möglichen Umformungen?

Ein erstes Modell: 

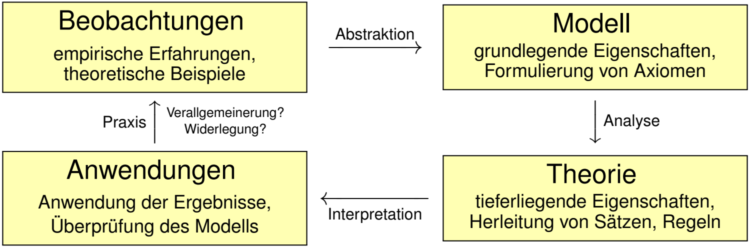
Wichtig: Die Stränge sind flexibel, sie dürfen sich bewegen.

Genauer: Wir betrachten zwei Zöpfe als äquivalent,
wenn sie sich durch eine Bewegung ineinander überführen lassen.

Schlechte Nachricht: In diesem ersten Modell sind alle Zöpfe äquivalent.

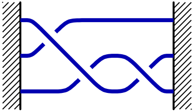


# Nochmal zurück



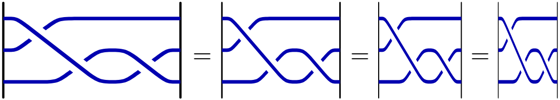
# Wie modelliert man Zöpfe?

Besseres Modell:

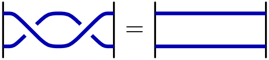


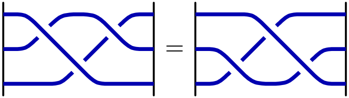
Wir fixieren die Enden.
In der Mitte dürfen
sich die Stränge bewegen.

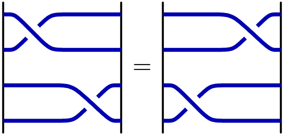
Die Länge ist unwesentlich:



Elementare Bewegungen:







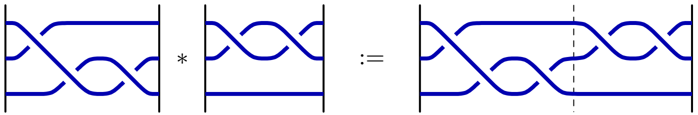
## Satz

*Jede Bewegung lässt sich aus elementaren Bewegungen zusammensetzen.*

Mit etwas mathematischem Vokabular lassen sich diese Bilder in Formeln übersetzen…
und die Formeln in Bilder. Ich bleibe hier lieber bei den Bildern.

# Wir können Zöpfe verknüpfen!

Zöpfe auf $n$ Strängen lassen sich verknüpfen:



(Wie) Kann man mit Zöpfen rechnen?

1. Ist diese Verknüpfung assoziativ?

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

2. Ist diese Verknüpfung kommutativ?

$$a * b = b * a$$

3. Gibt es ein neutrales Element?

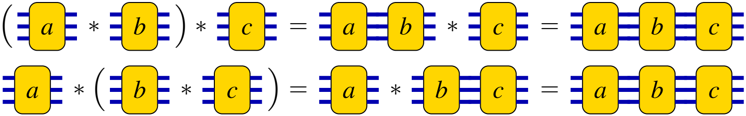
$$a * 1 = a \qquad \text{und} \qquad 1 * a = a$$

4. Gibt es zu jedem Zopf einen inversen Zopf?

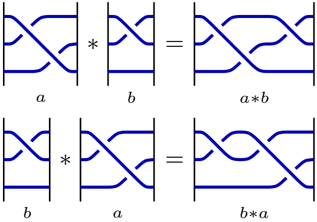
$$a * a^{-1} = 1 \qquad \text{und} \qquad a^{-1} * a = 1$$

# Eigenschaften der Verknüpfung

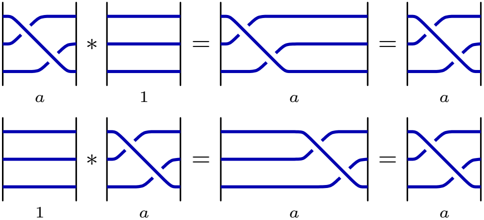
Ist sie assoziativ? Ja!



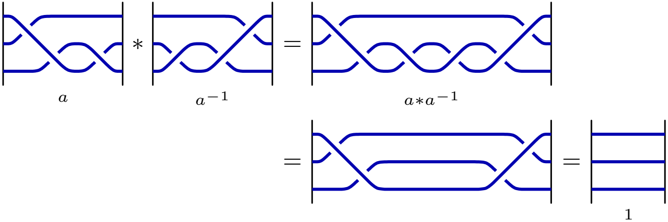
Ist sie kommutativ? Nein!



Gibt es ein neutrales Element? Ja!




Gibt es zu jedem Zopf einen inversen Zopf? Ja!



# Die Zopfgruppe

- Die Verknüpfung von Zöpfen ist assoziativ:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

- Es gibt ein neutrales Element $1$, nämlich den trivialen Zopf:

$$a * 1 = 1 * a = a$$

- Zu jedem Zopf $a$ gibt es einen inversen Zopf $a^{-1}$, sein Spiegelbild:

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$$

## Definition (Gruppe)

Eine Menge mit einer Verknüpfung und diesen Eigenschaften heißt *Gruppe*.

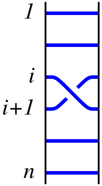
Wir haben also folgendes Ergebnis bewiesen:

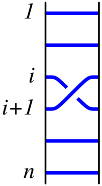
## Satz (Emil Artin 1925)

*Die Zöpfe auf $n$ Strängen und ihre Verknüpfung bilden eine Gruppe.*

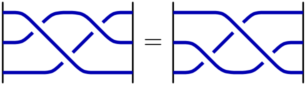
Für diese Gruppe schreiben wir kurz $(\mathbf{B}_n, *)$, englisch für „**b**raid group“.
Für $n \geq 3$ ist sie nicht kommutativ: Unsere Beispiele zeigen $a * b \neq b * a$.

# Rechenregeln für die Zopfgruppe

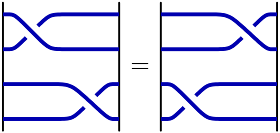
Elementare Zöpfe: $s_i =$ 

, $s_i^{-1} =$ 


Elementare Relationen: Es gilt $s_i s_i^{-1} = s_i^{-1} s_i = 1$, und außerdem



$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$



$s_i s_j = s_j s_i$ für $|i-j| \geq 2$

## Satz (Emil Artin 1925)

*Die Zopfgruppe auf $n$ Strängen erlaubt die Präsentation*

$$\mathbf{B}_n = \left\langle\, s_1, \dots, s_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{cl} s_i s_j s_i = s_j s_i s_j & \textit{für } |i-j| = 1 \\ s_i s_j = s_j s_i & \textit{für } |i-j| \geq 2 \end{array} \right\rangle.$$

 Wir können jeden Zopf beschreiben als ein Wort in $s_1, \dots, s_{n-1}$ modulo Termumformungen.

# Erläuterung: Was besagt der Satz von Artin?

Der elementare Zopf $s_i$ führt eine halbe Drehung zwischen den Strängen $i$ und $i+1$ aus, per Konvention rechtshändig. Sein inverser Zopf $s_i^{-1}$ macht dies durch eine linkshändige halbe Drehung wieder rückgängig.

Zwischen den elementaren Zöpfen gelten die oben gezeigten elementaren Relation:
Dies sind die zuvor schon gesehenen elementaren Bewegungen.

Der Satz von Artin macht nun zwei Aussagen:

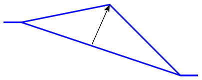
- Erstens, die elementaren Zöpfe erzeugen die Gruppe $\mathbf{B}_n$. Das bedeutet, jeder noch so komplizierte Zopf lässt sich schreiben als Produkt von elementaren Zöpfen. (Das sieht man leicht ein.)
- Zweitens, die elementaren Relationen erzeugen bereits alle Relationen. Das bedeutet, jede noch so komplizierte Bewegung von Zöpfen lässt sich zerlegen in eine Folge von elementaren Bewegungen.

Somit haben wir eine perfekte Übersetzung zwischen Zöpfen und Formeln, also der topologischen Situation und ihrer algebraischen Beschreibung! Damit kann man wunderbar rechnen, auch auf dem Computer, was algorithmische Untersuchungen ausgelöst hat und weiterhin ein aktives Forschungsgebiet ist.

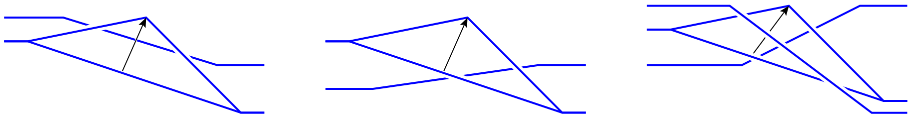
# Beweis-Idee zum Satz von Artin

Jeder Zopf kann durch polygonale Stränge dargestellt werden: Wir können dann von links nach rechts die elementaren Zöpfe ablesen. So erhalten wir ein Wort in $s_1, \dots, s_{n-1}$.

Auch jede Bewegung kann als Folge polygonaler Bewegungen dargestellt werden:



Drei elementare Fälle erkennen wir sofort wieder:



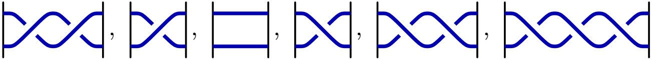
1. Einfügen eines Paares entgegengesetzter Kreuzungen: $1 = s_i^{-1} s_i$.
2. Verschieben einer Kreuzung bezüglich anderer Kreuzungen: $s_i s_j = s_j s_i$.
3. Verschieben eines Stranges über eine Kreuzung: $s_{i+1} s_i s_{i+1} = s_i s_{i+1} s_i$.

Nach hinreichend feiner Unterteilung besteht jede Bewegung aus einer Folge dieser elementaren Bewegungen. Damit ist der Satz von Artin bewiesen.

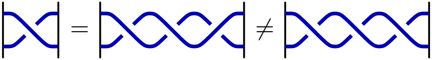
# Wie kann man die Zopfgruppen zu verstehen?

$n = 1$: Auf nur einem Strang ist jeder Zopf trivial: 

$n = 2$: Zöpfe auf zwei Strängen sind auch noch leicht:




Die Anzahl der Kreuzungen kann sich durch Bewegung ändern:




Was zählt ist der Drall $v \colon \mathbf{B}_2 \to \mathbb{Z}$, definiert durch

$v\Big($$\Big) = +1, \qquad v\Big($$\Big) = -1, \qquad v(a * b) = v(a) + v(b).$

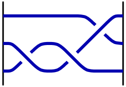
## Korollar (Folgerung aus der Präsentation von Artin)

*Zöpfe auf zwei Strängen werden durch ihren Drall klassifiziert:*

$$v \colon (\mathbf{B}_2, *) \to (\mathbb{Z}, +), \quad s_1^k \mapsto k.$$

# Der Drall ist eine Invariante

Der Drall ordnet jedem Zopf eine ganze Zahl zu. Beispiel:

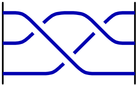
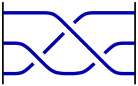
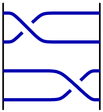
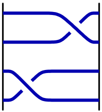
$v\Bigg($  $\Bigg) = +1 + 1 - 1 = 1$

## Korollar (Folgerung aus der Präsentation von Artin)

*Der Drall ist eine Invariante* $v\colon \mathbf{B}_n \to \mathbb{Z}$ *mit*

$v\Big($  $\Big) = +1,$ $\quad$ $v\Big($  $\Big) = -1,$ $\quad$ $v(a * b) = v(a) + v(b).$

Nachweis der Invarianz: $v\Big($  $\Big) = v\Big($  $\Big),$

$v\Bigg($  $\Bigg) = v\Bigg($  $\Bigg),$ $\quad$ $v\Bigg($  $\Bigg) = v\Bigg($  $\Bigg).$

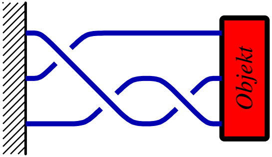
Für $n \geq 3$ reicht der Drall nicht mehr zur Klassifikation: $\mathbf{B}_3$ ist nicht kommutativ!

## Aktuelle Forschung (insbesondere seit Jones 1984)

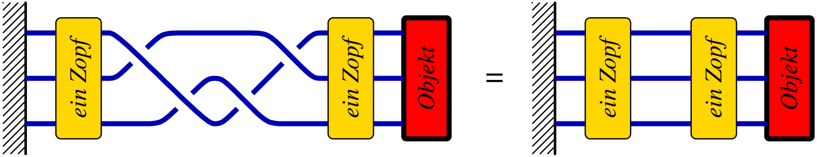
Man kann Zöpfe klassifizieren mit Hilfe von Matrizen.

# Dirac–Zöpfe (Theorie des Elektrons, Nobel–Preis 1933)

Wir ersetzen die rechte Wand durch ein kleineres Objekt.




Die Stränge können sich nun um das Objekt herum bewegen:




## Satz (Newman 1942, Fadell 1962)

*Dirac–Zöpfe auf $n$ Strängen bilden eine Gruppe.*
*Dies ist Artins Zopfgruppe mit der zusätzlichen Relation*

$$s_1 \cdots s_{n-1} s_{n-1} \cdots s_1 = 1.$$

Wie in der Skizze gezeigt können wir nun Zöpfe ineinander umformen, die im vorherigen Modell *nicht* äquivalent waren. Insbesondere kann sich nun der Drall ändern.

# Welche Zöpfe können wir entwirren?

Ist der folgende Dirac–Zopf $z$ äquivalent zum trivialen Zopf? Beweis?


*eine volle Drehung*

Der Schlüssel ist folgende Beobachtung:

$v\Bigg($  $\Bigg) - v\Bigg($  $\Bigg) = 4$

Ist der Dirac–Zopf $z^2$ äquivalent zum trivialen Zopf? Beweis?


*zwei volle Drehungen*

# Das Phänomen des Spin

Wir haben damit bewiesen: Eine volle Drehung ist nicht entwirrbar.


Erstaunlich aber wahr: Zwei volle Drehungen sind entwirrbar.


Hierzu haben wir zwei komplementäre Strategien angewendet:

- Um zu beweisen, dass etwas möglich ist, genügt es, es zu tun.
  Mathematiker nennen dies einen konstruktiven Beweis.
- Um zu beweisen, dass etwas unmöglich ist, genügt es nicht, zu scheitern.
  In diesem Fall müssen wir das Hindernis verstehen. (Hier: eine „Invariante“)

# Wozu ist das gut?

Ich hoffe zunächst einmal, dieses Beispiel war erheiternd und doch lehrreich. Nach getaner Arbeit fragen Sie sich – und mich: Wozu ist das gut? Hieraus gibt es viele Antworten, meine erste wäre:

## Freude an der Erkenntnis!

Wir haben ein Phänomen erkannt und sind ihm auf den Grund gegangen. Für viele Wissenschaftler ist das Motivation genug. Es gibt aber darüber hinaus noch weitere Gründe: Erkenntnisse lassen sich anwenden!
Die Mathematik ist großzügig: Sie gibt uns mehr zurück als wir von ihr verlangen.
Investition in die Mathematik zahlt sich immer aus (kurz-/mittel-/langfristig).

## Anwendungen für unser Beispiel:

- $3$–dimensionale Phänomene verstehen
- Illustration des Elektronen-Spins (nach Dirac)
- Interaktion physikalischer Teilchen (ähnliche Formeln)
- Durchlaufzentrifuge (z.B. zur Extraktion von Blutplasma)
- . . .