Spieltheorie und ökonomisches Verhalten

Die Analyse von Konflikt und Kooperation

Prof. Dr. Michael Eisermann
www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/lehre/Spieltheorie

Universität Stuttgart

Sommersemester 2018
(Stand 30. September 2018)

Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen!

Much to learn, you still have. This is just the beginning.

Für die Mitteilung von Unklarheiten und Fehlern aller Art sowie für Verbesserungsvorschläge bin ich stets dankbar!

Urheberrecht und Haftungsausschluss

Diese Unterlagen werden genutzt zur Vorlesung *Spieltheorie und ökonomisches Verhalten*. Sie vermitteln einschlägiges Grundlagenwissen und mathematische Analysewerkzeuge.

Die Inhalte wurden vom Autor mit größter Sorgfalt für die Präsentation in der Lehre erstellt. Sie werden allein zu Lehrzwecken zur Verfügung gestellt, in der Hoffnung, dass sie zum Lernen und Üben nützlich sind, ohne jeden Anspruch auf Eignung zu irgendeinem anderen Zweck.

Der Autor übernimmt keinerlei Gewähr für die Aktualität, Korrektheit, Vollständigkeit oder Qualität der angebotenen Informationen. Jede Haftung für Schäden materieller oder immaterieller Art, die auf fehlerhaften oder unvollständigen Informationen beruhen, ist ausgeschlossen.

Für Inhalte externer Quellen, insb. verlinkter Webseiten, ist stets deren Anbieter verantwortlich.

Vorwort zu diesen Notizen

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie.
(Immanuel Kant, 1724–1804)

Dies sind Unterlagen zur Vorlesung *Spieltheorie und ökonomisches Verhalten*, die ich im Sommersemester 2018 erstmalig halten durfte. Vieles ist noch experimentell und daher Änderungen unterworfen.

Vorlesung und Übungen richten sich an Studierende der Mathematik, oder allgemein an alle Interessierten, die vor mathemischen Methoden nicht zurückschrecken, sondern ihre ordnende Kraft zu schätzen wissen.

Spielerisch-experimentelle Aspekte kommen nicht zu kurz, so hoffe ich. Ebenso bin ich überzeugt, dass mathematische Modelle und Argumente, Sätze und Beweise, hier Erklärung und Vervollständigung bieten. Der Verlauf der Veranstaltung bestimmt die jeweilige Dosierung.

Das Ziel dieser Veranstaltung ist hehr, aber meine Möglichkeiten sind bescheiden. Ich möchte Ihr Interesse wecken, ja Ihre Begeisterung entfachen, damit Sie darüber hinaus gehen und selbstständig lernen. Literatur hierzu finden Sie auf der Webseite dieser Vorlesung.

Vorwort zu diesen Notizen

Es gibt nichts Gutes, außer man tut es.
(Erich Kästner, 1899–1974)

Die Spieltheorie soll für Sie nicht bloß Theorie bleiben, Sie sollen sie selbst erfahren und dadurch verstehen. Um wirklich vertraut zu werden, sollen Sie regelmäßig spielen, sowohl empirisch als auch theoretisch, also spieltheoretische Fragen mathematisch formulieren und lösen.

Wir sind glücklich (und ein wenig stolz), Ihnen zu dieser Vorlesung auch Übungen anbieten zu können. Das ist angesichts knapper Ressourcen leider keineswegs selbstverständlich, aber wesentlich für Ihren Erfolg! Wenn Sie sich ernsthaft darauf einlassen, werden Sie viel Freude daran haben und so manches Aha-Erlebnis. Möge es nützen!

Erkläre es mir, und ich werde es vergessen.
Zeige es mir, und ich werde mich erinnern.
Lass es mich tun, und ich werde es verstehen.
(Konfuzius, 551–497 v.Chr.)

Was ist und was soll die Spieltheorie?

Die Spieltheorie untersucht Situationen von **Konflikt und Kooperation**, dazu bietet sie vielfältige Beispiele und Modelle, Begriffe und Methoden. Sie hilft, strategische **Entscheidungssituationen** besser zu verstehen, denn Spieler antizipieren in ihrem Kalkül die Aktionen der Gegenspieler.

Sie ist damit sehr vielseitig **anwendbar**, denn fast alles in ein Spiel, oder genauer gesagt: Fast alles lässt sich als ein Spiel betrachten. Sobald **mehrere Entscheider** (Akteure, Spieler) gemeinsam ein Ergebnis erzielen, ist dies ein Anwendungsgebiet der Spieltheorie.

Jede **spieltheoretische Analyse** umfasst immer zwei Bestandteile:

- Das Spiel als formale Beschreibung der strategischen Situation: die Spieler, all ihre Handlungsoptionen und deren Konsequenzen.
- Lösungen als Prognose oder Empfehlung für den Spielverlauf: idealerweise alle Lösungen des jeweiligen Lösungskonzepts.

Das Spiel definiert die **Regeln**, aber nicht das Verhalten der Spieler. Das Lösungskonzept kodiert Annahmen über das **Spielerverhalten**, etwa Rationalität. Je nach Art des Spiels, etwa statisch, dynamisch, etc., gibt es mehrere Konzepte, durchaus mit unterschiedlichen Prognosen.

Was ist und was soll die Spieltheorie?

Warum Spieltheorie? Zunächst einmal aus Neugier und Freude! Wie jede elegante, insbesondere mathematische Idee lässt sich auch die Spieltheorie um ihrer selbst willen erlernen, studieren, bewundern.

Wozu Spieltheorie? Ihre Anwendungen sind überaus vielfältig in Politik (Gesetzgebung, Normen, Anreize), Philosophie (Ir/Rationalität), Biologie (Ko/Evolution), Ökonomie (Strategien, Mechanismen, z.B. Auktionen), Sozialpolitik (Sicherung, Wohlfahrt, Gemeinwohl, Ausgleich), usw.

Die Spieltheorie kann (und wird) Ihnen viel Freude bereiten. Entgegen dem ersten Anschein ist sie aber nicht einfach, vor allem konzeptuell: Sie müssen grundlegende und raffinierte Ideen erst einmal verstehen.

Die Sprache der Spieltheorie ist die Mathematik: Sie ist unerlässlich, um spieltheoretische Probleme zu formulieren und zu analysieren. Dank solider mathematischer Vorbildung wird Ihnen dies leicht fallen.

“Elementary” does not mean easy to understand. “Elementary” means that very little is required to know ahead of time in order to understand it, except to have an infinite amount of intelligence.

(Richard P. Feynman, 1918–1988, *The Feynman Lectures on Physics*)

Wie lernen Sie erfolgreich Spieltheorie?

Arbeiten Sie jede Vorlesung nach. Lesen Sie aufmerksam ein Buch. Bilden Sie selbst Arbeitsgruppen. Und wie immer: Üben! Üben! Üben! Investieren Sie jede Woche die nötige Zeit. Nur so können Sie gewinnen.

Allgemein gilt: Jede ernsthafte, insb. wissenschaftliche Beschäftigung erfordert zunächst Interesse, Neugier und Offenheit für Probleme und sodann Kreativität, Sorgfalt und Hartnäckigkeit bei deren Lösung.

Von Anfang an präsentiere ich zahlreiche Bei-Spiele zur Anschauung. Sie sollen zunächst motivieren, illustrieren und als Ausblick skizzieren, wie umfassend die Spieltheorie und ihre Anwendungen sein können.

Die mathematischen Begriffe und Methoden sind zunächst elementar, die ersten Schritte sind bereits mit guten Schulkenntnissen machbar. Wir bauen sie in den folgenden Kapitel schrittweise zu einer Theorie aus, und verwenden dabei zunehmend feinere Werkzeuge der Mathematik.

Wichtig und unverzichtbar ist daher, dass Sie das ganze Semester am Ball bleiben und wöchentlich die Vorlesung und die Übungen bearbeiten. Nur so können Sie Ihr Wissen und Können erwerben und verfestigen, um in jeder Folgewoche darauf aufzubauen. Anders geht es nicht.

Wie lernen Sie erfolgreich Spieltheorie?

Diese Vorlesung Spieltheorie fördert Ihr kontinuierliches Mitdenken: Viele der Bei-Spiele sind so aufeinander aufgebaut, dass sie uns in den folgenden Kapiteln als einfache Leitbilder und Prüfsteine dienen können.

Die Phänomene sind zwar allesamt einfach, doch vielschichtig genug, um verschiedene Betrachtungen, Modellierungen und Verfeinerungen zuzulassen: Rationalität, dominierte Strategien, Nash–Gleichgewichte, zeitliche Struktur, teilspielperfekte Gleichgewichte, usw.

Die Wirklichkeit ist komplizierter als sie auf den ersten Blick scheint. Gerade deshalb lohnen sich mathematische Präzision und Sorgfalt. Das mathematische Modell dient uns als Grundlage und als Maßstab, selbst wo es versagt, für die Abweichung von Prognose und Experiment.

Erfahrungsgemäß provozieren schon erste einfache Versuche einer spieltheoretischen Modellierung lebhafte Diskussionen der Teilnehmer. Diese Auseinandersetzung führt häufig zu lehrreichem Widerspruch, im weiteren Verlauf dann zu einem besseren Verständnis.

Das ist gut und richtig so: Ihr Engagement ist wesentlich! Seien Sie neugierig, sorgsam und kritisch!

Prof. Dr. Michael Eisermann • Spieltheorie und ökonomisches Verhalten

Kapitel A

Einführende Beispiele zur Spieltheorie

Das ganze Leben ist ein Spiel,
und wir sind nur die Kandidaten.
Hape Kerkeling (1964–)

SoSe 2018 • www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/lehre/Spieltheorie • 30.09.2018

Inhalt dieses Kapitels

Warum ist Spieltheorie relevant?

To be literate in the modern age you need to have
a general understanding of game theory.
(Paul Samuelson, 1915–2009)

Mathematik ist Grundlage und Werkzeug aller modernen Technologie. In zunehmenden Maße gilt dies auch für weite Teile der Ökonomie. Je nach Kenntnis und Nähe zum Thema mag dies überraschen.

Die Wechselwirkung zwischen Mathematik und Naturwissenschaften ist seit jeher extrem stark, ebenso mit den Ingenieurwissenschaften.

Die Wechselwirkung mit den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften ist dagegen vergleichsweise schwach; prominente Ausnahmen hiervon sind statistische Methoden zur Erhebung und Auswertung von Daten, jüngst unter dem öffentlichkeitswirksamen Banner *Data Science* und *Big Data*.

Als mathematische Disziplin hat die Spieltheorie seit den 1950er Jahren die Sicht und das Denken in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften nachhaltig geprägt. Sie ist gereift und erprobt und anerkannt und gehört heute zum unverzichtbaren Standardwerkzeug der Mikroökonomie.

Warum ist Spieltheorie relevant?

Spieltheorie ist ein (inzwischen sehr) umfangreicher Werkzeugkasten. Sie ist auf ganz konkrete und explizite Anwendungen ausgerichtet, und dazu nutzt sie abstrakte und raffinierte mathematische Modelle. Diese extreme Spannbreite ist faszinierend, für manche abschreckend.

Zahlreiche Beispiele und Anwendungen dienen als leuchtende Vorbilder, doch weit darüber hinaus bietet sie uns extrem vielseitige Methoden. Mit Hilfe spieltheoretischer Begriffe, Sätze und Verfahren können wir Konflikte besser verstehen, mathematisch beschreiben und analysieren, und systematisch mögliche Lösungen finden, konstruieren und prüfen.

Manche Konflikte haben eindeutige Lösungen, die meisten leider nicht. Im ersten Falle kann die Analyse prädiktiv oder normativ genutzt werden, im zweiten Falle ist sie immerhin noch deskriptiv oder explikativ nutzbar. Die Spieltheorie bietet magische Momente, aber keine Wunder.

Das ist das Ziel dieser einführenden Vorlesung: Die Teilnehmer sollen sich befähigen, grundlegende Methoden der Spieltheorie anzuwenden, und zwar selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ.

Was ist ein Spiel allgemein gesehen?

Spiele im engeren Sinne sind Kinderspiele, Kartenspiele, Brettspiele, Gesellschaftsspiele, Rollenspiele, Computerspiele, auch Handyspiele, sportliche Wettkämpfe, Bundesjugendspiele bis Olympische Spiele, etc.

Wir fassen den Begriff des Spiels im Folgenden wesentlich weiter als Interaktion mehrere Akteure, wobei es zu Konflikten kommen kann.

Spiele beschreiben Konflikte, Konkurrenz und Kooperation:

- Mehrere Akteure interagieren (Spieler, Teilnehmer etc.).
- Jeder Akteur hat gewisse Handlungsoptionen (Züge, Strategien).
- Aus diesen Möglichkeiten wählt jeder Akteur aus (frei, unabhängig).
- Daraus entsteht für jeden ein Ergebnis (Auszahlung, Nutzen etc).
- Jeder Spieler versucht, sein Ergebnis zu maximieren.

Ein Spiel muss demnach nicht kindisch-verspielt sein, sondern kann durchaus vollkommen ernst sein. Hierzu nenne ich im Folgenden einige Beispiele, damit Sie sich einen besseren Überblick verschaffen können. Die möglichen Interpretationen und Anwendungen sind unbegrenzt.

Warum spielt der Mensch?

Es ist eine bemerkenswerte Grunderfahrung: **Der Mensch spielt**, sogar häufig und gerne! Das unterscheidet ihn von vielen anderen Lebewesen.

Homo ludens, der spielende Mensch: Im Spiel entdeckt und übt der Mensch seine Fähigkeiten, macht Erfahrungen und entwickelt seine Persönlichkeit. Er erprobt Handlungsfreiheit und eigenes Denken. Er erkennt und antizipiert die Konsequenzen seines Handelns.

Warum ist das so? **Alles Leben ist Problemlösen**, schrieb Karl Popper. Und erfahrungsgemäß führt uns das Leben immer wieder in Konflikte. Daher ist es überaus sinnvoll, Probleme vorher „durchzuspielen“. Die Evolution hat uns hierzu Neugier und Spielfreude geschenkt.

Die genauere Untersuchung führt uns zur **Spieltheorie**. Dies können wir ebenso gut *Konflikttheorie* nennen, oder *Theorie der strategischen Interaktion* oder *Interaktive Entscheidungstheorie*. Das klingt seriös aber leider auch schwerfällig. Die Bezeichnung *Spieltheorie* hat viele Vorteile: Sie ist kurz und knapp, sie klingt positiv und beschreibt die Situation recht treffend, und sie ist seit bald einhundert Jahren traditionell üblich.

Eigenschaften von Spielen

Anzahl der Akteure

- Ein Spieler: Geschicklichkeit, Steuerung, Optimierung
- Zwei Spieler: Tischtennis, Schach, Handel, Vertrag
- Drei und mehr Spieler: Wahlen, Koalitionen, Gesellschaft

Konkurrenz und Kooperation

- Nullsummen vs Win-Win: Marktaufteilung, Absprachen
- kooperativ vs nicht-kooperativ: Verträge, Nebenzahlungen

Zufall und Information

- deterministisch vs stochastisch: Go, Monopoly
- vollständige vs unvollständige Information: Lotto, Poker

Zeitlicher Verlauf

- parallel vs sequentiell: Schere-Stein-Papier, Quizz, Klausur
- diskret vs kontinuierlich: Brettspiele, Onlinespiele, Börse

Weitere Beispiele: Straßenverkehr, Schwarzfahren, Fußball, Elfmeter, Auktion, Schule/Uni, Karriere, Kirche, Kochen, Kindererziehung, etc.

Eigenschaften von Spielen

Spiele mit nur einem Akteur können bereits sehr anspruchsvoll sein:

Sie wollen mit einem Fahrzeug von A nach B kommen (Auto, Fahrrad, Schiff, Flugzeug, Raumsonde etc.). Damit dies überhaupt möglich ist, müssen Sie Ihr Vehikel zunächst steuern können. Zudem wollen Sie den besten Weg finden, Zeit und Aufwand minimieren, Nutzen maximieren.

In der Ökonomie muss jeder Akteur ähnliche Probleme lösen: Was ist möglich? Was ist erstrebenswert? Wie finde ich die beste Möglichkeit? Das führt zu Fragen und Methoden der mathematischen Optimierung.

Bei zwei oder mehr Spielern kommt es zur **Interaktion:** Das Ergebnis jedes Akteurs hängt nicht nur von seinen eigenen Entscheidungen ab, sondern auch von den Aktionen der anderen Akteure. Dabei kann es zu Konflikten kommen, sowohl zu Konkurrenz als auch zu Kooperation.

Die Liste der Beispiele und möglicher Anwendungen ist schier endlos. Die folgende Auswahl gibt hierzu ein paar Denkanstöße, sie sollen Ihre Neugier wecken und einen Ausblick auf weitere Kapitel umreißen.

Erste Bei-Spiele

Beim **Tischtennis** ist eher die physische Geschicklichkeit gefragt, beim **Schach** und ähnlichen Strategiespielen hingegen die mentale. **Handel** zwischen zwei Akteuren oder ein **Vertrag** ist ebenso ein Spiel: Jeder möchte sein Ergebnis maximieren, genau darum wird gerungen. Ab drei Spielern wird es kompliziert. . . und auch sehr spannend.

Wahlen sind ein großes und recht komplexes Spiel. In Deutschland leben etwa 83 Mio Menschen, davon sind etwa 61 Mio wahlberechtigt. Idealerweise sollte jeder so stimmen, wie er es ehrlich einschätzt, doch die informierte Einschätzung ist schwierig, zumal für mehrere Kriterien, die Entscheidung ist komplex, dies kann zu strategischer Wahl führen. Politische Akteure wissen das und handeln ihrerseits strategisch.

Wenn schon die Sachfragen kompliziert sind, dann sollten wenigstens die genutzten **Wahlverfahren** einfach und gerecht sein, nicht wahr? Bei der Wahl zwischen genau zwei Alternativen gelingt dies tatsächlich, doch ab drei Alternativen existiert leider kein perfektes Wahlverfahren. Dieses erstaunliche Ergebnis ist **Arrows Satz vom Diktator** (1951) und von Gibbard–Satterthwaite zur Manipulierbarkeit von Wahlverfahren.

Erste Bei-Spiele

Bei einem **Nullsummenspiel** muss der andere verlieren, was der eine gewinnt; wir denken an die Aufteilung eines Marktes konstanter Größe. Solche Spiele heißen etwas allgemeiner auch **strikt kompetitiv**.

Absprachen können zu einer **Win-Win-Situation** genutzt werden, also gegenseitigem Nutzen. Im Sinne eines **Kartells** ist dies illegal, da auf Kosten wehrloser Verbraucher. Betrachtet man diese als einen weiteren Spieler, so handelt es sich wieder um ein Nullsummenspiel.

Fußball ist normalerweise ein Nullsummenspiel: Ein Team gewinnt, das andere verliert. Turniere zeigen immer wieder Ausnahmen, etwa bei der WM 1982 die **Schande von Gijón**, als sich Deutschland und Österreich mit einem einvernehmlichen 1:0 trennten, zu Lasten von Algerien.

Bei **kooperativen** Spielen sind Absprachen und Verträge zwischen den Akteuren möglich, etwa im Rahmen vorgegebener **Vertragsgesetze**, manchmal auch Nebenzahlungen, gemeinhin Bestechung genannt.

Bei **nicht-kooperativen** Spielen ist dies nicht möglich oder nicht erlaubt. Vereinbarungen müssen innerhalb des Spiels selbst-stabilisierend sein, etwa durch glaubhafte Drohungen oder allgemein Nash–Gleichgewichte.

Erste Bei-Spiele

Zufall spielt oft eine wesentliche Rolle, allgemein im Leben wie auch in zahlreichen Spielen. Damit eng verknüpft ist die Frage der **Information**: Wer weiß wann was? Auch der **zeitliche Ablauf** des Spiels ist wichtig: Ziehen Spieler gleichzeitig oder immer streng nacheinander? in Runden nach einen vorgegebenen Takt oder jederzeit, kontinuierlich, asynchron?

Bei **Brettspielen** wie Monopoly wird gewürfelt, das Ergebnis ist danach allen Spielern bekannt. Bei **Kartenspielen** wie Poker hat jeder Spieler nur Teilinformation; er kennt seine Karten, aber nicht die der anderen.

Bei **Schnick-Schnack-Schnuck** (Schere-Stein-Papier) ist wesentlich, dass streng gleichzeitig gezogen wird. Das Spiel wäre sinnlos, wenn ein Spieler zuerst zieht, und der zweite diesen Zug bereits kennt. Stehen die Spieler mit dem Rücken zueinander, so ist Gleichzeitigkeit entbehrlich.

Eine **Klausur** dient als Stichprobe im Rahmen der vereinbarten Themen: Allzu leichte Vorhersehbarkeit mindert die repräsentative Aussagekraft, daher werden die Aufgaben möglichst zufällig gewählt, meist gewichtet. Ebenso wichtig ist, dass alle Teilnehmer die Klausur parallel schreiben, andernfalls wäre die Informationslage extrem ungleich und ungerecht.

Erste Bei-Spiele

Praktisch alles im Leben ist ein Spiel oder kann so gesehen werden. Die großen Weltreligionen fassen das gesamte Leben in dieser Form: Der Mensch wählt selbst seine Handlungen und wird dafür belohnt oder bestraft: Paradies / Himmel vs Hölle, Nirwana vs Wiedergeburt, usw.

Dieser Vergleich erscheint zunächst provokativ, manchem lächerlich, anderen blasphemisch, doch er hat durchaus einen ernsten Kern. Zu **Bibel und Moral** schrieb 2008 die Päpstliche Bibelkommission:

> *Die Sehnsucht nach Glück, das Verlangen nach einem erfüllten Leben, ist von jeher tief im menschlichen Herzen verwurzelt. Es hängt großenteils von unserem eigenen Handeln und von den Beziehungen zwischen uns Menschen ab, ob dieser Wunsch verwirklicht wird. Was ist aber dieses Handeln, das die einzelnen Personen, die Gemeinschaften und die Völker zu einem wahrhaft gelungenen Leben, zum Glück führt? Wie kann man es bestimmen?*

Ist das nicht eine spieltheoretische Problemstellung par excellence? Anschließend werden mögliche Lösungen theologisch ausgeführt:

> *Die Christen sind überzeugt, dass sie in der Bibel Hinweise und Normen finden für das rechte Handeln und so den Weg zur Fülle des Lebens.*

Wer interessiert sich für Spiele?

Wer interessiert sich für Spiele?

- Kinder und Erwachsene (auch als Eltern oder Erzieher)
- Spieledesigner und Programmierer (Computerspiele faszinieren)
- Mathematiker und Sozialwissenschaftler (menschliches Verhalten)
- Wirtschaftswissenschaftler und Anwender (It's the economy, stupid)
- Politiker, Strategen, Militärs (die dunkle Seite der Spieltheorie)
- Biologen und Evolutionstheoretiker (Entwicklung des Lebens)

Spiele und Konflikte sind eine uralte menschliche Grunderfahrung. Bemerkenswerterweise gab es hierzu lange keine geeignete Theorie. Bis in die 1920er Jahre fehlte den Wirtschaftswissenschaften eine geeignete Sprache zur quantitativen Erfassung und Untersuchung.

Hierzu braucht es raffinierte Mathematik! Erste Untersuchungen unternahm in den 1920er Jahren der Mathematiker Emile Borel.

Der Durchbruch gelang 20 Jahre später. Der Mathematiker John von Neumann und der Ökonom Oskar Morgenstern legten hierzu 1944 die Grundlage mit ihrem bahnbrechenden Lehrbuch *Spieltheorie und ökonomisches Verhalten*. Es gilt als Geburtsurkunde der Spieltheorie.

Spieltheorie: Gründungsväter

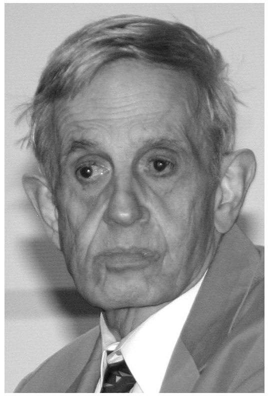
Emile Borel
(Saint-Affrique 1871 – Paris 1956)

John von Neumann
(Budapest 1903 – Washington 1957)

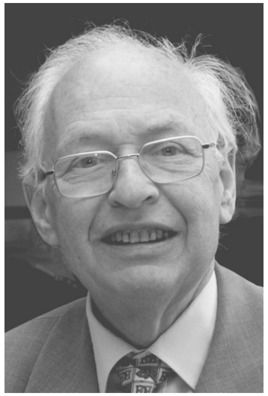
Oskar Morgenstern
(Görlitz 1902 – Princeton 1977)

1921: *La Theorie du jeux*
1928: *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*
1944: *The Theory of Games and Economic Behavior*

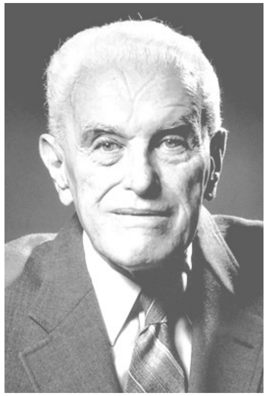
Spieltheorie: zweite Generation



John Nash
(Bluefield/WV 1928 – Monroe Township/NJ 2015)



Reinhard Selten
(Breslau 1930 – Posen 2016)



John C. Harsanyi
(Budapest 1920 – Berkeley/CA 2000)

Alfred-Nobel-Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften 1994:
für ihre Pionierarbeit zu Gleichgewichten in nicht-kooperativen Spielen

Nobelpreise für Spieltheorie

Der Alfred-Nobel-Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften wird seit 1969 vergeben, darunter immer wieder für Arbeiten der Spieltheorie:

1994: für Pionierarbeit zu Gleichgewichten in nicht-kooperativen Spielen
2005: für die Analyse von Konflikt und Kooperation durch Spieltheorie
2007: für die Grundlegung der Theorie des Mechanismendesigns

Spieltheorie gehört zur **Mikroökonomie**, denn sie untersucht das Verhalten einzelner Akteure (Menschen, Haushalte, Unternehmen). Die **Makroökonomie** untersucht übergeordnete Größen (Kennzahlen): Investition und Konsum, Export und Import, staatliche Ausgaben und Steuern, etc. Beide Sichtweisen ergänzen sich. Die **Mikrofundierung** versucht, die Makroökonomie durch die Mikroökonomie zu erklären.

Ich werde über Spiel*theorie* sprechen, also mathematische Modelle und Methoden. Bevor ich Sie damit jedoch erleuchte oder verwirre, möchte ich gerne ein Experiment durchführen. Damit betone ich das empirische Gegenstück zur mathematischen Theorie: die experimentelle Ökonomie. Hier versucht man, konkrete Situationen zu verstehen, reale Daten zu erheben, und daran die Theorie zu testen bzw. zu kalibrieren.

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

Zwei Spieler A und B interagieren anonym über eine Datenleitung.
Sie (er)kennen sich nicht und begegnen sich vermutlich nie wieder.

A: 10			B: 0
	$-x$ ↘	$+2x$	
A: $10-x$			B: $2x$
	$+y$ ↙	$-y$	
A: $10-x+y$			B: $2x-y$

Zu Beginn erhält Spieler A ein Guthaben von 10€, Spieler B nur 0€.

Erster Zug: A schickt an B einen frei wählbaren Betrag $x \in \{0, 1, \dots, 10\}$.
Dieser Betrag x wird bei A abgebucht und bei B doppelt gutgeschrieben.

Zweiter Zug: B schickt an A davon einen Betrag $y \in \{0, 1, \dots, 2x\}$.
Dieser Betrag y wird bei B abgebucht und bei A gutgeschrieben.

Damit endet das Spiel und jedem wird sein Kontostand ausbezahlt.
Wichtig: Es gelten nur diese Regeln, und sonst keine weiteren.

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

Beispiel 1: A schickt 4€, B schickt 3€ zurück. ☹ A macht Verlust.

A: 10			B: 0
	-4 ↘	$+8$	
A: 6			B: 8
	$+3$ ↙	-3	
A: 9			B: 5

Beispiel 2: A schickt 7€, B schickt 9€ zurück. ☺ Beide profitieren.

A: 10			B: 0
	-7 ↘	$+14$	
A: 3			B: 14
	$+9$ ↙	-9	
A: 12			B: 5

Beachte: Der zweite Zug ist ein Nullsummenspiel, der erste Zug nicht!

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

Das ist ein einfaches, aber typisches Modell wirtschaftlichen Handelns.

Wir können die Interaktion als **Kredit und Rückzahlung** interpretieren:
Spieler A verleiht einen Teil seines Geldes, Spieler B erwirtschaftet damit eine Verdopplung und zahlt zurück: Tilgung plus Zinsen?

Allerdings gibt es keinen Vertrag und keine Strafen!

Ebenso können wir es als **Online-Handel** interpretieren: Spieler A geht in Vorleistung und verschickt die Ware, für Spieler B ist diese doppelt so nützlich / wertvoll, schließlich bezahlt B nach seinem eigenen Ermessen.

Zugegeben, dieses Modell ist allzu simpel und eher unrealistisch, insbesondere fehlen hier alle üblichen Kontrollmechanismen.

Der große Vorteil ist jedoch: Alle Regeln sind klar und einfach.
Wir können es vollständig analysieren und verstehen.

Das ist ein stark vereinfachtes Modell, sozusagen ein Laborexperiment.
Wir blenden alles andere aus und untersuchen es unter dem Mikroskop.

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

Wir haben dies für Sie als Online-Spiel implementiert:

`www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/spiele`

Stufen der Rationalität

Definition A2A (Stufen der Rationalität)

Unter **Rationalität** fassen wir folgende Axiome zusammen:

$\mathscr{R}_0$: Jeder Spieler will seinen Gewinn maximieren.

$\mathscr{R}_1$: Jeder Spieler kennt und versteht die Regeln des Spiels.

$\mathscr{R}_2$: Es gelten die Aussagen $\mathscr{R}_0, \mathscr{R}_1$, und jeder Spieler weiß dies.

$\mathscr{R}_3$: Es gilt die Aussage $\mathscr{R}_2$, und jeder Spieler weiß dies.

etc... Genauer definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ die Aussage

$\mathscr{R}_n$: Es gilt die Aussage $\mathscr{R}_{n-1}$, und jeder Spieler weiß dies.

$\mathscr{R}_\infty$: Es gelten die Aussagen $\mathscr{R}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Axiome $\mathscr{R}_0$ und $\mathscr{R}_1$ sind extrem wichtige Annahmen für die Spieltheorie: Erst damit können wir das Spielerverhalten mathematisch analysieren. Je nach Spiel nutzen wir auch die Verschärfungen $\mathscr{R}_2, \mathscr{R}_3, \mathscr{R}_4, \ldots$ usw.

In Spielanalysen bzw. Beweisen ist es meist nützlich anzugeben, welche Stufe $\mathscr{R}_n$ der Rationalität wir benutzen bzw. voraussetzen.

Stufen der Rationalität

Diese Axiome sind die Grundlage der Spieltheorie. Wir müssen sie daher gründlich verstehen und an zahlreichen Beispielen diskutieren.

Als Warnung bzw. freundliche Enttäuschung schicke ich gleich vorweg: Diese Idealisierungen gelten in vielen Anwendungen überhaupt nicht! Diese Eigenschaften sind zwar wünschenswert, aber oft nicht erfüllt.

Axiom $\mathscr{R}_0$ bedeutet: Die im Spiel formulierte Nutzenfunktion erfasst das Wesentliche. Wir verkneifen uns danach metaphysische Spekulationen über Moral, Ethik, Gerechtigkeit, Egoismus vs Altruismus, Erziehung, Tradition, Religion, Sünde, Fegefeuer, jüngstes Gericht, Karma, etc...

Damit will ich nicht behaupten, dass diese Fragen unwichtig wären, sie liegen nur schlicht außerhalb der Reichweite unseres mathematischen Modells. Sie sind nicht Teil des von uns untersuchten Spiels.

Wenn wir diese Begriffe in der Spieltheorie betrachten wollen, und das sollten wir, dann dürfen wir sie nicht implizit und vage dazufabulieren, sondern müssen sie explizit und präzise im Spiel kodieren.

Stufen der Rationalität

Axiom $\mathscr{R}_1$ bedeutet: Jeder Spieler kennt und versteht die Regeln des Spiels, er kennt alle Handlungsoptionen und deren Konsequenzen.

Das ist eine zentrale, aber manchmal allzu starke Annahme: Für das Spiel Schach kenne ich zwar alle Regeln, aber nicht alle Konsequenzen. Mir fehlt die Rechenkapazität, ausreichend viele Züge vorauszudenken.

Das gilt selbst für sehr einfache Spiele, wie unsere folgenden Beispiele. Sie werden erfahren, dass Sie zwar die Regeln verstehen, aber nicht sofort alle Konsequenzen erkennen. Wir sehen das daran, dass Sie als Spieler nicht sofort die beste Strategie wählen, sondern noch Fehler machen. Sie beherrschen das Spiel erst nach einiger Übung!

Gerade hierzu ist es wichtig, diesen Vortrag mit konkreten Beispielen aufzubauen, die Sie dann auch ernsthaft bearbeiten und lösen sollen. Andernfalls hören Sie schöne Theorie und glauben, damit sei alles klar.

Die Wirklichkeit ist viel komplizierter... und auch viel interessanter! Neben der Spieltheorie lohnt sich auch das soziale Experiment.

Stufen der Rationalität

Axiome $\mathscr{R}_2$, $\mathscr{R}_3$ usw. kodieren gegenseitige Einschätzungen der Spieler. „Als Spieler verhalte ich mich rational. Dazu muss ich das Verhalten der anderen Spieler vorhersehen, antizipieren, besser gesagt: berechnen. Am besten gelingt mir dies, wenn ich weiß, dass auch die anderen Spieler sich rational verhalten. Davon will und muss ich ausgehen.“

Wir nennen dies **gemeinsames Wissen**, engl. *common knowledge*. Es genügt nicht, dass etwas wahr ist, es muss auch jeder wissen. Und man muss sich darauf verlassen können, dass es jeder weiß. Und auch darauf, dass jeder weiß, dass jeder es weiß. Usw.

Das ist ein allgemeines und wichtiges Konzept: Das Wissen eines Spielers besteht neben seiner reinen Sachkenntnis auch aus seinem Metawissen über das Wissen der anderen Spieler. „Ich weiß, dass du weißt, dass ich weiß, ...“. Das klingt vertrackt und ist es auch meistens.

Für die Analyse von Spielen ist die Verteilung von Wissen und der Zugang zu Information von zentraler Bedeutung.

Beispiel: Kuchen teilen

Aufgabe: Zwei Kinder, Alice und Bob, teilen sich einen Schokokuchen. Damit es gerecht zugeht, gibt der Vater vor: Alice teilt, Bob wählt aus. Was wird passieren? rational? irrational? Ist das Ergebnis gerecht?

Lösung: $\mathscr{R}_0$: Jedes Kind will möglichst viel Schokokuchen. Diese stillschweigende Annahme ist wesentlich für unser Modell!

$\mathscr{R}_1$: Bob wird das größere Stück erkennen und sich nehmen. Er kann beide Stücke anschauen oder wiegen, um sicher zu gehen.

$\mathscr{R}_2$: Alice weiß, dass sie das kleinere Stück bekommen wird. Daher schneidet Alice zwei möglichst gleich große Stücke.

🙂 Dieses einfache Beispiel illustriert die Stufen der Rationalität. Alle Voraussetzungen sind tatsächlich nötig für unsere Analyse!

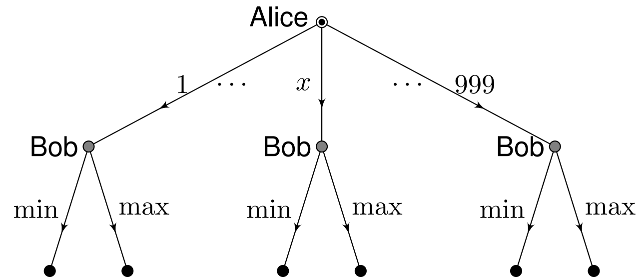
🙂 Wir werden später strategische Spiele in Normalform erklären und diese Lösung als (das einzige) Nash–Gleichgewicht wiedererkennen.

Übung: Sobald Sie die Techniken kennen, führen Sie dies aus!

Beispiel: Kuchen teilen

Auszahlungsmatrix (statisch) und Spielbaum (dynamisch) in Gramm:

Alice \ Bob	wähle Min	wähle Max
$x < 500$	$1000-x$ \ x	x \ $1000-x$
$x = 500$	500 \ 500	500 \ 500
$x > 500$	x \ $1000-x$	$1000-x$ \ x



Beispiel: Kuchen teilen

⚠ Ohne Rationalität ist eine Analyse / Prognose nahezu unmöglich:

$\mathscr{R}_0$: Wenn Alice oder Bob gar keinen Schokokuchen mag, dann können wir kaum vernünftige Vorhersagen machen.

$\mathscr{R}_1$: Vielleicht ist Bob noch jung und unerfahren und kann die Größe von Kuchenstücken nicht treffsicher vergleichen. Die Masse könnte er leicht und zerstörungsfrei wiegen, zum Vergleich genügt eine Balkenwaage. Auch das Volumen könnte er leicht bestimmen, mit dem Archimedischen Prinzip durch Wasserverdrängung. (Das gibt vermutlich Sauerei.)

Andernfalls täuschen ihn vielleicht komplizierte Formen, etwa fraktale Kuchenstücke, nicht-messbare Mengen etc. Vielleicht möchte Alice genau dies provozieren, falls sie so etwas überhaupt herstellen kann.

$\mathscr{R}_2$: Ist Alice irrational so könnte sie ein großes Stück schneiden und naiv hoffen, Bob nimmt das kleinere. Ist Bob rational, so wird er das nicht tun.

Wenn Bob sich leicht täuschen ließe, könnte Alice zwei ungleiche Stücke so schneiden, dass Bob das kleinere und das größere verwechselt. Wenn Bob das jedoch durchschaut, dann steht Alice schlechter da.

Beispiel: Kuchen teilen

Ist das Ergebnis „fair“ oder „gerecht“? Nun ja, das kommt darauf an… Dies sind zunächst keine klar festgelegten Begriffe. Dazu müssten wir die Ziele „Fairness“ oder „Gerechtigkeit“ erst genauer definieren und dann anhand objektiver und nachvollziehbarer Kriterien prüfen.

Wenn das erklärte Ziel ist, den Kuchen möglichst hälftig aufzuteilen, dann wird dies durch das Spiel „Die eine teilt, der andere wählt“ recht gut implementiert. Dazu müssen beide Spieler „nur“ rational handeln und zudem die Spielaktionen sicher und präzise ausführen können.

- Wenn Alice präzise schneiden kann, aber Bob nur grob schätzen, dann ist Alice im Vorteil, und das Spiel verläuft zu ihren Gunsten.
- Wenn Bob präzise schätzen kann, aber Alice nur grob schneiden, dann ist Bob im Vorteil, und das Spiel verläuft zu seinen Gunsten.

Wenn wir uns Alice und Bob wirklich als kleine Kinder vorstellen, dann hängt die Fairness von ihrem Alter und ihren Fähigkeiten ab. Die Asymmetrie des Spiels könnten wir per Münzwurf beheben, eine eventuelle Asymmetrie der Fähigkeiten hingegen nicht!

Beispiel: die Erbschaft

Aufgabe: Alice und Bob erben $1\,000\,000$€. Das Testament verlangt: Alice nennt dem Notar eine Teilung, x für Bob und $1\,000\,000 - x$ für Alice. Dies kann Bob nun annehmen… oder ablehnen, dann verfällt das Erbe. Was wird passieren? rational? irrational? Ist das Ergebnis gerecht?

Lösung: $\mathscr{R}_0$: Jeder will seine Auszahlung maximieren. Diese stillschweigende Annahme ist wesentlich für unser Modell!

$\mathscr{R}_1$: Bob wird jeden Vorschlag $x > 0$ annehmen. Das ist vielleicht wenig, aber immer noch besser als nichts.

$\mathscr{R}_2$: Alice weiß dies und schlägt $x = 1$€ vor.

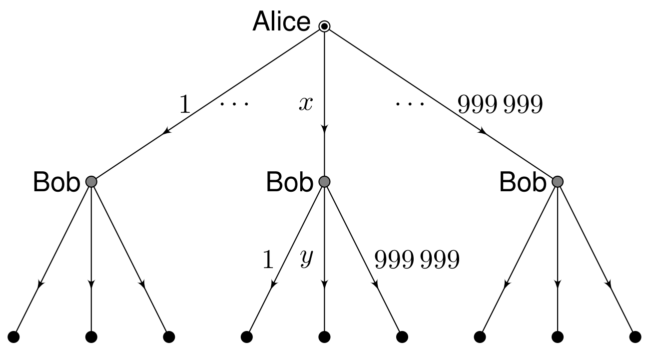
Dieses einfache Beispiel illustriert die Stufen der Rationalität. Alle Voraussetzungen sind tatsächlich nötig für unsere Analyse!

Wir werden später dynamische Spiele erklären und diese Lösung als (das einzige teilspielperfekte) Gleichgewicht wiedererkennen.

Übung: Sobald Sie die Techniken kennen, führen Sie dies aus!

Beispiel: die Erbschaft

Wir interpretieren das Spiel wie folgt: Alice bietet $x \in \{1, 2, \dots, 999\,999\}$. Bob fordert anschließend $y \in \{1, 2, \dots, 999\,999\}$. Bei Einigung ($x \geq y$) tritt die Aufteilung $(1\,000\,000 - x, x)$ in Kraft, andernfalls verfällt das Erbe.



Hier ist die zeitliche Reihenfolge entscheidend: Alice macht ihr Angebot und kann nicht mehr zurück, Bob ist daher unter Zugzwang. Muss Bob zuerst fordern, so ist es umgekehrt. Als Variante ist auch gleichzeitige verdeckte Abgabe von Alice' Angebot und Bobs Forderung denkbar.

Beispiel: die Erbschaft

Ohne Rationalität ist eine Analyse / Prognose nahezu unmöglich:

$\mathscr{R}_0$: Wenn Alice oder Bob gar kein Geld haben wollen, dann können wir kaum vernünftige Vorhersagen machen.

$\mathscr{R}_1$: Wir gehen hier davon aus, dass Bob streng rational ist. „Wer den Euro nicht ehrt, ist das Erbe nicht wert." Ist das zwingend? Vielleicht hat Bob ein extremes Gerechtigkeitsempfinden und wird nur den Vorschlag $x = 500\,000$€ akzeptieren, nicht weniger, aber auch nicht mehr. Das ist irrational, aber möglich. Vielleicht hat Bob $850\,000$€ Schulden und wird von einem Killer verfolgt, dann würde er nur $x \geq 850\,000$€ akzeptieren.

$\mathscr{R}_2$: Wenn Alice an Bobs Rationalität zweifelt, dann sollte sie ihre Strategie anpassen. Zum Beispiel könnte Bob drohen: „Alles unter $300\,000$€ werde ich ablehnen." Aber ist diese Drohung glaubwürdig? Wird er das wirklich tun, wenn er vor der endgültigen Entscheidung steht? Wenn er rational ist, sicher nicht! Andernfalls vielleicht doch…

Alice muss also die Rationalität von Bob einschätzen. Das ist schwierig. Der Idealfall ist perfekte Rationalität, aber das ist nicht immer realistisch.

Beispiel: die Erbschaft

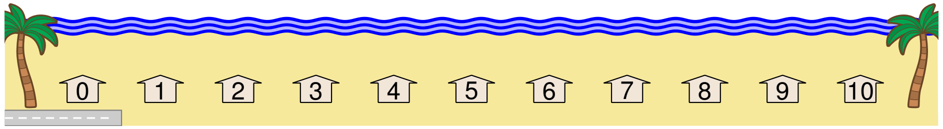
Ist das Ergebnis „fair" oder „gerecht"? Nun ja, das kommt darauf an… Dies sind zunächst keine klar festgelegten Begriffe. Dazu müssten wir die Ziele „Fairness" oder „Gerechtigkeit" erst genauer definieren und dann anhand objektiver und nachvollziehbarer Kriterien prüfen.

- Wenn das erklärte Ziel ist, das Erbe möglichst hälftig aufzuteilen, dann wird es durch das Testament denkbar schlecht implementiert.
- Wenn das Ziel nur ist, das Testament wortgetreu auszuführen, dann erfüllt das beschriebene, rationale Verhalten genau dies.

Genauso gut hätte der Erblasser die Aufteilung $999\,999$€ für Alice und 1€ für Bob im Testament festlegen können. Ist das un/fair? Das Testament ist ungewöhnlich, aber nicht zwangsläufig un/gerecht; dazu müssten wir viel mehr Vorgeschichte und Kontext kennen.

Ist das Erbe ausgleichende Un/Gerechtigkeit für früheres Verhalten? Und was ist mit Chuck, der nicht erwähnt wurde und nichts bekommt? Vielleicht wäre es besser, das Erbe verfällt an wohltätige Zwecke… Vielleicht will der Erblasser Alice und Bob eine Lehre erteilen?

Beispiel: Kiosk am Strand



Sie eröffnen einen Kiosk, mögliche Positionen sind $x \in \{0, 1, \dots, 10\}$. Die Badegäste sind gleichverteilt und gehen immer zum nächsten Kiosk. Jeder Spieler (Kiosk) maximiert seine Kundenzahl (Umsatz, Marktanteil). Bei sonst gleichem Anteil sucht jeder die Nähe zur Zufahrtstraße 0.

Aufgabe: (1) Sie haben die einzige Lizenz. Wo bauen Sie Ihren Kiosk? (2) Sie haben die erste von zwei Lizenzen. Wo bauen Sie Ihren Kiosk? (3) Sie haben die erste von drei Lizenzen. Wo bauen Sie Ihren Kiosk? Finden Sie zu jedem Zug von A die beste Antwort von B und von C!

Lösung: Bei rationalem Verhalten finden wir folgende Anordnungen:

(1)	A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(2)	0	1	2	3	B	A	6	7	8	9	10
(3)	0	1	B	C	4	5	6	7	A	9	10

Beispiel: Kiosk am Strand

Ausführlich: Frage (1) wird gelöst durch die offensichtliche Optimierung. Bei Frage (2) suchen wir zu jeden Zug von A die beste Antwort von B:

A	B										$1:10$
	A	B									$2:9$
		A	B								$3:8$
			A	B							$4:7$
				A	B						$5:6$
				B	A						$6:5$
					B	A					$5:6$
						B	A				$4:7$
							B	A			$3:8$
								B	A		$2:9$
									B	A	$1:10$

Versuchen Sie, die Lösung sauber aufzuschreiben: Wie organisieren Sie Ihre Notation und Ihre Argumente möglichst klar und nachvollziehbar?

Beispiel: Kiosk am Strand

Frage (3) ist länger, wir müssen systematisch und sorgfältig vorgehen. Dies ist ein einfach-schönes Beispiel der kombinatorischen Spieltheorie: Wir durchsuchen hier einen endlichen Entscheidungsbaum, zählen alle Möglichkeiten auf und sortieren sie nach den Kriterien der Rationalität.

⚠ Jeder Spieler muss bei seiner Analyse Annahmen machen über die Rationalität seiner Mitspieler. Ich nenne hierzu ein einfaches Beispiel:

Wäre B gierig und dumm, dann wäre Platz 4 für A ein guter Zug: Spieler B wird kurzsichtig Platz 5 wählen, und Spieler C folgt auf Platz 6.

				A	B	C				

Sind B und C rational, dann wäre Platz 4 für A ein schlechter Zug: Spieler B wird schlau Platz 6 wählen, und Spieler C folgt auf Platz 3.

			C	A		B				

Um unsere Analyse zu vereinfachen, nehmen wir hier vollständige Rationalität an, wie oben erklärt. Damit wird das Kioskproblem stark vereinfacht und lösbar durch eine kombinatorische Optimierung.

Beispiel: Kiosk am Strand

Aufgabe: Diskutieren und lösen Sie das Problem für drei Kiosklizenzen. Versuchen Sie, Ihre Lösung sauber aufzuschreiben: Wie organisieren Sie Ihre Notation und Argumente möglichst klar und nachvollziehbar?

Wenn Sie Freude daran haben, diskutieren Sie Erweiterungen:
Was passiert, wenn Kiosk A und C demselben Spieler gehören?
Was passiert, wenn Kiosk B und C demselben Spieler gehören?
Was passiert, wenn Kiosk A und B demselben Spieler gehören?

Aufgabe: Wenn Sie gerne programmieren, dann können Sie die einfachen, aber länglichen Aufzählungen einem Computer übertragen.

Tipp: Lösen Sie so am besten gleich das allgemeine Problem für einen Strand der Länge ℓ und k Kiosklizenzen, wobei $1 \leq k \leq \ell$. (Der Spezialfall $k = 3$ ist einfacher und auch schon interessant.)

Herausforderung: Erweitern Sie dies zu Koalitionen, wobei sich die Kioske in feste Gruppen einteilen, so wie Geschäfte einer Kette. Denkbar sind zwei Spieler, die abwechselnd ihre Kioske setzen. Noch kniffliger: Der Zufall entscheidet, wer als nächster setzt.

Ein Spiel, viele Anwendungen

Es geht in der Spieltheorie einerseits um konkrete Spiele und Strategien, um explizite Probleme und präzise Lösungen, um rationales Handeln, empirisch notgedrungen ebenso um begrenzt rationales Verhalten. Auf präzise Fragen erhoffen wir uns genauso präzise Antworten.

Andererseits geht es auch um gemeinsame Muster und Mechanismen. Wenn Alice und Bob einen Kuchen oder ein Erbe teilen, dann beschreibt das auch allgemeinere Verhandlungssituationen, zumindest im Prinzip. Die Details sind sicher verschieden, aber die Mechanismen sind ähnlich.

Die hier untersuchten Spiele sind stark vereinfacht, manchmal lächerlich, oft genug übertrieben simpel, doch sie treffen häufig einen wahren Kern. Solch konkrete Beispiele benennen und repräsentieren typische Muster. Ihre Einfachheit zeigt den Problemkern besonders klar und deutlich.

In konkreten Anwendungen müssen wir genaue Daten berücksichtigen, es gibt viel mehr Wenn-und-Aber, und all das ist auch gut und richtig so. Dennoch: Nach Sichtung und Abwägung aller Details, stellt sich in erster Näherung oft genug ein ganz einfaches Muster als wesentlich heraus, als dominierender Term, als hauptsächlicher Kern des Problems.

Ein Spiel, viele Anwendungen

Das Strandkiosk-Problem ist eine schöne kombinatorische Aufgabe. Sie steht hier stellvertretend für ähnliche Spiele, allgemein für Konflikte um eine räumliche Marktaufteilung, Konkurrenz um Marktanteile, etc.

Mögliche Anwendungen gehen wesentlich weiter als auf den ersten Blick erscheint. Der Kampf um den Strand kann auch anderes darstellen!

Danken Sie zum Beispiel an ein politisches Spektrum, die verbreitete Sprechweise von „links“ und „rechts“ ist eine hilfreiche Vereinfachung. Wir gehen davon aus, dass Wähler über das Spektrum verteilt sind und immer genau die Partei wählen, die ihrer Position am nächsten liegt.

Wenn es nur eine Partei A gibt, wie positioniert sie sich im Spektrum? Nun, das ist eigentlich egal, da sie alle Wählerstimmen vereinigt. Das ist in Ein-Parteien-Staaten tatsächlich zu beobachten.

Wenn es aber zwei Parteien A und B gibt, wie positioniert sich die erste? Genau dieses Problem haben wir oben gelöst! Tatsächlich beobachten wir in der politischen Debatte den Kampf um die „Mitte der Gesellschaft“. Jetzt wissen Sie etwas genauer, warum das strategisch sinnvoll ist.

Ein Spiel, viele Anwendungen

Moment mal, können wir das banale Strandkiosk-Problem ernsthaft vergleichen mit hochkomplizierten parteipolitischen Strategien? Genau genommen natürlich nicht, aber grob gesagt schon.

Das ist die Stärke und zugleich die Begrenzung abstrakter Modelle: Sie treffen den Kern des Problems, sie sind einfach und übersichtlich und leicht zu verstehen, sie taugen wunderbar als erste Näherung.

Sie dienen als Ausgangspunkt und Orientierung für die Anwendungen.

Für eine genauere Analyse im konkreten Einzelfall dürfen wir natürlich nicht stur bei dieser Grundidee verharren, sondern müssen wesentlich weiter gehen und genauer hinschauen. Im obigen Parteienbeispiel:

- Die politische Landschaft ist heute nicht (mehr) eindimensional.
- Das Wählerverhalten ist nicht (mehr) ganz so einfach vorhersehbar.
- Der Kampf um den linken / rechten Rand ist ein heikler Balanceakt.

Dennoch: Nach Sichtung und Abwägung aller Details, stellt sich in erster Näherung oft genug ein ganz einfaches Muster als wesentlich heraus, als dominierender Term, als hauptsächlicher Kern des Problems.

Ein Spiel, viele Anwendungen

Das also war des Pudels Kern!
(Johann Wolfgang von Goethe, 1749–1832, *Faust I*)

Wir werden dieses Phänomen noch des Öfteren beobachten: Selbst einfache Spiele treffen den wahren Kern eines Konflikts.

Ich nenne dies versuchsweise das **Pudelprinzip** der Spieltheorie, um einen ansprechenden und öffentlichkeitswirksamen Namen zu geben. Physiker sprechen hier traditionell nüchtern von der **ersten Näherung**, die bei Bedarf durch die zweite, dritte, ... Näherung verfeinert wird.

Das **Modell**, das wir von der **Realität** entwerfen, hilft und leitet uns, doch niemals sollten wir naiv das Modell für die Wirklichkeit halten. Von dieser ersten Näherung ausgehend können wir unser Modell je nach Bedarf verfeinern und konkreten Gegebenheiten anpassen.

Die Wirklichkeit ist komplizierter als sie auf den ersten Blick scheint. Gerade deshalb lohnen sich mathematische Präzision und Sorgfalt. Das mathematische Modell dient uns als Grundlage und als Maßstab, selbst wo es versagt, für die Abweichung von Prognose und Experiment.

Beispiel: drohen oder nachgeben?

	USA	EU
⓪ Start		
① USA drohen nicht.	5	9
② USA drohen mit Zöllen.		
③ Europa gibt nach.	6	7
④ Europa droht ebenfalls.		
⑤ USA lenken ein.	4	8
⑥ Es kommt zum Handelskrieg.	3	6

Aufgabe: Was wird passieren? rational? irrational?

Lösung: $\mathscr{R}_0$: Jeder maximiert sein Ergebnis (wie rechts gezeigt).
$\mathscr{R}_1$: Vor einem Handelskrieg im 3. Zug lenken die USA ein (vorteilhaft).
$\mathscr{R}_2$: Die EU weiß dies, also wird sie im 2. Zug drohen (vorteilhaft).
$\mathscr{R}_3$: Die USA wissen dies, also werden sie im 1. Zug nicht drohen.

Beispiel: drohen oder nachgeben?

Die Zahlen rechts bewerten jeden der möglichen Ausgänge für die USA und die EU auf einer (fiktiven) Werteskala. Wir denken an eine geeignete Gewichtung aus wirtschaftlichem Ertrag und politischem Ansehen.

Solche Zahlen sind schwer zu ermitteln und werden heftig debattiert. Wir nehmen für unser Modell diese Zahl an und analysieren die Situation auf dieser Grundlage. Andere Kalibrierungen sind möglich.

⚠ Alle Voraussetzungen sind tatsächlich nötig für unsere Analyse!

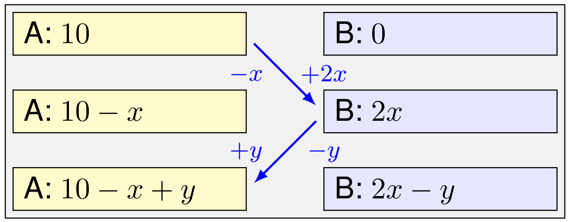
$\mathscr{R}_1$: Sind die USA irrational, so könnten sie sich im 3. Zug für einen Handelskrieg entscheiden, obwohl dies zu ihrem Nachteil wäre. Das kann an einer falschen Einschätzung der Situation liegen, anderen Bewertungen, oder allgemein an mangelnder Rationalität.

$\mathscr{R}_2$: Im 2. Zug muss die EU daher die Rationalität der USA einschätzen. Gegen einen Wahnsinnigen wäre es tatsächlich besser einzulenken!

$\mathscr{R}_3$: Im 1. Zug hätten die USA also Interesse daran, für wahnsinnig gehalten zu werden: Das entspricht einem Bluff. Nur dann wäre es rational, mit einer ersten Drohung die Eskalation einzuleiten.

Nochmal unser Experiment: „Hin-und-Rück“

Im Lichte dieser Erkenntnisse spielen wir erneut „Hin-und-Rück“.



Aufgabe: Maximieren Sie Ihre Erträge bei diesem Spiel!
Wie gelingt das rational? für Spieler B? für Spieler A?

Sie kennen dieses Spiel aus dem ersten Durchgang. Wir spielen es nun ein zweites Mal. Anders als beim ersten Mal haben Sie nun wesentlich mehr Spielerfahrung und zudem einen genauen Begriff der Rationalität. Vor allem aber wissen Sie jetzt, wie die anderen sich verhalten (haben). Versuchen Sie beim zweiten Durchgang, Ihre Erträge zu maximieren!

Nochmal unser Experiment: „Hin-und-Rück“

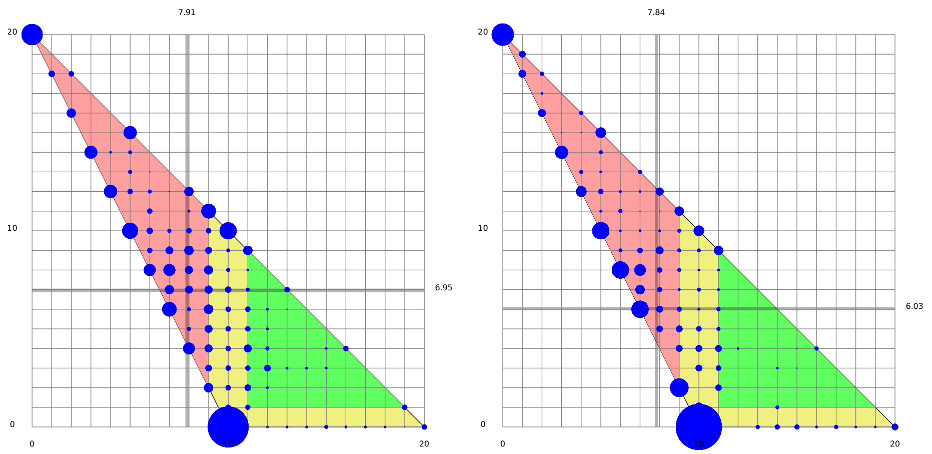
Dieses Experiment ist für die Teilnehmer zunächst nur ein Spiel. Zugleich ist es auch ein Messinstrument für soziale Interaktion. Die empirischen Ergebnisse sind lehrreiche Messwerte: Manche Teilnehmer verhalten sich eher egoistisch, andere eher altruistisch.

Was genau die Spielerpopulation tun wird, lässt sich kaum vorhersagen, sondern nur experimentell messen. Die Auswertung zeigt ein Abbild unserer (kleinen) Gesellschaft und misst das gegenseitige Vertrauen. Diese Information benötigen / schätzen rationale Spieler bei ihrer Wahl.

Kaum jemand spielt vollkommen rational, und das ist für alle vorteilhaft: Im Durchschnitt zahlt sich das Wagnis der Kooperation tatsächlich aus! Wir werden später für wiederholte Spiele erklären, wie sich kooperatives Verhalten langfristig begründen lässt, siehe Nash Folk Theorem F2E.

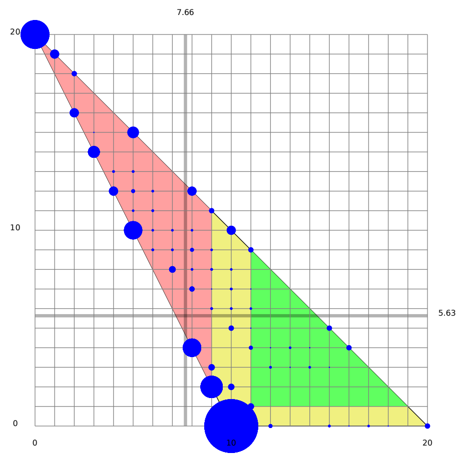
Hier jedoch wird das Spiel nur einmal gespielt, oder bei mehrfachem Spiel immer neue Spieler ausgelost. Die beobachtete Kooperation ist hier nicht rational. Sie beruht vermutlich auf begrenzter Rationalität sowie der Trägheit unserer Verhaltensmuster und sozialen Normen.

Unser Experiment „Hin-und-Rück“



Momentaufnahmen der Studentenpopulation vom 10. April 2018.
Die Graphiken zeigen alle Spielergebnisse für Spieler A und B.

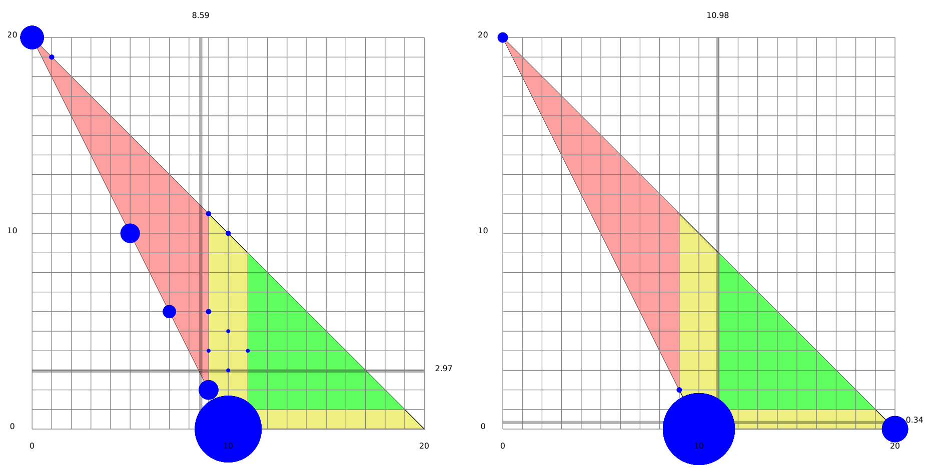
Unser Experiment „Hin-und-Rück“



Die Graphiken zeigen deutlich eine Entwicklung, anfangs zaghaft, dann beschleunigt. Die Spieler erkennen schnell (durch empirische Erfahrung oder mathematische Analyse), dass sich Kooperation für B hier nicht lohnt. Im nächsten Schritt erkennen sie, dass sich Kooperation dann auch für A nicht lohnt. Das Spielverhalten durchläuft so eine Evolution und steuert auf ein Gleichgewicht zu.

Momentaufnahmen der Studentenpopulation vom 10. April 2018.
Die Graphiken zeigen alle Spielergebnisse für Spieler A und B.

Unser Experiment „Hin-und-Rück“



Momentaufnahmen der Studentenpopulation vom 24. April 2018.
Durch Erfahrung (und Vorlesung?) ändert sich das Spielverhalten.

Unser Experiment „Hin-und-Rück“

Die Daten wurden nicht unter kontrollierten Laborbedingungen erhoben, dennoch sind sie überaus interessant: Es ist unser eigenes Verhalten!

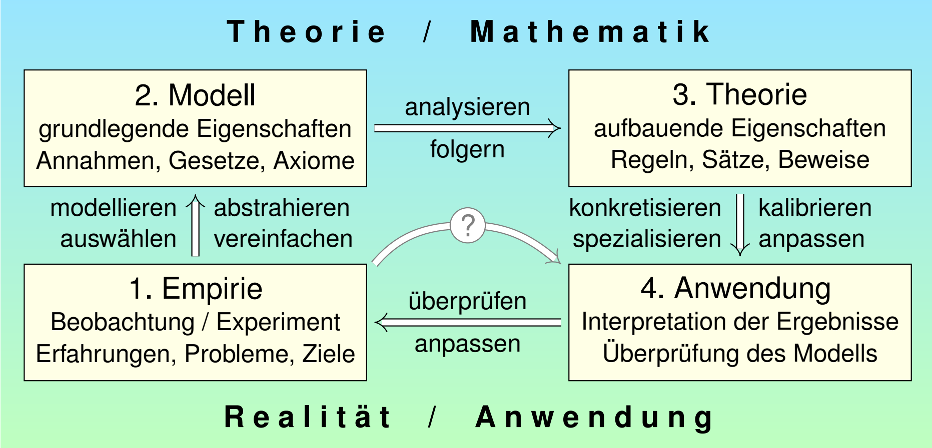
Die Veränderungen zwischen den Durchgängen sind aufschlussreich. Durch zunehmende praktische Erfahrung und theoretische Kenntnisse verbessert jeder Spieler seine individuelle Strategie. Im Gesamtbild nehmen die Egoisten zu und die Altruisten ab. Der Gesamtertrag sinkt!

Die trickreichen Regeln belohnen nicht Kooperation, sondern Egoismus. Dieses Spiel provoziert ein berühmtes Paradox: Jeder einzelne Spieler versucht rational, seinen Profit zu maximieren. Die Gesellschaft wird im Gesamtbild egoistischer, das gegenseitige Vertrauen sinkt, damit auch der Gesamtertrag. Lokale Maximierung führt in ein globales Minimum.

Dem einen oder der anderen wird dieses Ergebnis sehr missfallen, es mag sogar schockieren: Obwohl Kooperation möglich ist und zu beiderseitigem Nutzen wäre, werden die Spieler immer egoistischer. Das liegt daran, dass Egoismus belohnt und Altruismus bestraft wird. Wir werden später für wiederholte Spiele erklären, wie sich kooperatives Verhalten langfristig begründen lässt, siehe Nash Folk Theorem F2E.

Wozu dient Mathematik?

Alles Leben ist Problemlösen. (Karl Popper)



Mathematik untersucht sowohl abstrakte Strukturen als auch konkrete Anwendungen. Dies sind keine Gegensätze, sondern sie ergänzen sich!

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie. (Immanuel Kant)

Wozu dient Mathematik?

Wir beginnen mit der **Empirie**, also konkreten **Beobachtungen** und praktischen **Erfahrungen**. Hieran erkennen wir **Probleme** und formulieren unsere **Ziele**: Wir wollen die vorliegenden Probleme lösen!

Wenn wir bereits eine mögliche Lösung vorliegen haben oder zumindest vermuten, dann können wir sie **überprüfen** und soweit nötig **anpassen**. (Tradition, Erfahrung, Ausbildung, Anleitung, Nachahmung, Erklärvideo)

Meist kennen wir jedoch noch gar keine Lösung. Wir könnten uns durch Versuch-und-Irrtum vortasten, doch blindes Herumprobieren kostet Zeit, oft dauert es zu lange, ist zu aufwändig, gefährlich oder gar unmöglich.

Besser wir gehen **planvoll** vor und suchen **systematisch** nach einer Lösung, oder gar nach allen Lösungen, um dann die beste auszuwählen.

Das ist der **Nutzen der Theorie**: Sie erweitert unseren Werkzeugkasten, wo bloßes Probieren nicht genügt. Theorie und Anwendung ergänzen sich: Proben sind weiterhin gut und richtig, doch erst die Theorie liefert neue Ansätze, die sich lohnen auszuprobieren. Die Trefferquote steigt.

Probieren geht über studieren? **Studieren erweitert probieren!**

Ist Spieltheorie deskriptiv oder normativ?

Modelle können **deskriptiv**, aber auch **normativ** eingesetzt werden. Deskriptiv: beschreibend (Kettenlinie), erklärend (Planetenbewegung), vorhersagend (Wetterbericht). Normativ: vorschreibend (Bauplan), planend (Raumsonde), gesetzgebend (Umwelt- und Klimaschutz).

Das Kiosk-Problem haben wir durch systematische Untersuchung aller Fälle gelöst. Bei drei Spielern erfordert dies $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$ Fälle; hier sind Systematik und Sorgfalt unbedingt erforderlich, um keinen Fall zu vergessen oder falsch auszuwerten. Das ist mühsam, aber es lohnt sich!

Diese Genauigkeit ist typisch für wissenschaftliche Vorgehensweise. Logik und Systematik, Ehrlichkeit und Sorgfalt sind die grundlegenden Techniken der Mathematik — und jeder ernsthaften Wissenschaft.

Dieses Anwendungsproblem ist vereinfacht, doch halbwegs realistisch. Die Analyse gibt einen klaren Ratschlag, gar eine Handlungsanweisung: Bei drei Lizenzen sollte der erste Platz 8 wählen. Das ist keineswegs offensichtlich, sogar eher überraschend. Hier ist die Theorie normativ, sie schreibt vor, was optimales Verhalten ist. Entspricht dies auch dem tatsächlich beobachteten Verhalten? Hier kommt die Empirie ins Spiel!

Ist Spieltheorie deskriptiv oder normativ?

Spieltheorie kann nicht nur normativ, sondern auch deskriptiv genutzt werden, um beobachtetes Verhalten zu beschreiben und zu erklären. Hier ist unser Spiel „Hin-und-Rück“ lehrreich und überraschend!

Die Theorie untersucht wie immer zunächst das rationale Verhalten. $\mathscr{R}_1$: Spieler B schickt nichts zurück. $\mathscr{R}_2$: Spieler A schickt nichts hin. Das beobachtete Verhalten sieht jedoch ganz anders aus! Hierzu ist entscheidend, ehrliche und ausgeklügelte Experimente durchzuführen. Nur so können wir unsere Theorie mit der Realität vergleichen.

Wie ist die Abweichung zu erklären? Einerseits gehen die Spieler nicht streng rational vor, etwa weil die Zeit oder der Wille für eine genauere Analyse fehlt, oder weil Überzeugungen von Moral und Gerechtigkeit mitschwingen. Eine verbesserte Theorie sollte dies berücksichtigen!

Andererseits können wir das Experiment verbessern und erweitern. Durch wiederholtes Spielen gewinnen die Teilnehmer an Erfahrung: Probieren ergänzt studieren! Das beobachtete Verhalten nähert sich dann tatsächlich der theoretischen Vorhersage. Unsere Theorie macht also doch zutreffende Vorhersagen, aber auf etwas subtilere Weise.

Prof. Dr. Michael Eisermann • Spieltheorie und ökonomisches Verhalten

Kapitel B

Statische Spiele und Nash–Gleichgewichte

Wie ist es möglich, daß die Mathematik, letztlich doch ein Produkt menschlichen Denkens unabhängig von der Erfahrung, den wirklichen Gegebenheiten so wunderbar entspricht?

Albert Einstein (1879–1955)

SoSe 2018 • www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/lehre/Spieltheorie • 30.09.2018

Inhalt dieses Kapitels

Motivation und Überblick

In diesem Kapitel beginnen wir die systematische Untersuchung von Spielen. Wir definieren hierzu **strategische Spiele** in Normalform und erklären den Begriff des **Nash–Gleichgewichts**. Solche Gleichgewichte beschreiben **mögliches rationales Verhalten**. Die Definition ist einfach, aber die Interpretation bedarf einiger Übung und zahlreicher Beispiele.

Im Allgemeinen hat ein gegebenes Spiel keine Nash–Gleichgewichte. Dies ändert sich durch die Erweiterung zu **gemischten Strategien**. **Der Satz von Nash** (B1E) garantiert: Jedes endliche reelle Spiel hat mindestens ein Nash–Gleichgewicht in gemischten Strategien.

Hieraus erhalten wir sofort John von Neumanns **Hauptsatz für Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele**: Nash–Gleichgewichte entsprechen hier Min-Maximierern bzw. Max-Minimierern. Damit hat jedes Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel einen wohldefinierten **Wert**. Die Berechnung gelingt ad hoc in einfachen Spezialfällen, und allgemein dank Linearer Programmierung, die wir im nächsten Kapitel erklären.

Motivation und Überblick

Eine weitere nützliche Berechnungsmethode ist das Erkennen und Eliminieren von (strikt) **dominierten Strategien**. Die Idee ist leicht, doch die Feinheiten sind subtil und müssen sauber ausgeführt werden. Ich betone dies, weil es erfahrungsgemäß oft falsch angewendet wird.

Ein vorrangiges Ziel dieses Kapitels ist daher, eine saubere und tragfähige **Notation** einzuführen. Über viele der beobachteten Phänomene können wir erst damit überhaupt erst sprechen. Damit haben Sie insbesondere das Vokabular für die Übungen.

Anschließend wollen wir die grundlegenden **Sätze** präzise formulieren und beweisen und als **Rechenregeln** gebrauchsfertig bereitstellen. Das ist manchmal mühsam aber immer lohnend. In der Literatur wird dies unterschiedlich streng gehandhabt. Wir versuchen unser bestes.

Mit dieser Grundausstattung an **Werkzeug** gerüstet untersuchen wir zahlreiche Anwendungen im letzten Teil dieses Kapitels. Die Aufgaben der Gruppenübungen ergänzen dies. Versuchen Sie sich daran!

Mengen und Elemente

B101
Erläuterung

Sie kennen Mengen wie die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ oder die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{\, a/b \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b > 0 \,\}$, die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, etc.

Eine **Menge** $A = \{a, b, c, \dots\}$ ist die Zusammenfassung ihrer **Elemente** $a, b, c, \dots$. Wir schreiben $a \in A$ für „a ist Element von A“, kurz „a in A“. Zum Beispiel gilt $x \in \{a, b\}$ genau dann, wenn $x = a$ oder $x = b$ gilt. Die **leere Menge** schreiben wir $\emptyset$ oder $\{\}$; sie enthält keine Elemente.

Wir nennen B eine **Teilmenge** von A, geschrieben $B \subseteq A$, wenn jedes Element von B auch in A liegt, also für jedes $x \in B$ auch $x \in A$ gilt. Im Falle $B \subseteq A$ und $A \subseteq B$ gilt $A = B$: Beide haben dieselben Elemente. Demnach gilt $\{a, b\} = \{b, a\}$. Es gilt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ aber nicht $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$, kurz $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}$.

Aussonderung: Mit $\{\, x \in A \mid p(x) \,\}$ bezeichnen wir die Teilmenge aller Elemente $x \in A$, die eine gegebene Eigenschaft $p(x)$ haben. Beispiele sind Lösungsmengen wie $\{\, x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 10 \,\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ und $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2 \,\} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ sowie $\{\, x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2 \,\} = \emptyset$.

Operationen: **Vereinigung** $A \cup B = \{\, x \mid x \in A \text{ oder } x \in B \,\}$, **Schnitt** $A \cap B = \{\, x \mid x \in A \text{ und } x \in B \,\}$, **Differenz** $A \setminus B = \{\, x \in A \mid x \notin B \,\}$.

Paare und Funktionen

B102
Erläuterung

Ein **Paar** (a, b) fasst zwei Elemente a, b in dieser Reihenfolge zusammen: Genau dann gilt $(a, b) = (c, d)$, wenn $a = c$ und $b = d$ gilt. Wir schreiben $A \times B = \{\, (a, b) \mid a \in A,\ b \in B \,\}$ für die Menge all dieser Paare, und nennen sie das **kartesische Produkt** der Mengen A und B. Als Beispiel: $\{0, 1, 2\} \times \{a, b\} = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$.

Ist A eine endliche Menge mit n Elementen, so schreiben wir $\sharp A = n$. Es gilt $\sharp(A \cup B) = \sharp A + \sharp B - \sharp(A \cap B)$ und $\sharp(A \times B) = (\sharp A) \cdot (\sharp B)$.

Sie kennen Funktionen wie $q(x) = x^2$, ausführlich $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\ge 0} : x \mapsto x^2$, sowie $r : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ und $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1] : x \mapsto \sin(x)$; wir nutzen die Notation $[a, b] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b \,\}$ und $\mathbb{R}_{\ge 0} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \ge 0 \,\}$.

Eine **Funktion** $f : X \to Y$ von der Startmenge X in die Zielmenge Y ordnet jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zu, kurz $x \mapsto y$, gelesen „x wird abgebildet auf y“, oder $f(x) = y$, „f von x ist gleich y“.

Formal wird f festgelegt durch alle Paare $(x, y) \in X \times Y$ mit $f(x) = y$. Dies entspricht dem **Graphen** $F = \{\, (x, y) \in X \times Y \mid f(x) = y \,\}$ von f. Umgekehrt definiert $F \subseteq X \times Y$ genau dann eine Funktion $f : X \to Y$, wenn gilt: Zu jedem $x \in X$ existiert genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in F$.

Funktionen von zwei Variablen

B103
Erläuterung

Wir betrachten die Mengen $X = \{♣, ♠, ♥, ♦\}$ und $Y = \{\mathrm{B}, \mathrm{D}, \mathrm{K}\}$. Ihr kartesisches Produkt $X \times Y$ ist dann, wie oben erklärt, die Menge

$$X \times Y = \{\, ♣\mathrm{B}, ♣\mathrm{D}, ♣\mathrm{K}, ♠\mathrm{B}, ♠\mathrm{D}, ♠\mathrm{K}, ♥\mathrm{B}, ♥\mathrm{D}, ♥\mathrm{K}, ♦\mathrm{B}, ♦\mathrm{D}, ♦\mathrm{K} \,\}.$$

Allgemein ist das **kartesische Produkt** definiert als Menge aller Paare:

$$X \times Y = \{\, (x, y) \mid x \in X,\ y \in Y \,\}$$

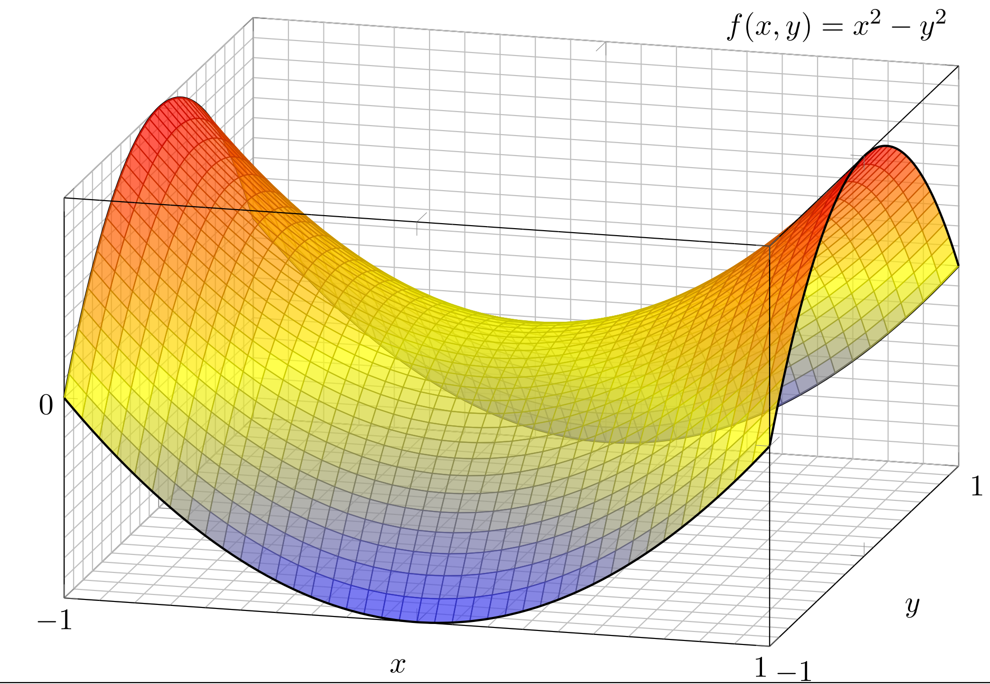
Eine Funktion $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ ordnet jedem Paar $(x, y) \in X \times Y$ eine Zahl $f(x, y) \in \mathbb{R}$ zu. Typisches Beispiel aus Schule und Universität:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\, (x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \,\}$$
$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$$

Der Funktionswert $f(x, y)$ hängt hier von zwei Parametern x und y ab. Als konkretes Beispiel betrachten wir die Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$. Zu jedem festem y ist $x \mapsto f(x, y)$ eine nach oben geöffnete Parabel. Zu jedem festem x ist $y \mapsto f(x, y)$ eine nach unten geöffnete Parabel. Solche Beispiele können wir uns als Fläche im Raum bildlich vorstellen.

Funktionen von zwei Variablen

B104
Erläuterung



Koordinatenweises Minimum und Maximum

Aufgabe: Sei $X = Y = [-1,1] = \{\, t \in \mathbb{R} \mid -1 \le t \le 1 \,\}$ das reelle Intervall von -1 bis $+1$. Das kartesische Produkt ist somit das Quadrat

$$X \times Y = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x, y \le 1 \,\}.$$

Hierauf betrachten wir analog zur obigen Skizze die Funktion

$$f \,:\, X \times Y \to \mathbb{R} \,:\, (x,y) \mapsto f(x,y) = 3x^2 - 5y^2.$$

(1) Bestimmen Sie für jedes $x \in X$ bzw. $y \in Y$ die Funktionen

$$g_*(x) = \min_{y\in Y} f(x,y), \qquad h_*(y) = \min_{x\in X} f(x,y),$$
$$g^*(x) = \max_{y\in Y} f(x,y), \qquad h^*(y) = \max_{x\in X} f(x,y).$$

(2) Berechnen und vergleichen Sie die folgenden Werte:

$$\min_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) \stackrel{?}{=} \min_{y\in Y}\min_{x\in X} f(x,y), \qquad \max_{x\in X}\max_{y\in Y} f(x,y) \stackrel{?}{=} \max_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y),$$
$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) \stackrel{?}{=} \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y), \qquad \min_{x\in X}\max_{y\in Y} f(x,y) \stackrel{?}{=} \max_{y\in Y}\min_{x\in X} f(x,y).$$

Welche Beziehungen vermuten Sie zwischen diesen acht Werten?

Koordinatenweises Minimum und Maximum

Lösung: (1) Wir finden (graphisch oder rechnerisch):

$$g_*(x) = \min_{y\in Y} f(x,y) = 3x^2 - 5, \qquad h_*(y) = \min_{x\in X} f(x,y) = -5y^2,$$
$$g^*(x) = \max_{y\in Y} f(x,y) = 3x^2, \qquad h^*(y) = \max_{x\in X} f(x,y) = 3 - 5y^2.$$

(2) Daraus folgern wir:

$$\min_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) = \min_{x\in X} g_*(x) = -5, \qquad \min_{y\in Y}\min_{x\in X} f(x,y) = \min_{y\in Y} h_*(y) = -5,$$
$$\max_{x\in X}\max_{y\in Y} f(x,y) = \max_{x\in X} g^*(x) = 3, \qquad \max_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y) = \max_{y\in Y} h^*(y) = 3,$$
$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) = \max_{x\in X} g_*(x) = -2, \qquad \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y) = \min_{y\in Y} h^*(y) = -2,$$
$$\min_{x\in X}\max_{y\in Y} f(x,y) = \min_{x\in X} g^*(x) = 0, \qquad \max_{y\in Y}\min_{x\in X} f(x,y) = \max_{y\in Y} h_*(y) = 0.$$

Allgemein ist $\max_x \max_y f(x,y) = \max_y \max_x f(x,y) = \max_{(x,y)} f(x,y)$ und $\min_x \min_y f(x,y) = \min_y \min_x f(x,y) = \min_{(x,y)} f(x,y)$ das globale Maximum / Minimum der Funktion $f : X \times Y \to \mathbb{R}$. Die vier gemischten $\min$–$\max$–Terme liegen dazwischen, aber sie stimmen im Allgemeinen nicht überein! Das schauen wir uns nun genauer an…

Funktionen von zwei Variablen: ein Paraboloid

Aufgabe: Wie zuvor sei $X = Y = [-1,1]$. Skizzieren Sie die Funktion

$$f \,:\, X \times Y \to \mathbb{R} \,:\, (x,y) \mapsto f(x,y) = 3x^2 + 5y^2.$$

Berechnen Sie alle $\min$–$\max$–Terme wie in der vorigen Aufgabe.

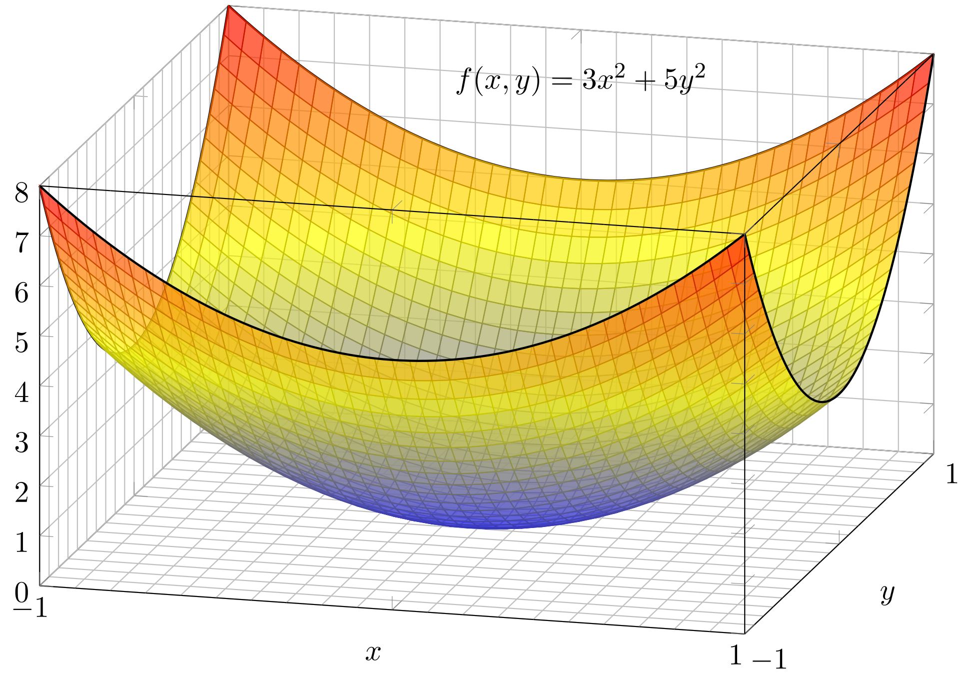
Lösung: Wir finden (graphisch oder rechnerisch):

$$g_*(x) = \min_{y\in Y} f(x,y) = 3x^2, \qquad h_*(y) = \min_{x\in X} f(x,y) = 5y^2,$$
$$g^*(x) = \max_{y\in Y} f(x,y) = 3x^2 + 5, \qquad h^*(y) = \max_{x\in X} f(x,y) = 3 + 5y^2.$$

Daraus folgern wir:

$$\min_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) = \min_{x\in X} g_*(x) = 0, \qquad \min_{y\in Y}\min_{x\in X} f(x,y) = \min_{y\in Y} h_*(y) = 0,$$
$$\max_{x\in X}\max_{y\in Y} f(x,y) = \max_{x\in X} g^*(x) = 8, \qquad \max_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y) = \max_{y\in Y} h^*(y) = 8,$$
$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) = \max_{x\in X} g_*(x) = 3, \qquad \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y) = \min_{y\in Y} h^*(y) = 3,$$
$$\min_{x\in X}\max_{y\in Y} f(x,y) = \min_{x\in X} g^*(x) = 5, \qquad \max_{y\in Y}\min_{x\in X} f(x,y) = \max_{y\in Y} h_*(y) = 5.$$

Funktionen von zwei Variablen: ein Paraboloid



Funktionen von zwei Variablen: ein Sattel

Aufgabe: Sei $X = [-2, 2]$ und $Y = [-3, 3]$. Skizzieren Sie die Funktion

$$f \,:\, X \times Y \to \mathbb{R} \,:\, (x, y) \mapsto f(x, y) = xy.$$

Berechnen Sie alle $\min$–$\max$–Terme wie in den vorigen Aufgaben.

Lösung: Wir finden (graphisch oder rechnerisch):

$$g_*(x) = \min_{y\in Y} f(x, y) = -3|x|, \qquad h_*(y) = \min_{x\in X} f(x, y) = -2|y|,$$

$$g^*(x) = \max_{y\in Y} f(x, y) = +3|x|, \qquad h^*(y) = \max_{x\in X} f(x, y) = +2|x|,$$

Daraus folgern wir:

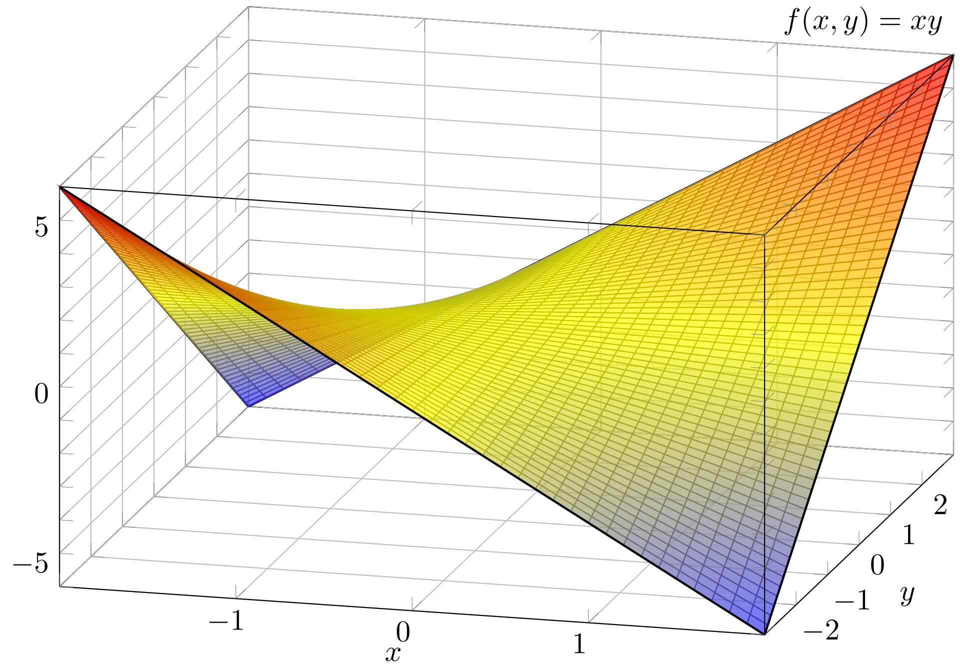
$$\min_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x, y) = \min_{x\in X} g_*(x) = -6, \qquad \min_{y\in Y}\min_{x\in X} f(x, y) = \min_{y\in Y} h_*(y) = -6,$$

$$\max_{x\in X}\max_{y\in Y} f(x, y) = \max_{x\in X} g^*(x) = 6, \qquad \max_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x, y) = \max_{y\in Y} h^*(y) = 6,$$

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x, y) = \max_{x\in X} g_*(x) = 0, \qquad \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x, y) = \min_{y\in Y} h^*(y) = 0,$$

$$\min_{x\in X}\max_{y\in Y} f(x, y) = \min_{x\in X} g^*(x) = 0, \qquad \max_{y\in Y}\min_{x\in X} f(x, y) = \max_{y\in Y} h_*(y) = 0.$$

Funktionen von zwei Variablen: ein Sattel



Ein warnendes Gegenbeispiel

Vielleicht vermuten Sie für *jede* Funktion $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x, y) \stackrel{?}{=} \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x, y),$$

$$\min_{x\in X}\max_{y\in Y} f(x, y) \stackrel{?}{=} \max_{y\in Y}\min_{x\in X} f(x, y).$$

Es gibt Gegenbeispiele, auf den ersten Blick ist keines offensichtlich. Suchen ist schwer! Diese Aufgabe erfordert Kreativität und Sorgfalt:

Aufgabe: Seien Sie kreativ: Finden Sie ein Gegenbeispiel $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$! Seien Sie sorgfältig: Untersuchen Sie Ihre Funktion f genau wie zuvor!

Lösung: Als ein geeignetes Gegenbeispiel betrachten wir die Funktion

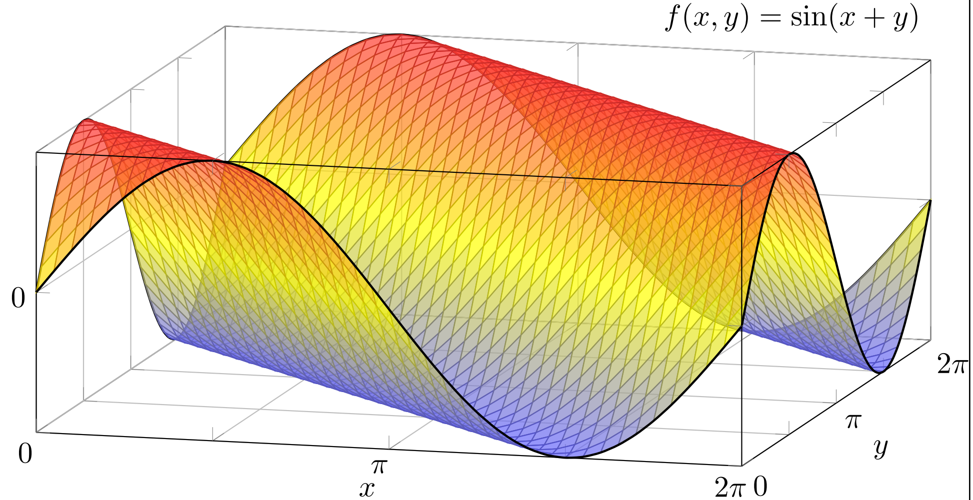
$$f \,:\, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,:\, (x, y) \mapsto f(x, y) = \sin(x + y).$$

Wir finden (graphisch oder rechnerisch) die gemischten $\min$–$\max$–Werte

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x, y) = -1, \qquad \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x, y) = +1,$$

$$\min_{x\in X}\max_{y\in Y} f(x, y) = -1, \qquad \max_{y\in Y}\min_{x\in X} f(x, y) = +1.$$

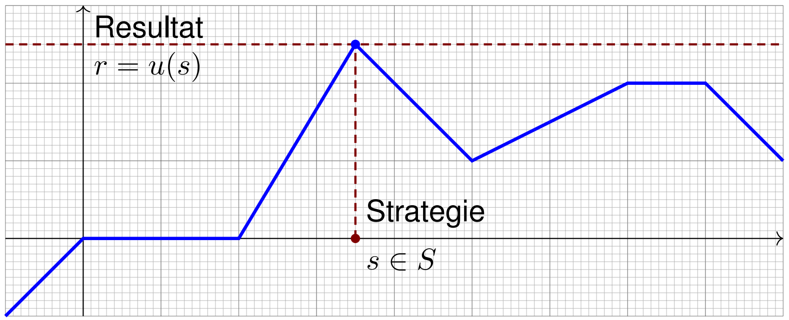
Ein warnendes Gegenbeispiel



Für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ bzw. $y \in \mathbb{R}$ gilt in diesem Beispiel:

$$\min_{y\in[0,2\pi]} f(x, y) = \min_{x\in[0,2\pi]} f(x, y) = -1, \qquad \max_{y\in[0,2\pi]} f(x, y) = \max_{x\in[0,2\pi]} f(x, y) = +1$$

Was ist ein Spiel mathematisch gesehen?



Der Spieler sucht seine Strategie $s \in S$ so, dass sein Resultat $r = u(s)$ maximal ist, also $u(x) \le u(s)$ für alle alternativen Strategien $x \in S$ gilt.

Definition B1A (Spiel mit nur einem Spieler: Gewinnmaximierung)

Ein **Spiel** mit nur einem Spieler ist eine Funktion $u : S \to R : s \mapsto u(s)$.
Hierbei ist S die Menge der **Strategien**, die der Spieler wählen kann, und R ist die Menge möglicher **Resultate**, linear geordnet durch $\le$.
Meist sind R die reellen Zahlen, und wir nennen u die **Nutzenfunktion**.

Was ist ein Spiel mathematisch gesehen?

Wir beginnen mit dem einfachsten Fall eines einzigen Spielers. Gegeben ist die Menge S der möglichen Strategien und hierauf die Nutzenfunktion $u : S \to \mathbb{R}$. Der Spieler will nun $s \mapsto u(s)$ maximieren. Wenn die Menge S klein ist, dann genügt ausprobieren. Ist die Menge S hingegen groß und unübersichtlich, dann kann die Optimierung beliebig schwierig werden.

Sie kennen einfache Beispiele aus der Schule und lernen Optimierung durch Kurvendiskussion. Als Kontrast hierzu: Unser Kiosk-Beispiel ist ein kombinatorisches Optimierungsproblem; bei einer Lizenz ist es klar und langweilig, bei zweien leicht, bei dreien bereits knifflig und überraschend. Optimiert wurde dort übrigens keine reelle Zahl, sondern das Ergebnis (Marktanteil, Nähe zur Straße) in lexikographischer Ordnung, also wie im Lexikon: Wir maximieren zuerst den Marktanteil, dann erst die Nähe.

Allgemein kann u alles mögliche messen: Geld, Gewinn maximieren, Kosten minimieren, aber auch Einfluss, Ansehen, soziale Stellung, Gerechtigkeit, Umweltschutz, Tierschutz, Glück, Zufriedenheit, etc. Nahezu jede menschliche Aktivität lässt sich so betrachten!

Was ist ein Spiel mathematisch gesehen?

$s_2 \in S_2 =$

A \ B ($s_1 \in S_1 =$)	Schere	Stein	Papier
Schere	0 / 0	-1 / $+1$	$+1$ / -1
Stein	$+1$ / -1	0 / 0	-1 / $+1$
Papier	-1 / $+1$	$+1$ / -1	0 / 0

$u_2(s_1, s_2)$
$u_1(s_1, s_2)$

Definition B1B (strategisches Spiel in Normalform)

Ein **Spiel** mit n Spielern ist eine Funktion

$$\begin{aligned} u \; : \; & S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \to R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n \\ & s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \mapsto (u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s)). \end{aligned}$$

Hierbei ist S_i die Menge der **Strategien**, die Spieler i wählen kann, und R_i ist die Menge seiner **Resultate**, linear geordnet durch $\le_i$.

Was ist ein Spiel mathematisch gesehen?

Wir wollen Spiele darstellen: einheitlich, übersichtlich, knapp, präzise. Jeder Spieler wählt seine Strategie $s_i \in S_i$ unabhängig von den anderen. Sein Gewinn ist $u_i(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)$, diesen versucht er zu maximieren. Meist sind R_i die reellen Zahlen, und wir nennen u_i die **Nutzenfunktion** für Spieler i. Allerdings kontrolliert der Spieler i nur den Parameter s_i, nicht jedoch die Strategien $s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n$ der anderen Spieler!

Als konkretes, einfaches Beispiel betrachten wir *Schere-Stein-Papier*. Dies ist ein **Nullsummenspiel**, d.h. stets gilt $u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0$. Es ist zudem **symmetrisch**, d.h. $S_1 = S_2$ und $u_1(s_1, s_2) = u_2(s_2, s_1)$.

Vorteile dieses Modells: Unsere Definition fasst alle zuvor betrachteten Spiele zusammen. Wir haben nun einen gemeinsamen Rahmen, um allgemeine Begriffe und Werkzeuge zu entwickeln! Gewisse Argumente, Rechnungen und Tricks treten immer wieder auf. Wir können sie nun allgemein erklären, präzise formulieren, und ihre Gültigkeit beweisen.

Einschränkungen: Unsere Definition berücksichtigt noch nicht den zeitlichen Verlauf, zufällige Einflüsse oder unvollständige Information.

Was ist ein Nash–Gleichgewicht?

B117

Wir untersuchen ein Spiel $u : S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ in Normalform.
Wir nennen $s = (s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$ einen **Strategievektor**.
Spieler i kann sich aus eigener Kraft verbessern, wenn für ein $x \in S_i$ gilt:

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{x}, s_{i+1}, \dots, s_n) \;>\; u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{s_i}, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

Andernfalls ist s ein **Maximum** bezüglich seiner Strategien $x \in S_i$:

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{x}, s_{i+1}, \dots, s_n) \;\le\; u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{s_i}, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

Hier kann sich Spieler i **aus eigener Kraft** nicht weiter verbessern:
Somit ist s_i eine **beste Antwort** auf $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$.

Definition B1C (Nash–Gleichgewichte eines Spiels)

Der Strategievektor s ist im **Gleichgewicht für Spieler** i, wenn gilt:

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{s_i}, s_{i+1}, \dots, s_n) \;=\; \max_{x \in S_i} u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{x}, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

Gilt dies für jeden Spieler i, so nennen wir s ein **Nash–Gleichgewicht**.

Was ist ein Nash–Gleichgewicht?

B118
Erläuterung

Ein Nash–Gleichgewicht ist genau das, was die Definition sagt:
Für jeden Spieler i ist seine Strategie s_i eine beste Antwort auf die gegnerischen Strategien $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$.

Anders gesagt: Ausgehend von einem solchen Nash–Gleichgewicht $(s_1, \dots, s_n)$ hat keiner der Spieler Anlass, seine Strategie zu ändern.

Umgekehrt erwarten wir rational gesehen, dass ein Ungleichgewicht nicht gespielt wird, zumindest nicht auf Dauer, denn mindestens ein Spieler wird wechseln. Dies interpretieren wir normativ oder deskriptiv:

(1) Gibt es nur genau ein Nash–Gleichgewicht, so wird dieses gespielt. Rationale Interpretation: Sind alle Spieler rational, so werden sie ihr Verhalten auf dieses einzige Nash–Gleichgewicht koordinieren.

(2) Die Nash–Gleichgewichte erklären das beobachtete Spielerverhalten. Evolutionäre Interpretation bei wiederholten Spielen, Schwarmintelligenz bei großen Populationen: Ungleichgewichte bleiben nicht lange erhalten.

In allen Fällen sind die Nash–Gleichgewichte eines Spiels besondere Strategievektoren, die zur weiteren Analyse dienen: Mögliche rationale Lösungen, beobachtetes Spielverhalten, evolutionäre Entwicklung, etc.

Beispiel: das Gefangenendilemma

B119

Dieses Spiel ist berühmt wegen seines paradoxen Ausgangs. Es wurde 1950 von Albert Tucker (1905–1995) vorgestellt und popularisiert.

A \ B	schweigen	gestehen
schweigen	-1 / -1	0 / -5
gestehen	-5 / 0	-4 / -4

Als Funktion $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bedeutet das ausgeschrieben:

$$\begin{aligned}
(\text{schweigen}, \text{schweigen}) &\mapsto (-1, -1) \\
(\text{schweigen}, \text{gestehen}) &\mapsto (-5, \;\;0) \\
(\text{gestehen}, \text{schweigen}) &\mapsto (\;\;0, -5) \\
(\text{gestehen}, \text{gestehen}) &\mapsto (-4, -4)
\end{aligned}$$

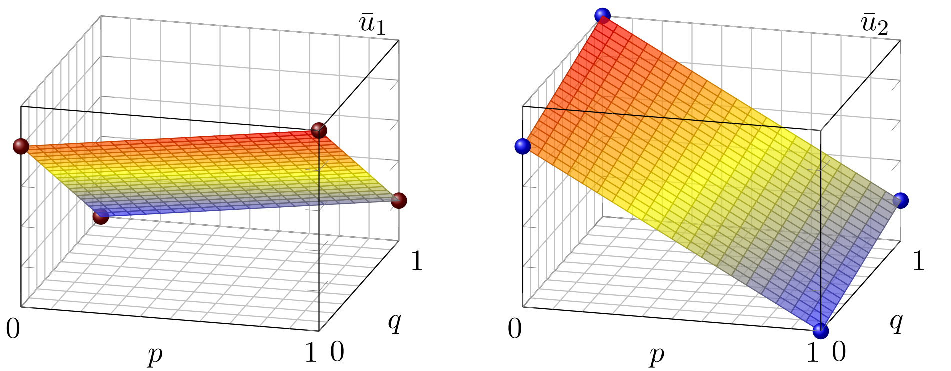
Nash–Gleichgewicht ist hier einzig (gestehen, gestehen).

Beispiel: das Gefangenendilemma

B120

Zwei Komplizen werden geschnappt und in getrennten Zellen verhört. Wenn beide schweigen, dann reichen die wenigen Beweise vor Gericht vermutlich zur Verurteilung für ein Jahr Gefängnis. Wenn einer gesteht, so wird ihm die Strafe erlassen, aber der andere wird zu fünf Jahren verurteilt. Gestehen beide, so drohen jedem vier Jahre Gefängnis.

Zur Illustration eine graphische Darstellung der beiden Auszahlungen: Spieler A wählt $p \in \{0, 1\}$ und Spieler B wählt $q \in \{0, 1\}$.



Beispiel: Bach oder Strawinsky?

Ein Paar möchte ein Konzert besuchen: Alice mag lieber Strawinsky, Bob mag lieber Bach. Gar kein Konzert wäre für beide enttäuschend.

B A	Bach	Strawinsky
Bach	2 1	0 0
Strawinsky	0 0	1 2

In diesem berühmten Spiel gibt es genau zwei Nash–Gleichgewichte: Einerseits $(\text{Bach}, \text{Bach})$ und andererseits $(\text{Strawinsky}, \text{Strawinsky})$.

Die Ungleichgewichte $(\text{Bach}, \text{Strawinsky})$ und $(\text{Strawinsky}, \text{Bach})$ wären nicht rational, sie werden erwartungsgemäß nicht gespielt, oder nur selten, vorübergehend als Ausrutscher, und dann alsbald korrigiert.

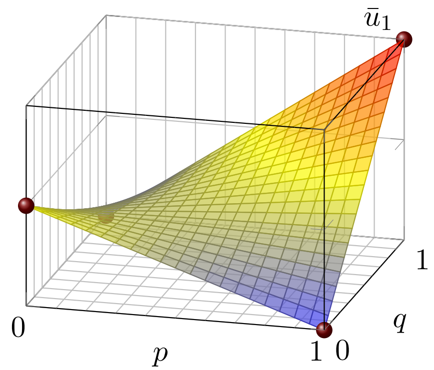
Hingegen können beide Nash–Gleichgewichte gleichermaßen gespielt werden, hier ist keines bevorzugt. Das Spiel ist hierin symmetrisch.

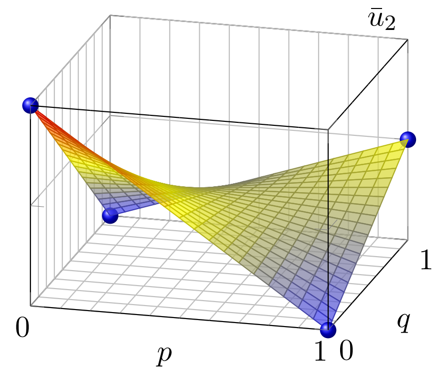
Beispiel: Bach oder Strawinsky?

Wir denken an folgendes Szenario: Alice und Bob haben sich vage für das Bach–Konzert verabredet. Sie können nun nicht mehr miteinander kommunizieren, doch jeder muss individuell seine Karte kaufen.

Bob will nicht wechseln, er ist wunschlos glücklich. Alice möchte zwar lieber in das Strawinsky–Konzert, aber alleine wird sie nicht wechseln. (Die umgekehrte Situation ist natürlich genauso gut vorstellbar.)

Sobald beide eine Einigung erzielt haben, sind sie daran gebunden!





Beispiel: bleiben oder gehen?

Sie hören einen schrecklich langweiligen Vortrag zur Spieltheorie und möchten lieber gehen, aber alleine aufzustehen wäre peinlich. Wenn Sie zu zweit aufstehen und gehen, dann wäre alles gut. Leider können Sie sich unter dem strengen Blick des Vortragenden nicht absprechen.

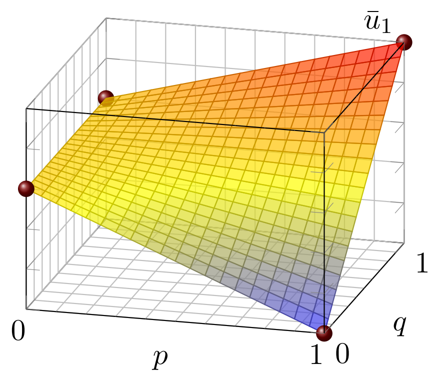
B A	bleiben	gehen
bleiben	-2 -2	-5 -2
gehen	-2 -5	0 0

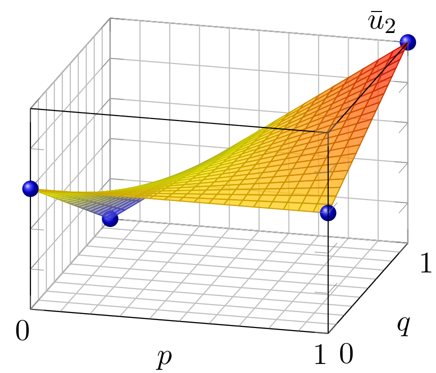
In diesem bekannten Spiel gibt es genau zwei Nash–Gleichgewichte: Einerseits $(\text{bleiben}, \text{bleiben})$ und andererseits $(\text{gehen}, \text{gehen})$.

Ihre gute Erziehung versetzt beide Spieler zunächst in die Ausgangslage $(\text{bleiben}, \text{bleiben})$. Beide möchten eigentlich lieber gehen, aber ohne Absprache wird keiner den ersten Zug wagen. *Teile und herrsche!*

Beispiel: bleiben oder gehen?

Alternatives Szenario: Als erfahrene Studenten haben Sie zahllose schlechte Vorträge erlitten und gelernt, sich dagegen zu wehren.
Sie wissen: Die Höflichkeit gebietet, zunächst zehn Minuten zu bleiben; wenn der Vortrag grottenschlecht ist, sollte man sofort danach gehen.
Sie wissen das, und Sie wissen, dass alle anderen es auch wissen.
In diesem Falle ersetzt das gemeinsame Wissen (*common knowledge*) die explizite Absprache: Nach genau zehn Minuten (gefühlte Ewigkeit) stehen alle gemeinsam auf und gehen. *Einigkeit macht stark!*





Gemischte Strategie: Was ist das?

Beim Spiel *Schere-Stein-Papier* ist es nicht sinnvoll, sich auf eine der drei **reinen Strategien** festzulegen. Besser ist, eine zufällig zu wählen:

$$s = \frac{1}{3} \cdot \text{Schere} + \frac{1}{3} \cdot \text{Stein} + \frac{1}{3} \cdot \text{Papier}$$

Wir nennen dies eine **gemischte Strategie**. Allgemein:

Definition B1D (gemischte Strategie, Borel 1921)

Sei $S_i = \{s_0, s_1, \dots, s_\ell\}$ die (endliche) Strategiemenge des Spielers i. Eine **gemischte Strategie** ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf S_i:

$$s = p_0 \cdot s_0 + p_1 \cdot s_1 + \dots + p_\ell \cdot s_\ell$$

Hierbei gelte $p_0, p_1, \dots, p_\ell \ge 0$ und $p_0 + p_1 + \dots + p_\ell = 1$, wie üblich.

Wir schreiben dies formal als Summe, das ist übersichtlich und bequem. Interpretation: Die Strategie $s_k \in S_i$ wird mit Wkt $p_k \in [0,1]$ ausgewählt. Geometrisch ist das eine Konvexkombination der Punkte $s_0, s_1, \dots, s_\ell$.

Gemischte Strategie: Was ist das?

Aus der Menge S_i entsteht so die **Menge aller gemischten Strategien**

$$\bar S_i = [\, s_0, s_1, \dots, s_\ell \,] := \left\{ \sum_{k=0}^{\ell} p_k s_k \;\middle|\; p_k \ge 0,\ \sum_{k=0}^{\ell} p_k = 1 \right\}.$$

Geometrisch ist dies die konvexe Hülle der Eckpunkte $s_0, s_1, \dots, s_\ell$, also eine Strecke ($\ell = 1$) oder ein Dreieck ($\ell = 2$) oder ein Tetraeder ($\ell = 3$) oder allgemein ein ℓ–dimensionales Simplex mit $\ell + 1$ Eckpunkten.

Die Nutzenfunktion $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ setzen wir auf gemischte Strategien fort zu $\bar u : \bar S_1 \times \dots \times \bar S_n \to \mathbb{R}^n$. Dies geschieht linear in jeder Koordinate, entsprechend dem **Erwartungswert**:

$$\bar u\big(\dots, \textstyle\sum_{k=0}^{\ell} p_k s_k, \dots\big) = \textstyle\sum_{k=0}^{\ell} p_k u(\dots, s_k, \dots)$$

Diese Fortsetzung von den reinen auf die gemischten Strategien haben wir in den vorigen einfachen Spielen bereits durch Graphiken illustriert.

Das folgende Beispiel $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$ zeigt dies nochmal ausführlich. Es ist zudem ein Nullsummenspiel, $u_1 + u_2 = 0$, was die Darstellung und die Untersuchung wesentlich vereinfacht. Auch die affine Fortsetzung $\bar u : \bar S_1 \times \bar S_2 \to \mathbb{R}^2$ ist dann ein Nullsummenspiel. (Übung: Warum?)

Beispiel: Matching Pennies

Alice und Bob legen jeder verdeckt eine Münze auf den Tisch, dann wird aufgedeckt: Bei Gleichheit gewinnt Bob, bei Ungleichheit gewinnt Alice. (Das ähnelt dem Spiel *Schere-Stein-Papier*, ist aber noch simpler.)

A \ B	Kopf	Zahl
Kopf	A: -1, B: $+1$	A: $+1$, B: -1
Zahl	A: $+1$, B: -1	A: -1, B: $+1$

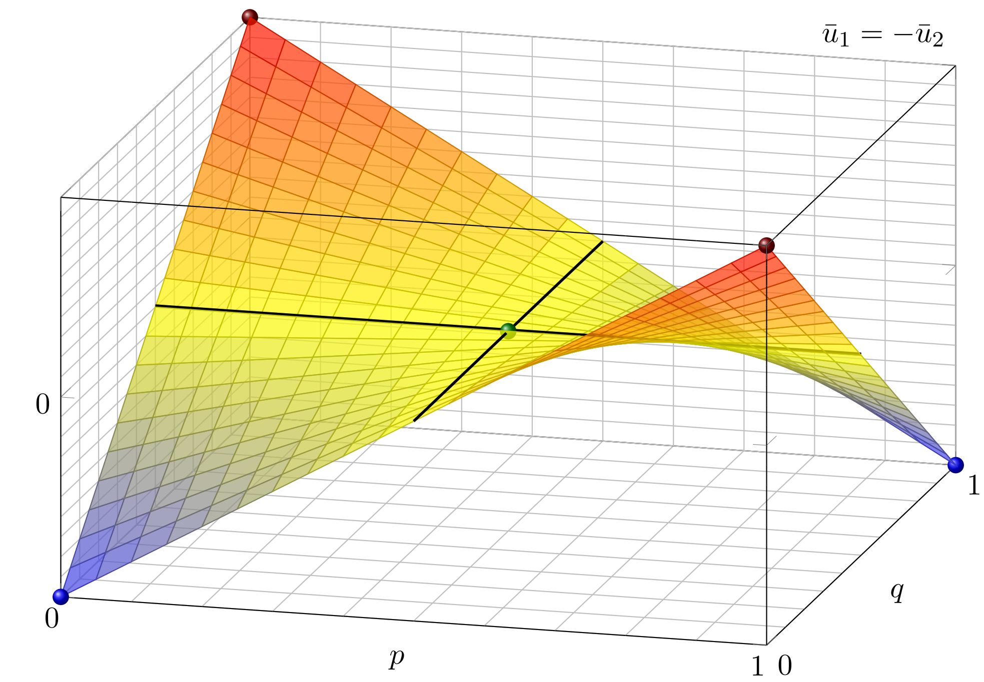
Wie bei *Schere-Stein-Papier* gibt es zunächst kein Nash–Gleichgewicht. Erweiterung: Beide Spieler dürfen nun gemischte Strategien wählen!

Spieler A: $\quad [0,1] \ni p \quad \mapsto \quad s_p = (1-p) \cdot \text{Kopf} + p \cdot \text{Zahl}$

Spieler B: $\quad [0,1] \ni q \quad \mapsto \quad s_q = (1-q) \cdot \text{Kopf} + q \cdot \text{Zahl}$

Die Nutzenfunktionen $u_1 = -u_2$ sind bilinear, ihr Graph ist eine Quadrik.

Beispiel: Matching Pennies



Matrixschreibweise für Zwei-Personen-Spiele

Wir betrachten ein Zwei-Personen-Spiel in strategischer Normalform

$$u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2 : (s_1, s_2) \mapsto (u_1(s_1, s_2), u_2(s_1, s_2))$$

mit Strategiemengen $S_1 = \{s_1^0, s_1^1, \dots, s_1^m\}$ und $S_2 = \{s_2^0, s_2^1, \dots, s_2^n\}$ sowie die Fortsetzung $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \to \mathbb{R}^2$ auf gemischte Strategien:

$$s_1 = \sum_{i=0}^{m} x_i s_1^i \in \bar{S}_1, \quad x \in \Delta^m = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_m) \;\middle|\; x_i \ge 0, \sum_{i=0}^{m} x_i = 1 \right\}$$

$$s_2 = \sum_{j=0}^{n} y_j s_2^j \in \bar{S}_2, \quad y \in \Delta^n = \left\{ (y_0, y_1, \dots, y_n) \;\middle|\; y_j \ge 0, \sum_{j=0}^{n} y_j = 1 \right\}$$

$$\bar{u}_1(s_1, s_2) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_i\, y_j\, \underbrace{u_1(s_1^i, s_2^j)}_{=:\, a_{ij}} = x^\intercal A\, y, \qquad A \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(n+1)}$$

$$\bar{u}_2(s_1, s_2) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_i\, y_j\, \underbrace{u_2(s_1^i, s_2^j)}_{=:\, b_{ij}} = x^\intercal B\, y, \qquad B \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(n+1)}$$

Kurzschreibweise $\tilde{u} : \Delta^m \times \Delta^n \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \big(x^\intercal A\, y,\ x^\intercal B\, y \big)$.

Matrixschreibweise für Zwei-Personen-Spiele

Die Grundideen der Spieltheorie sind bislang noch recht einfach, bedürfen aber bereits präziser Formulierungen und geeigneter Notation. Diese soll nicht nur klar, sondern auch bequem sein, andernfalls verkommen Definitionen und Rechnungen leicht zu Indexschlachten.

Für **endliche reelle Zwei-Personen-Spiele** kennen Sie Matrizen als besonders bequeme und effiziente Notation aus der linearen Algebra.

Die Menge $\Delta^m = [e_0, e_1, \dots, e_m] \subset \mathbb{R}^{m+1}$ ist der **Standardsimplex**, also die konvexe Hülle der Standardbasis $e_0, e_1, \dots, e_m \in \mathbb{R}^{m+1}$.

Diese **baryzentrischen Koordinaten** nutzen wir zur Parametrisierung für jeden Simplex mit beliebiger Eckenmenge $s_0, s_1, \dots, s_m$ vermöge $h : \Delta^m \to [s_0, s_1, \dots, s_m] : (x_0, x_1, \dots, x_m) \mapsto x_0 s_0 + x_1 s_1 + \dots + x_m s_m$. Wir erhalten so $\tilde{u} = \bar{u} \circ (h_1 \times \dots \times h_n) : \Delta^{m_1} \times \dots \times \Delta^{m_n} \to \mathbb{R}^n$.

Simplizes sind geometrisch-topologisch besonders einfache Räume, daher auch der Name. Sie sind konvex und kompakt und homöomorph zum Ball $\mathbb{D}^m$ gleicher Dimension (B1F). Genau diese Eigenschaften werden wir im folgenden Existenzsatz von Nash (B1E) ausnutzen!

Ein zweites Experiment: „Kartenduell“

Zwei Spieler, Gustav Gleich und Uschi Unterschiedlich, erhalten jeweils drei Karten wie in der Tabelle gezeigt. Jeder wählt eine seiner Karten. Wählen beide Spieler die Zwei, dann endet das Spiel unentschieden. Sind die Farben der beiden Karten gleich, so gewinnt Gustav Gleich; sind die Farben unterschiedlich, dann gewinnt Uschi Unterschiedlich. Der Gewinner erhält vom Verlierer den Wert der Siegkarte, mit den üblichen Werten Ass 1€, Zwei 2€.

G \ U	♦A	♣A	♦2
♦A	-1 / 1	1 / -1	-1 / 1
♣A	1 / -1	-1 / 1	2 / -2
♣2	1 / -1	-2 / 2	0 / 0

Aufgabe: Wie würden Sie spielen? als Gustav? als Uschi?

Ein zweites Experiment: „Kartenduell“

Wir haben das für Sie als Online-Spiel implementiert:

`www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/spiele`

Der Satz von Nash: Existenz von Gleichgewichten

☹ *Schere-Stein-Papier* hat kein Gleichgewicht in reinen Strategien.

☺ Hingegen gibt es ein Gleichgewicht (s_1, s_2) in gemischten Strategien:

$$s_1 = s_2 = \frac{1}{3} \cdot \text{Schere} + \frac{1}{3} \cdot \text{Stein} + \frac{1}{3} \cdot \text{Papier}$$

In der Fortsetzung auf gemischte Strategien haben die Spieler mehr Möglichkeiten. Wir würden hoffen, so auch Gleichgewichte zu finden. Der Satz von Nash sagt genau dies voraus:

Satz B1E (Existenzsatz für Gleichgewichte, John Nash 1950)

Sei $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ ein endliches reelles Spiel, wie oben erklärt, und $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \to \mathbb{R}^n$ seine Fortsetzung auf gemischte Strategien.

Dann besitzt das Spiel $\bar{u}$ mindestens ein Nash–Gleichgewicht.

☺ Für jedes endliche Spiel ist vernünftiges Verhalten immer möglich.

☺ Allgemeine Strukturaussage, darauf können wir weiter aufbauen.

Der Satz von Nash: Existenz von Gleichgewichten

Der Existenzsatz von Nash erfüllt zwei wesentliche Aufgaben:

(1) Der Satz garantiert, dass jedes endliche Spiel vernünftiges Verhalten ermöglicht. In jedem konkreten Einzelfall kann man dies überprüfen und (mühsam) lösen. Die allgemeine Aussage ist bequem und beruhigend: Wir können durch den Satz Rechenzeit sparen, wo sie nicht nötig ist.

Wir können sicher sein, dass unsere Suche erfolgreich sein wird. Unsere Mühe wird belohnt. Unsere Hoffnung wird erfüllt.

(2) Darauf aufbauend können wir allgemeine Aussagen ableiten. Das prominenteste Beispiel ist von Neumanns Minimax-Satz B2C, der Hauptsatz für Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele.

Dies gelingt *ohne* jedesmal mühsam explizit rechnen zu müssen. Wir müssen nicht befürchten, über die leere Menge zu sprechen: Wir haben eine gemeinsame *Strukturaussage* für all dieser Spiele!

Der Satz von Nash: Existenz von Gleichgewichten

Nashs Existenzsatz besticht durch Eleganz und Allgemeinheit. Für diese und weitere Arbeiten bekam Nash 1994 den Nobelpreis, genauer: Alfred-Nobel-Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften.

Nashs Existenzsatz ist nicht das Ende, sondern der Anfang. Dieses Ergebnis ist ein grundlegender erster Schritt der Theorie, er ist gewissermaßen der Ausgangspunkt der modernen Spieltheorie.

Umgekehrt gibt es natürlich viele Situationen, in denen wir schließlich explizit rechnen wollen oder müssen. Nashs Satz ist zunächst eine reine Existenzaussage und hierzu leider wenig hilfreich. Wir wollen mehr!

Speziell für Nullsummenspiele werden wir weitere Techniken entwickeln: Wir werden Nash–Gleichgewichte umrechnen in Min-Maximierer und Max-Minimierer. Wir haben nun Werkzeuge. Alles wird gut!

Die explizite Berechnung ist für sich schon ein spannendes Thema: Es mündet in die Lineare Optimierung, alias Lineare Programmierung, und wird uns viel Freude bereiten. Das alles ist schöne Mathematik!

Der Satz von Nash: Existenz von Gleichgewichten

Der Mathematiker John von Neumann und der Wirtschaftswissenschaftler Oskar Morgenstern veröffentlichten 1944 ihr Buch *Theory of Games and Economic Behavior*. Damit legten sie das Fundament der Spieltheorie, insbesondere für den Spezialfall der Nullsummenspiele aufbauend auf von Neumanns Minimax-Satz B2C.

> *I thought there was nothing worth publishing until the Minimax Theorem was proved. As far as I can see, there could be no theory of games without that theorem.* (John von Neumann, 1953)

Das ist ein wichtiger Spezialfall, aber bei weitem nicht ausreichend, denn die meisten realen Spiele haben nicht konstante Summe. Für den allgemeinen Fall fehlten daher zunächst die Werkzeuge.

Definition und Existenz von Nash–Gleichgewichten stammen aus Nashs Dissertation *Non-cooperative Games* von 1950. Dieses Konzept geht weit über Nullsummenspiele hinaus und ist bis heute grundlegend für die Weiterentwicklung der Spieltheorie.

Vorbereitung zum Existenzsatz

🙂 Die Spieltheorie mobilisiert und nutzt nahezu alle mathematischen Teildisziplinen. Hier benötigen wir folgende Ergebnisse der Topologie:

Proposition B1F (Homöomorphie der konvexen Körper)

Jede kompakte konvexe Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ mit nicht-leerem Inneren ist homöomorph zum Einheitsball $\mathbb{D}^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \le 1 \}$. Für $X \subset \mathbb{R}^n$ konvex kompakt gilt $X = \emptyset$ oder $X \cong \mathbb{D}^m$ mit $0 \le m \le n$.

Satz B1G (Fixpunktsatz von Brouwer, 1909)

Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ hat mindestens einen Fixpunkt, das heißt, es existiert ein Punkt $a \in \mathbb{D}^n$ mit der Eigenschaft $f(a) = a$.

Für $\mathbb{D}^1 = [-1, 1]$ genügt Zwischenwertsatz. (Übung! Erstes Semester)
Allgemein $n \in \mathbb{N}$: Sperners Lemma (Topologie, drittes Semester), Abbildungsgrad (Algebraische Topologie, fünftes Semester)

Jedes konvexe Kompaktum $\emptyset \ne X \subset \mathbb{R}^n$ hat die Fixpunkteigenschaft!
Falsch, wenn X nicht konvex ist: $X = \mathbb{D}^n \smallsetminus \{0\}$, $f(x) = -x$.
Falsch, wenn X nicht kompakt ist: $X = \mathbb{R}^n$, $f(x) = x + v$.

Vorbereitung zum Existenzsatz

Homöomorphie $X \cong \mathbb{D}^n$ bedeutet, es gibt zueinander inverse stetige Abbildungen $g : X \to \mathbb{D}^n$ und $h : \mathbb{D}^n \to X$ mit $h \circ g = \mathrm{id}_X$ und $g \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{D}^n}$.

Können Sie eine Tasse Kaffee so gründlich umrühren, dass kein Punkt bleibt wo er war? Natürlich soll dabei der Kaffee in der Tasse bleiben und die Tasse am selben Ort. Erstaunlich aber wahr: Das ist unmöglich!

Fixpunktsätze wie dieser sind wichtige Werkzeuge der Mathematik. Aus der Analysis kennen Sie Banachs Fixpunktsatz für kontraktive Abbildungen. Er garantiert Existenz und Eindeutigkeit des Fixpunkts, zudem können Sie damit sehr effizient den Fixpunkt approximieren.

Der Fixpunktsatz von Brouwer hingegen ist leider nicht konstruktiv: Er garantiert die Existenz eines Fixpunkts, verrät uns aber nicht wo. (Brouwer war ein vehementer Verfechter konstruktiver Prinzipien; sein berühmtestes Resultat ist tragischerweise nicht konstruktiv.)

Bitte beachten Sie, dass es durchaus mehrere Fixpunkte geben kann, extrem für $\mathrm{id} : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$. Der Ball $\mathbb{D}^n$ als Start und Ziel ist wesentlich: Nicht jeder Raum hat die Fixpunkteigenschaft. Hingegen ist der Satz bei der Funktion $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ sehr großzügig: sie muss nur stetig sein.

Beweis des Existenzsatzes von Nash

Zum Spiel $\bar u : \bar S_1 \times \dots \times \bar S_n \to \mathbb{R}^n$ suchen wir ein Nash–Gleichgewicht. Wir nutzen hierzu Brouwers Fixpunktsatz für eine geeignete Funktion f.

Beweis von Satz B1E: Wir konstruieren wie folgt die **Nash–Funktion**

$$f \;:\; \bar S_1 \times \dots \times \bar S_n \to \bar S_1 \times \dots \times \bar S_n \;:\; s = (s_1, \dots, s_n) \mapsto \check s = (\check s_1, \dots, \check s_n).$$

Zu $x \in \mathbb{R}$ sei x^+ der Positivteil: $x^+ = x$ für $x \ge 0$ und $x^+ = 0$ für $x < 0$.

Zum gegebenen Strategievektor $s = (s_1, \dots, s_n)$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ sei $\bar u_i^s \;:\; \bar S_i \to \mathbb{R} \;:\; x \mapsto \bar u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, x, s_{i+1}, \dots, s_n)$ und weiter

$$S_i = \{s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^\ell\}, \qquad s_i = \sum\nolimits_k p_i^k s_i^k, \qquad \delta_i^k := \big[\bar u_i^s(s_i^k) - \bar u_i^s(s_i)\big]^+,$$

$$\check s_i := \sum\nolimits_k \check p_i^k s_i^k \;\text{ mit }\; \check p_i^k := \frac{p_i^k + \delta_i^k}{1 + \sum_j \delta_i^j}, \quad \text{also } \check p_i^k \ge 0 \text{ und } \sum\nolimits_k \check p_i^k = 1.$$

🙂 Die Funktion f ist stetig. Dank Brouwer B1G existiert ein Fixpunkt.

Beweis des Existenzsatzes von Nash

🙂 Was bedeutet diese geschickt konstruierte Nash–Funktion f?

Die Größe $\delta_i^k \ge 0$ gibt an, um wieviel sich Spieler i verbessern kann, wenn er seine gemischte Strategie s_i durch die reine Strategie s_i^k ersetzt. Dies entspricht einer der Ecken des Simplex $\bar S_i$; im Falle $\delta_i^k > 0$ ist die Ecke s_i^k attraktiv. Die verbesserte Strategie $s \mapsto \check s$ wird neu abgemischt; attraktive Ecken werden stärker gewichtet, unattraktive schwächer.

🙂 Wenn gewünscht können wir die Nash–Funktionen f sogar glätten.

Statt $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^+$ ist $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (x^+)^2$ stetig differenzierbar. Wir können sogar eine beliebig oft differenzierbare Funktion wählen, etwa $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \exp(-1/x)$ für $x > 0$ und $x \mapsto 0$ für $x \le 0$. Damit wird die Nash–Funktion sogar C^∞–glatt!

🙂 Warum können wir den Fixpunktsatz von Brouwer auf f anwenden?

Wir setzen hier voraus, dass jede reine Strategiemenge S_i endlich ist, geschrieben $S_i = \{s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^\ell\}$. Die Menge $\bar S_i = [s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^\ell] \cong \mathbb{D}^\ell$ der gemischten Strategien ist ein Simplex, also konvex und kompakt, somit homöomorph zu einem Ball. Das Produkt $\bar S_1 \times \dots \times \bar S_n$ ebenso.

Beweis des Existenzsatzes von Nash

Lemma B1H (Fixpunkte sind Gleichgewichte)

Die Nash–Gleichgewichte des Spiels $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \to \mathbb{R}^n$ sind genau die Fixpunkte der Nash–Funktion $f : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \to \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n$.

Beweis: „⇒“ Jedes Gleichgewicht ist ein Fixpunkt nach Konstruktion.

„⇐“ Jeder Fixpunkt $s = f(s)$ ist ein Gleichgewicht, $\bar{u}_i^s(s_i) = \max \bar{u}_i^s$:
Für $s_i = \sum_k p_i^k s_i^k$ gilt $\bar{u}_i^s(s_i) = \sum_k p_i^k \bar{u}_i^s(s_i^k)$ nach Definition von $\bar{u}$.
Es gibt einen Index k mit $p_i^k > 0$ und $\bar{u}_i^s(s_i^k) \le \bar{u}_i^s(s_i)$, somit $\delta_i^k = 0$.
Aus $\check{p}_i^k = p_i^k$ folgt $\delta_i^j = 0$ für alle $j = 0, 1, \dots, \ell$, also $\bar{u}_i^s(s_i^j) \le \bar{u}_i^s(s_i)$.
Demnach gilt $\bar{u}_i^s(s_i) = \max \bar{u}_i^s$; jede Strategie s_i ist eine beste Antwort.

🙂 Dieser geniale Beweis ist in wenigen Zeilen hingeschrieben und so gesehen leicht, ich finde ihn dennoch extrem raffiniert. Wenn Sie länger darüber nachdenken, werden Sie ihn schließlich recht natürlich finden: Die Nash–Funktion f beschreibt eine Optimierung durch *Trial and Error*, die wir in unseren Experimenten bereits intuitiv angewendet haben.

Illustration der Nash–Funktion

🙂 Der Beweis ist leider nicht *konstruktiv*, aber sehr wohl *instruktiv*.
Wir illustrieren die Nash–Funktion f aus dem Beweis im kleinsten Fall: zwei Spieler mit je zwei reinen Strategien, $S_1 = \{s_1^0, s_1^1\}$, $S_2 = \{s_2^0, s_2^1\}$.
Die gemischten Strategien $s_1 = (1-p)s_1^0 + ps_1^1$ und $s_2 = (1-q)s_2^0 + qs_2^1$ parametrisieren wir hierbei durch die beiden Parameter $(p,q) \in [0,1]^2$.
Die Auszahlungsfunktion $\tilde{u} : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$ ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_1(p,q) &= a_{00}(1-p)(1-q) + a_{10}p(1-q) + a_{01}(1-p)q + a_{11}pq \\
\tilde{u}_2(p,q) &= b_{00}(1-p)(1-q) + b_{10}p(1-q) + b_{01}(1-p)q + b_{11}pq
\end{aligned}$$

Die Nash–Funktion $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ aus dem Beweis ist dann:

$$\check{p} = f_1(p,q) = \frac{p + [\tilde{u}_1(1,q) - \tilde{u}_1(p,q)]^+}{1 + [\tilde{u}_1(0,q) - \tilde{u}_1(p,q)]^+ + [\tilde{u}_1(1,q) - \tilde{u}_1(p,q)]^+} \in [0,1]$$

$$\check{q} = f_2(p,q) = \frac{q + [\tilde{u}_2(p,1) - \tilde{u}_2(p,q)]^+}{1 + [\tilde{u}_2(p,0) - \tilde{u}_2(p,q)]^+ + [\tilde{u}_2(p,1) - \tilde{u}_2(p,q)]^+} \in [0,1]$$

Als Komposition stetiger Funktionen ist f offensichtlich stetig.

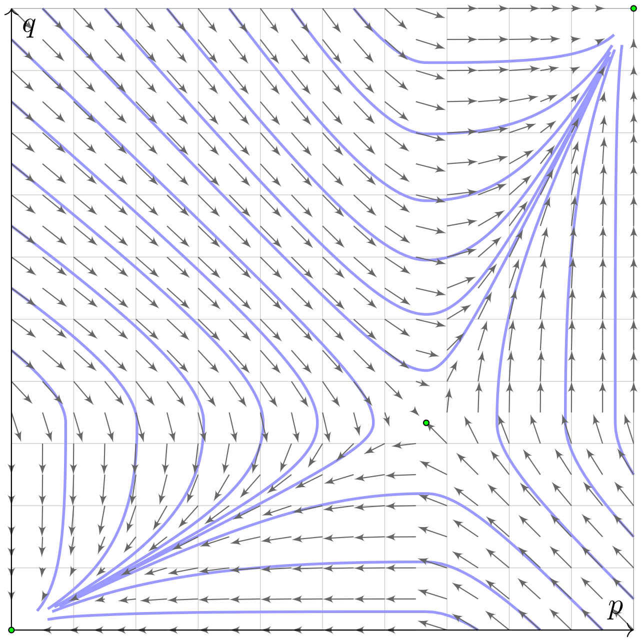
Nash–Funktion zu Bach oder Strawinsky

Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Bach oder Strawinsky* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

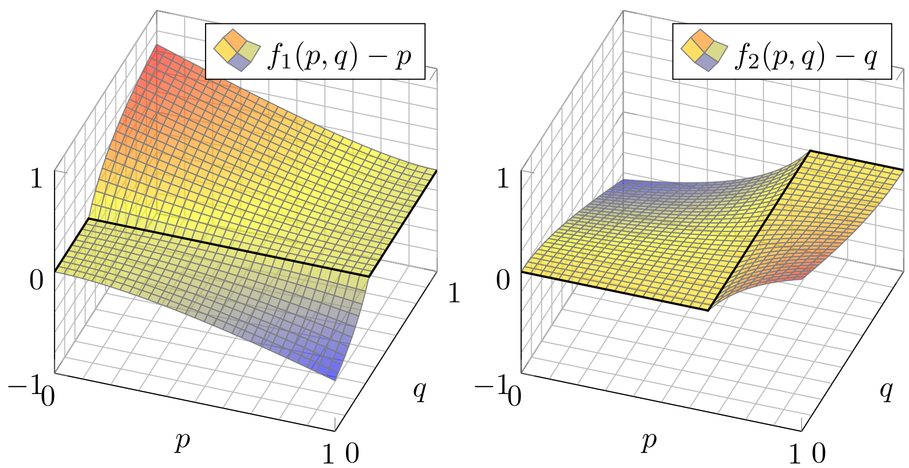
A \ B	Bach	Strawinsky
Bach	1 / 2	0 / 0
Strawinsky	0 / 0	2 / 1

Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ als Vektorfeld $f(p,q) - (p,q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.

Wir sehen wunderbar die drei Fixpunkte des Vektorfeldes. Für das Spiel $\bar{u}$ sind dies die drei Nash–Gleichgewichte. Zur Anregung Ihrer Phantasie zeige ich typische Flusslinien.



Nash–Funktion zu Bach oder Strawinsky



Wir zeigen das Vektorfeld $(u,v) = f(p,q) - (p,q)$ und die Komponenten.
Die Nullstellenmengen von u und v sind jeweils die Reaktionsfunktionen.
Jede Nullstelle $u(p,q) = 0$ bedeutet: p ist eine beste Antwort auf q.
Jede Nullstelle $v(p,q) = 0$ bedeutet: q ist eine beste Antwort auf p.
Die Gleichgewichte $(0,0)$ und $(1,1)$ sind stabil, aber $(2/3, 1/3)$ instabil.

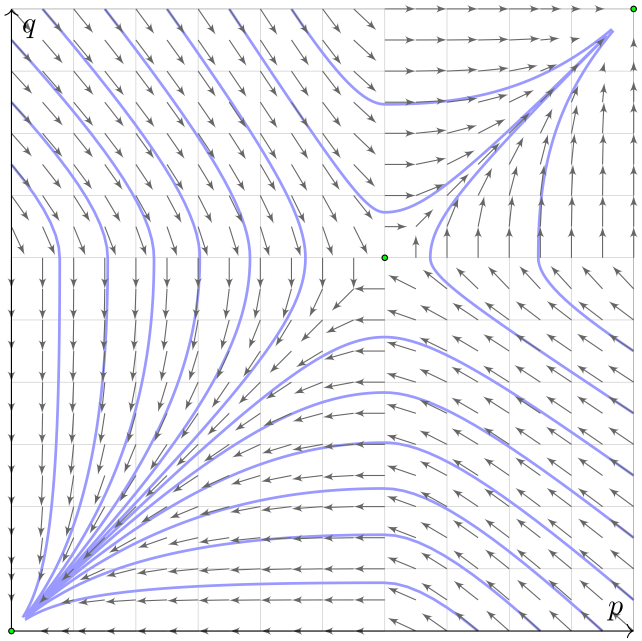
Nash–Funktion zu Bleiben-oder-Gehen

Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Bleiben-oder-Gehen* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

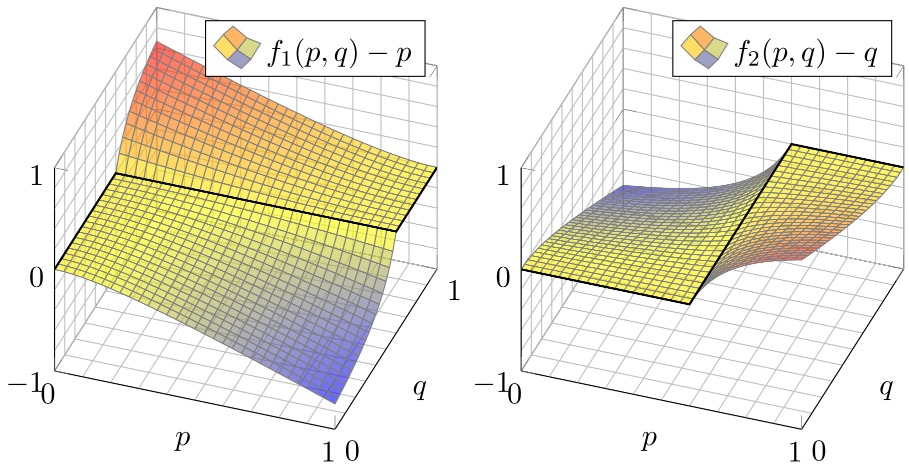
A \ B	Bleiben	Gehen
Bleiben	-2 / -2	-5 / -2
Gehen	-2 / -5	0 / 0

Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ als Vektorfeld $f(p,q) - (p,q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.

Wir sehen wunderbar die drei Fixpunkte des Vektorfeldes. Für das Spiel $\bar{u}$ sind dies die drei Nash–Gleichgewichte.



Nash–Funktion zu Bleiben-oder-Gehen



Wir zeigen das Vektorfeld $(u,v) = f(p,q) - (p,q)$ und die Komponenten.
Die Nullstellenmengen von u und v sind jeweils die Reaktionsfunktionen.
Jede Nullstelle $u(p,q) = 0$ bedeutet: p ist eine beste Antwort auf q.
Jede Nullstelle $v(p,q) = 0$ bedeutet: q ist eine beste Antwort auf p.
Die Gleichgewichte $(0,0)$ und $(1,1)$ sind stabil, aber $(0.6, 0.6)$ instabil.

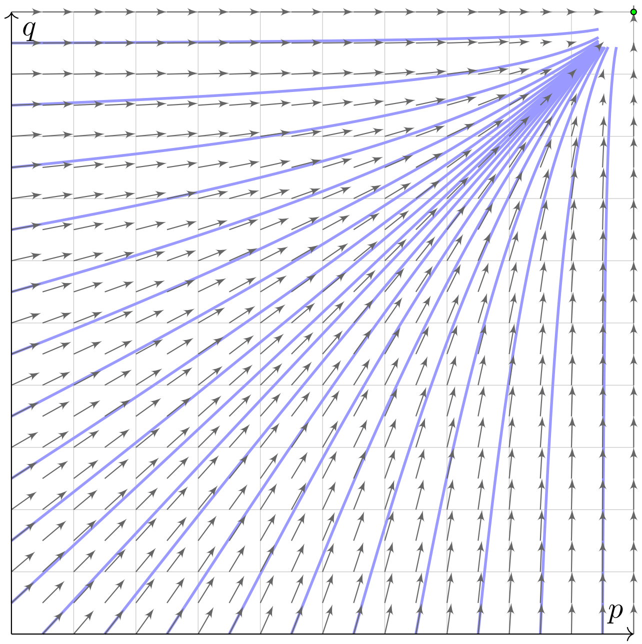
Nash–Funktion zum Gefangenendilemma

Zur Erinnerung die Daten des *Gefangenendilemmas* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

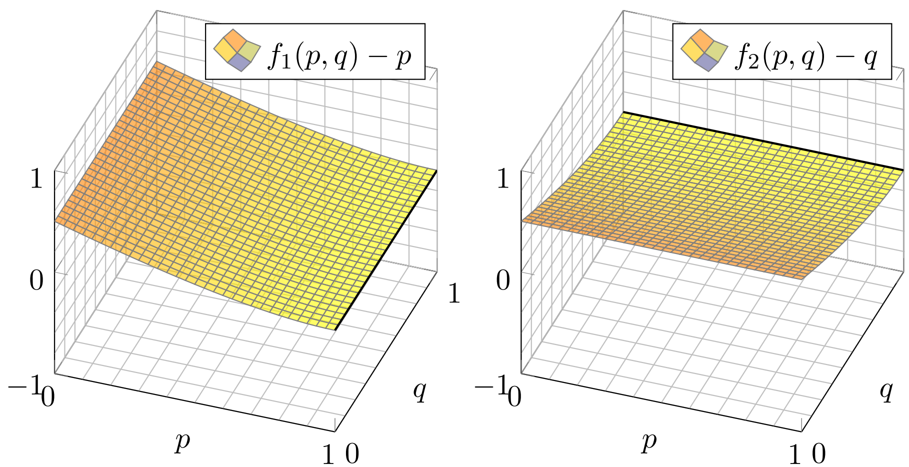
A \ B	Schweigen	Gestehen
Schweigen	-1 / -1	0 / -5
Gestehen	-5 / 0	-4 / -4

Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ als Vektorfeld $f(p,q) - (p,q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.

Wir sehen wunderbar den einzigen Fixpunkt des Vektorfeldes. Für das Spiel $\bar{u}$ ist dies das einzige Nash–Gleichgewicht.



Nash–Funktion zum Gefangenendilemma



Wir zeigen das Vektorfeld $(u,v) = f(p,q) - (p,q)$ und die Komponenten.
Die Nullstellenmengen von u und v sind jeweils die Reaktionsfunktionen.
Jede Nullstelle $u(p,q) = 0$ bedeutet: p ist eine beste Antwort auf q.
Jede Nullstelle $v(p,q) = 0$ bedeutet: q ist eine beste Antwort auf p.
Das Gleichgewicht $(0,0)$ ist hier stabil.

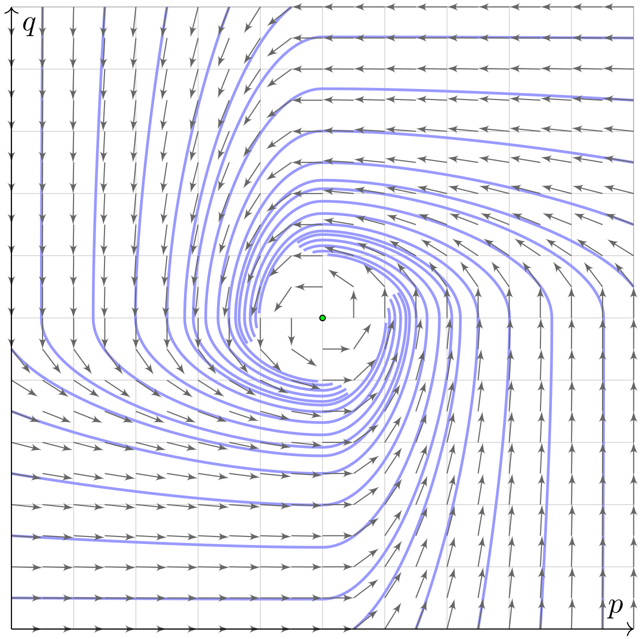
Nash–Funktion zu Matching Pennies

Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Matching Pennies* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

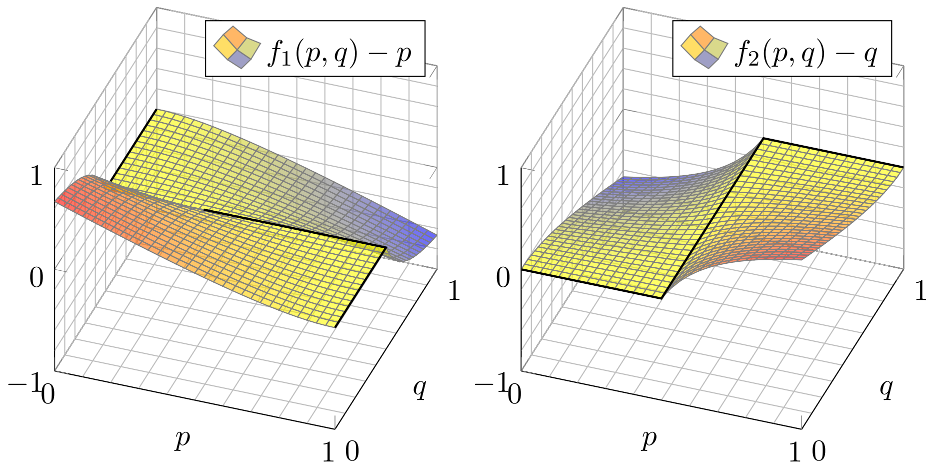
A \ B	Kopf	Zahl
Kopf	A: -1, B: $+1$	A: $+1$, B: -1
Zahl	A: $+1$, B: -1	A: -1, B: $+1$

Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ als Vektorfeld $f(p,q) - (p,q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.

Wir sehen wunderbar den einzigen Fixpunkt des Vektorfeldes. Für das Spiel $\bar{u}$ ist dies das einzige Nash–Gleichgewicht.



Nash–Funktion zu Matching Pennies



Wir zeigen das Vektorfeld $(u,v) = f(p,q) - (p,q)$ und die Komponenten. Die Nullstellenmengen von u und v sind jeweils die Reaktionsfunktionen. Jede Nullstelle $u(p,q) = 0$ bedeutet: p ist eine beste Antwort auf q. Jede Nullstelle $v(p,q) = 0$ bedeutet: q ist eine beste Antwort auf p. Das Gleichgewicht $(1/2, 1/2)$ ist ein stabiler Strudelpunkt.

Nash–Funktion und spielend Lernen

Eine Interpretation ist die folgende: Die beiden Spieler starten in einem Zustand $(p,q) \in [0,1]^2$, beobachten das Ergebnis und aktualisieren ihre Strategien in kleinen Schritten: Sie spielen erneut und beobachten und aktualisieren, usw. Das ist im Wesentlichen das **Euler–Verfahren**.

Im Grenzübergang zu beliebig kleinen Schritten erhalten wir die **Differentialgleichung** $\dot{x} = g(x)$ zum oben gezeigten Vektorfeld $g(x) = f(x) - x$. Hierzu habe ich die Flusslinien gezeichnet.

Aufgabe: Wie glatt ist das Vektorfeld g in der Gleichung $\dot{x} = g(x)$? Garantiert das Existenz, Eindeutigkeit und Glattheit von Lösungen?

Bei der Definition der Nash–Funktion $f : \bar{S} \to \bar{S}$ haben wir noch einige Freiheiten, wie oben erwähnt. Insbesondere können wir f nicht nur stetig konstruieren, sondern auch stetig differenzierbar, sogar **beliebig glatt**.

Somit nutzen wir hier alle Werkzeuge der **autonomen dynamischen Systeme**, also der gewöhnlichen Differentialgleichungssysteme.

Wir sehen in den obigen Beispielen **stabile und instabile Fixpunkte**. Das hat unmittelbare Auswirkungen in der Populationsdynamik.

Nash–Funktion und Populationsdynamik

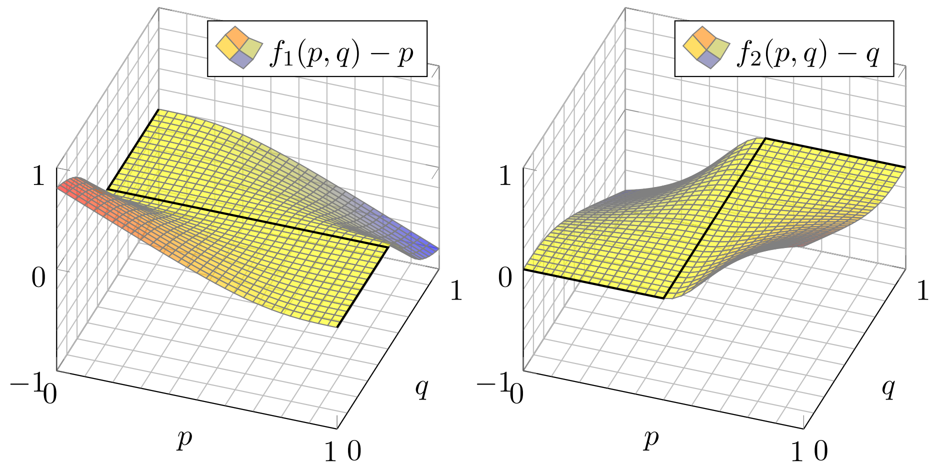
Statt zweier Spieler können wir uns auch zwei **Populationen** A und B vorstellen. In der ersten ist die Mischung der Strategien $1-p$ und p, in der zweiten $1-q$ und q. Jedes Individuum aus Population A spielt gegen zahlreiche Gegner aus Population B und aktualisiert aufgrund dieser Erfahrung seine Strategie, falls ihm das profitabel erscheint.

Der Vorteil dieser Sichtweise ist, dass die mentalen Anforderungen an die Individuen sehr gering sind. Dieses Modell lässt sich daher auch in der **Evolutionsbiologie** gut anwenden, sogar auf das Verhalten von einfachen Lebewesen, etwa Insekten, die nur geringe Rechenkapazität und keinerlei spieltheoretische Kenntnisse haben (soweit ich weiß).

Die Individuen beider Populationen optimieren ihr Verhalten nicht aktiv, diese Aufgabe übernimmt die **Selektion** von ganz allein: Erfolgreiche Strategien vermehren sich schneller, weniger erfolgreiche langsamer.

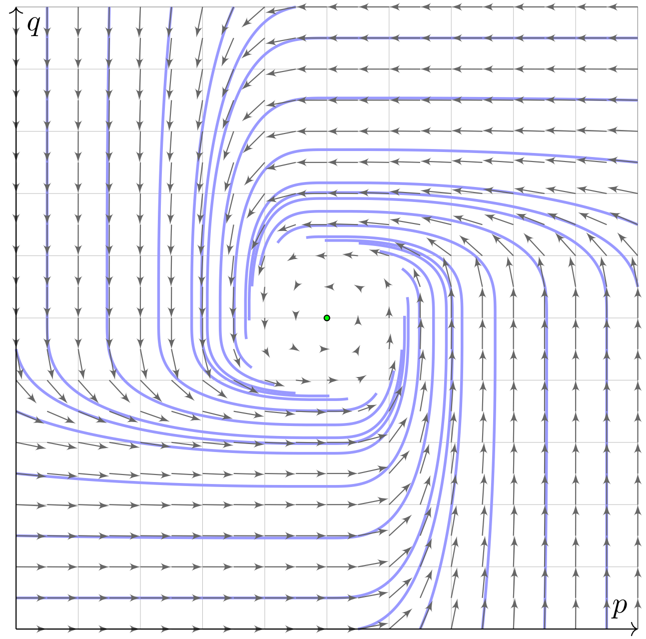
Im Mittel beobachten wir die gerade erklärte **Populationsdynamik**. Anschaulich strebt sie einem stabilen Fixpunkt zu oder ruht in einem. Instabile Fixpunkte hingegen werden nicht dauerhaft beobachtet.

Variante: differenzierbare Nash–Funktion

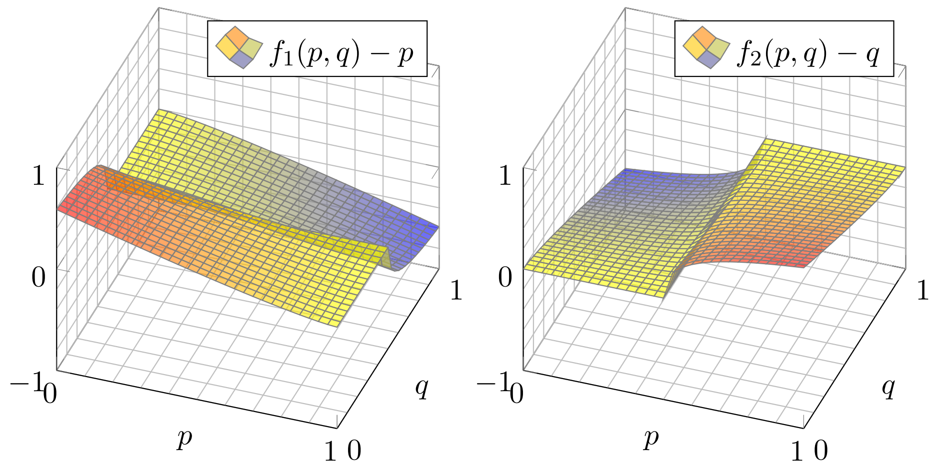


Die Funktion $x \mapsto x^+$ ist stetig aber in $x = 0$ nicht differenzierbar, also C^0 aber nicht C^1. Ich ersetze sie hier durch die Funktion $x \mapsto (x^+)^2$, diese ist C^1 aber nicht C^2. Die Graphik ist erwartungsgemäß deutlich glatter, allerdings sehen wir die Nullstellen nicht mehr so markant als Knicke.

Variante: differenzierbare Nash–Funktion



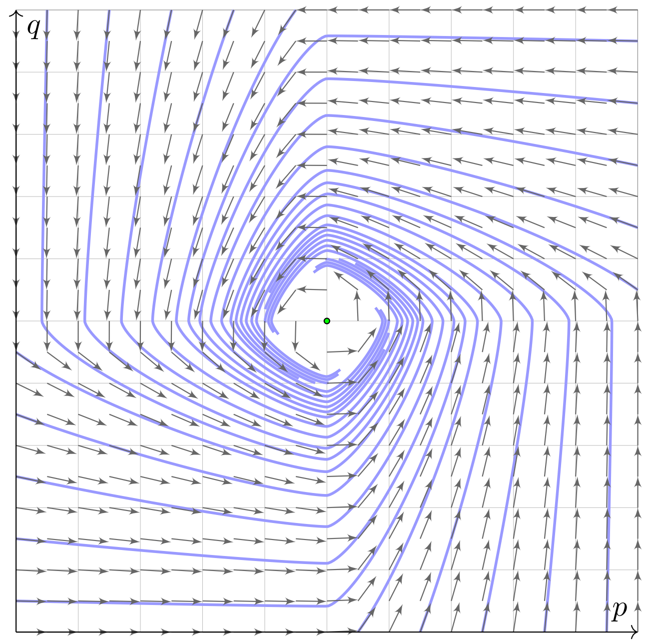
Variante: hölder–stetige Nash–Funktion



Die Funktion $x \mapsto x^+$ ist lipschitz-stetig mit Steigung ≤ 1. Ich ersetze sie hier durch die Funktion $x \mapsto \sqrt{x^+}$, diese ist immerhin noch hölder–stetig zum Exponenten $1/2$. Die Knicke sind erwartungsgemäß noch markanter.

Zur Modellierung der Populationsdynamik bestehen viele Möglichkeiten! Die numerischen Parameter passen wir den empirischen Daten an.

Variante: hölder-stetige Nash–Funktion



Rückblick und Zusammenfassung

Zur Erinnerung: Was ist ein strategisches Spiel? Eine Abbildung

$$u : S_1 \times \cdots \times S_n \to R_1 \times \cdots \times R_n.$$

Was ist hierzu ein Nash–Gleichgewicht $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$? Für jeden Spieler i ist die von ihm gewählte Strategie s_i eine beste Antwort auf die Gegenstrategien $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$. Kein Spieler i hat einen Anreiz, seine Strategie s_i zu ändern.

Hat jedes Spiel solche Gleichgewichte? Nein, es gibt Gegenbeispiele. Der Satz B1E von Nash garantiert für jedes endliche reelle Spiel u die Existenz gemischter Nash–Gleichgewichte, kurz $\mathrm{NE}(\bar{u}) \neq \emptyset$.

Interpretation und Anwendung: Wie und warum kommen Spieler dazu, tatsächlich ein solches Nash–Gleichgewicht zu spielen?

- Rationale Analyse des Spiels (*rational reasoning*)
- Kommunikation vor dem Spiel (*pre-play communication*)
- Evolution durch Versuch und Irrtum (*trial-and-error adjustment*)

Rückblick und Zusammenfassung

Hier ist S_i die Menge der **Strategien**, die Spieler i wählen kann, und R_i ist die Menge seiner **Resultate**, linear geordnet durch $\le_i$. Wir nennen $u_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to R_i$ die **Nutzenfunktion** für Spieler i. Meist sind R_i die reellen Zahlen, wir nennen dies ein **reelles Spiel**.

Jeder Spieler i versucht seinen Gewinn $u_i(s) \in R_i$ zu maximieren. Allerdings kontrolliert jeder Spieler i nur seine eigene Strategie $s_i \in S_i$, nicht jedoch die Strategien $s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n$ der anderen Spieler!

🙂 So können wir Spiele darstellen: einheitlich, übersichtlich, präzise.

Zur Analyse solcher Konfliksituationen dienen **Nash–Gleichgewichte**. Dies ist ein zentral wichtiges, nützliches und bewährtes Werkzeug. Hierzu beginnen wir, die mathematischen Grundlagen zu legen, in Form von tragfähigen Definitionen, sodann Sätzen und Beweisen.

Dies sind zunächst mathematische Konzepte. Wir wollen sie schließlich auf Anwendungen übertragen. Dabei stellt sich die kritische Frage, ob Nash–Gleichgewichte tatsächlich gespielt werden: wann? wie? warum? Hierzu möchte ich drei mögliche Begründungen darlegen.

Rückblick und Zusammenfassung

Rationale Analyse des Spiels. In manchen Anwendungen ist es plausibel anzunehmen, dass alle Spieler hinreichend rational sind.

Das gilt insbesondere, wenn das Spiel einfach zu analysieren ist und die Spieler ausreichend Zeit dazu haben. Oder wenn das Spiel so wichtig ist, dass alle Spieler die notwendigen Analysen durchführen (müssen).

🙂 Gibt es nur ein Nash–Gleichgewicht, so wird genau dieses gespielt. Dank hinreichender Rationalität kennt jeder Spieler das Gleichgewicht, und kein Spieler hat einen Anreiz, davon abzuweichen.

☹ Dieses Argument gilt nur bei einem eindeutigen Gleichgewicht. Gibt es mehrere, wie bei Bach-oder-Strawinsky, so ist die Wahl offen.

Kommunikation vor dem Spiel. In manchen Anwendungen ist es möglich, dass alle Spieler vor dem Spiel kommunizieren. Sie können dies nutzen und einen Strategievektor $(s_1, \dots, s_n)$ verabreden.

☹ Diese Verabredung ist allerdings nicht bindend oder einklagbar.

🙂 Ist $(s_1, \dots, s_n)$ ein Nash–Gleichgewicht, so ist diese Vereinbarung selbst-stabilisierend: Kein Spieler hat einen Anreiz, davon abzuweichen.

Rückblick und Zusammenfassung

Evolution durch Versuch und Irrtum. Wir betrachten ein endliches reelles Spiel $u : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}^n$. Dieses wird nun häufig wiederholt. Jeder Spieler i beginnt mit einer gemischten Strategie $s_i \in \bar{S}_i$ und passt sie nach jedem Spieldurchgang an, etwa vermöge der Nash–Funktion.

🙂 Günstigenfalls konvergiert dieser Prozess gegen ein Gleichgewicht: Die Gleichgewichte sind Fixpunkte der Nash–Funktion, und Konvergenz liegt vor, wenn wir im Attraktionsbecken eines Fixpunktes starten.

Der Vorteil dieser Sichtweise ist, dass die mentalen Anforderungen an die Individuen sehr gering sind. Dieses Modell lässt sich daher auch in der **Evolutionsbiologie** gut anwenden. Hier spielen **Populationen** gegeneinander. Die Individuen optimieren ihr Verhalten nicht aktiv, diese Aufgabe übernimmt die **Selektion** von ganz allein: Erfolgreiche Strategien vermehren sich schneller, weniger erfolgreiche langsamer. Im Mittel beobachten wir die gerade erklärte **Populationsdynamik**.

🙂 Die **evolutionäre Spieltheorie** arbeitet diese Ideen aus und untersucht evolutionäre Phänomene mit spieltheoretischen Methoden.

Gleichgewichte und Minimax = Maximin

Lemma B2A (Gleichgewichte und Minimax = Maximin)

Sei $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein Nullsummenspiel, also $u_1 + u_2 = 0$.
(0) Allgemein gilt „Maximin $\le$ Minimax“, also ausgeschrieben:

$$\max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) \le \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y)$$

(1) Ist $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ ein Nash–Gleichgewicht, so gilt Gleichheit:

$$u_1(s_1, s_2) = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y)$$

(2) Angenommen, es gilt die Gleichheit „Maximin = Minimax“. Wir wählen einen Min-Maximierer $s_1 \in S_1$ und Max-Minimierer $s_2 \in S_2$:

$$v = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) = \min_{y \in S_2} u_1(s_1, y),$$
$$v = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y) = \max_{x \in S_1} u_1(x, s_2).$$

Dann ist das Paar $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ ein Nash–Gleichgewicht.

Gleichgewichte und Minimax = Maximin

Beweis: (0) Für alle $x \in S_1$ und $y \in S_2$ gilt:

$$\begin{aligned}
u_1(x, y) &\overset{(a)}{\le} u_1(x, y) \\
u_1(x, y) &\overset{(b)}{\le} \max_{x \in S_1} u_1(x, y) \\
\min_{y \in S_2} u_1(x, y) &\overset{(c)}{\le} \max_{x \in S_1} u_1(x, y) \\
\min_{y \in S_2} u_1(x, y) &\overset{(d)}{\le} \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y) \\
\max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) &\overset{(e)}{\le} \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y)
\end{aligned}$$

Die Ungleichung (a) ist trivial. Wir nehmen rechts das Maximum über x, damit wird die rechte Seite höchstens größer, also gilt (b). Wir nehmen links das Minimum über y, damit wird die linke Seite höchstens kleiner, also gilt (c). Die Ungleichung (c) gilt somit für alle $x \in S_1$ und $y \in S_2$; dabei hängt allerdings die linke Seite nur noch von x ab und die rechte Seite nur noch von y. Hieraus folgen sofort (d) und (e).

Gleichgewichte und Minimax = Maximin

(1) Für jedes Nash–Gleichgewicht $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ gilt:

$$\left\{ \begin{aligned}
u_1(s_1, s_2) &= \min_{y \in S_2} u_1(s_1, y) &\le \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) \\
u_1(s_1, s_2) &= \max_{x \in S_1} u_1(x, s_2) &\ge \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y)
\end{aligned} \right\} \implies$$

$$\min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y) \le u_1(s_1, s_2) \le \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y)$$

Dank (0) gilt auch die umgekehrte Ungleichung, hieraus folgt Gleichheit.

(2) Dank der genannten Voraussetzungen gilt:

$$\left\{ \begin{aligned}
u_1(s_1, s_2) &\ge \min_{y \in S_2} u_1(s_1, y) = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) = v \\
u_1(s_1, s_2) &\le \max_{x \in S_1} u_1(x, s_2) = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x, y) = v
\end{aligned} \right\} \implies$$

$$u_1(s_1, s_2) = \min_{y \in S_2} u_1(s_1, y) = \max_{x \in S_1} u_1(x, s_2)$$

Demnach ist $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ ein Nash–Gleichgewicht. $\boxed{\text{QED}}$

Gleichgewichte und Minimax = Maximin

Diese genial-einfache Umrechnung klärt die Beziehung zwischen Nash–Gleichgewichten und Min-Maximierern und Max-Minimierern. Hieraus folgen grundlegende Rechenregeln für Nullsummenspiele:

Bemerkung B2B (nützliche Folgerungen)

(1) Genau dann erfüllt unser Nullsummenspiel $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$ die Gleichung „Minimax = Maximin“, wenn Nash–Gleichgewichte existieren.

(2) Alle Nash–Gleichgewichte führen zum selben Ergebnis: Sind (s_1, s_2) und (s_1^*, s_2^*) Nash–Gleichgewichte, dann gilt $u_1(s_1, s_2) = u_1(s_1^*, s_2^*)$.

(3) Alle Nash–Gleichgewichte sind austauschbar: Sind (s_1, s_2) und (s_1^*, s_2^*) Nash–Gleichgewichte, dann auch (s_1, s_2^*) und (s_1^*, s_2).

🙂 Die Aussagen (2) und (3) gelten für alle Nash–Gleichgewichte.

☹ Es gibt Spiele ohne Nash–Gleichgewichte, wie zuvor gesehen. Auch für diese sind die Aussagen (2) und (3) wahr, aber eben leer. Das passiert, wenn wir über die leere Menge reden. Einfache Analogie: „Alle meine Ferraris sind pink. Und alle meine Ferraris sind grün. Folgt daraus pink gleich grün?“ Nein, daraus folgt: Ich habe gar keinen Ferrari.

Die Sätze von Nash und von Neumann

Gleichgewichte sind grundlegend. Gibt es sie immer? Ja, oft genug:

♦ Satz B1E (Existenzsatz für Gleichgewichte, John Nash 1950)

Sei $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ ein endliches reelles Spiel, wie oben erklärt, und $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \to \mathbb{R}^n$ seine Fortsetzung auf gemischte Strategien.

Dann besitzt das Spiel $\bar{u}$ mindestens ein Nash–Gleichgewicht.

Hieraus folgt der Hauptsatz für Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele:

Korollar B2C (Minimax-Satz, John von Neumann 1928)

Sei $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$ ein endliches Nullsummenspiel, also $u_1 + u_2 = 0$, und $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \to \mathbb{R}^2$ seine Fortsetzung auf gemischte Strategien.

Dann besitzt das Spiel $\bar{u}$ mindestens ein Gleichgewicht, und somit gilt

$$v = \max_{x \in \bar{S}_1} \min_{y \in \bar{S}_2} \bar{u}_1(x, y) = \min_{y \in \bar{S}_2} \max_{x \in \bar{S}_1} \bar{u}_1(x, y).$$

*Dies nennen wir den **Wert** des Spiels $\bar{u}$ für Spieler 1.*

Die Sätze von Nash und von Neumann

🙂 Dieser Wert ist das erwartete Ergebnis bei rationaler Spielweise.

Mit diesem Satz begann die Theorie, als erstes substantielles Ergebnis: Jedem Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel wird so ein Wert zugeordnet. Von Neumann bewies diesen Satz 1928 zunächst auf andere Weise. Nashs allgemeiner Existenzsatz eröffnete 1951 einen kürzeren Weg.

Definition B2D (konstante Summe und strikt kompetitiv)

Ein Spiel $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ hat **konstante Summe (Null)**, wenn es die Bedingung $u_1 + \dots + u_n = \mathrm{const}$ (bzw. $= 0$) erfüllt.

Ein Zwei-Personen-Spiel $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$ ist **strikt kompetitiv**, wenn für alle $s, s' \in S$ die Äquivalenz $u_1(s) < u_1(s') \iff u_2(s) > u_2(s')$ gilt.

Für **kompetitive Spiele** verlangen wir diese Äquivalenz nur für alle Strategievektoren $s, s' \in S$, die sich in einer Koordinate unterscheiden.

Aufgabe: Konstante Summe $\overset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ strikt kompetitiv $\overset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ kompetitiv.
Gilt das Minimax-Lemma B2A für kompetitive Spiele $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$?
Wenn u kompetitiv ist, gilt dies dann auch für die Fortsetzung $\bar{u}$?
Hat u konstante Summe, dann auch $\bar{u}$. (Dies nutzen wir in B2C.)

Die Sätze von Nash und von Neumann

Kompetitive Spiele sind ein sehr spezieller aber durchaus wichtiger Fall. Es lohnt sich daher, hierzu spezielle Sätze und Techniken zu entwickeln. In vielen realistischen Situationen haben Spiele nicht konstante Summe und sind auch nicht kompetitiv. Nash–Gleichgewichte helfen allgemein!

Beispiel: Das Spiel *Schere-Stein-Papier* hat kein Gleichgewicht in reinen Strategien. Auch der Minimax-Satz gilt nicht in reinen Strategien. In gemischten Strategien haben die Spieler viel mehr Möglichkeiten. Der Satz von Nash sagt die Existenz von Gleichgewichten voraus. Hier ist $\frac{1}{3} \cdot$ Schere $+ \frac{1}{3} \cdot$ Stein $+ \frac{1}{3} \cdot$ Papier das einzige Gleichgewicht.

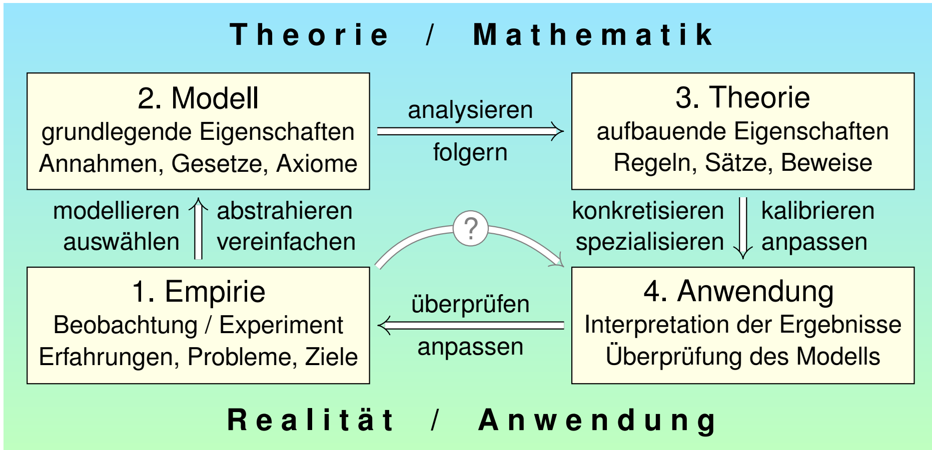
Aufgabe: Prüfen Sie sorgfältig nach, dass dies ein Gleichgewicht ist. Wie zeigen Sie geschickt, dass dies das einzige Gleichgewicht ist?

Aufgabe: Finden Sie im Spiel *Matching Pennies* alle Gleichgewichte in reinen Strategien und dann alle in gemischten Strategien. (Graphik!)

Aufgabe: Untersuchen Sie ebenso alle bisher vorgestellten Spiele. Welche haben konstante Summe, welche sind (strikt) kompetitiv? Finden Sie alle Nash–Gleichgewichte und vergleichen Sie diese beiderseitig mit Sicherheitsstrategien (also Min-Maximierern).

Wozu dient Mathematik?

Alles Leben ist Problemlösen. (Karl Popper)



Mathematik untersucht sowohl abstrakte Strukturen als auch konkrete Anwendungen. Dies sind keine Gegensätze, sondern sie ergänzen sich!

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie. (Immanuel Kant)

Strategische Spiele in Normalform

Bislang genügte uns die Spielermenge $I = \{1, 2\}$ oder $I = \{1, 2, \dots, n\}$. Wir definieren Spiele nun allgemein für eine beliebige Spielermenge I:

Definition B2E (strategisches Spiel in Normalform)

Ein **strategisches Spiel in Normalform** ist eine Abbildung

$$\boxed{u : S = \prod_{i\in I} S_i \to R = \prod_{i\in I} R_i \;:\; s = (s_i)_{i\in I} \mapsto r = (r_i)_{i\in I}}$$

Formal ist dieses Spiel $\Gamma = (I, S, R, u)$ gegeben durch

1. eine Menge I von **Spielern** sowie für jeden Spieler $i \in I$
2. eine Menge $S_i \ne \emptyset$, deren Elemente wir **Strategien** nennen,
3. eine linear geordnete Menge $(R_i, \le_i)$ der möglichen **Resultate**,
4. eine Abbildung $u_i : S \to R_i : s \mapsto r_i$, genannt **Nutzenfunktion**.

Für ein **endliches Spiel** fordern wir I und S_i endlich für jedes $i \in I$. Im Falle eines **reellen Spiels** fordern wir zudem $R_i = \mathbb{R}$ für alle $i \in I$. Das Spiel ist die **Auszahlungsfunktion** $u : \prod_{i\in I} S_i \to \prod_{i\in I} \mathbb{R} = \mathbb{R}^I$.

Strategische Spiele in Normalform

Jeder Spieler $i \in I$ kann seine Strategie $s_i \in S_i$ frei wählen, unabhängig von allen anderen Spielern, und er hat auch nur auf s_i direkten Einfluss. Wir zerlegen $S := \prod_{i\in I} S_i$ in die Faktoren S_i und $S_{-i} := \prod_{j\in I\smallsetminus\{i\}} S_j$:

$$S \xrightarrow{\sim} S_i \times S_{-i} \;:\; s \mapsto (s_i; s_{-i})$$

Ein Element $s \in \prod_{i\in I} S_i$ heißt **Strategievektor**: $s = (i \mapsto s_i)_{i\in I}$
Es ordnet jedem Spieler $i \in I$ eine seiner Strategien $s_i \in S_i$ zu.
Wir schreiben $s_{-i} = s|_{I\smallsetminus\{i\}}$ für die **Einschränkung** auf $I \smallsetminus \{i\}$
und $s = (s_i; s_{-i}) = \{i \mapsto s_i\} \cup s_{-i}$ für die **Ergänzung** um $i \mapsto s_i$.

Besser und konfliktfrei wäre statt s_{-i} die Notation $s_{\smallsetminus i} \in S_{\smallsetminus i}$.
Ich folge hier der üblichen und verbreiteten Schreibweise $s_{-i} \in S_{-i}$.
Weit verbreitet ist ebenso die Schreibweise $(s_i|s_{-i})$ für $(s_i; s_{-i})$.

Die Nutzenfunktion $u_i : S \to R_i$ schreiben wir damit bequem:

$$u_i \;:\; S_i \times S_{-i} \xrightarrow{\sim} S \to R_i \;:\; (s_i; s_{-i}) \mapsto u_i(s_i; s_{-i})$$

Die explizite Nennung der Bijektion $S \xrightarrow{\sim} S_i \times S_{-i} : s \mapsto (s_i; s_{-i})$ unterdrücken wir hierbei und benennen beide Funktionen mit u_i.

Nash–Gleichgewichte

Definition B2F (Nash–Geichgewicht)

(1) Ein Strategievektor $s \in S$ heißt **stabil für Spieler** $i \in I$, wenn gilt:

$$\boxed{u_i(s_i; s_{-i}) \ge u_i(x; s_{-i}) \quad \text{für alle } x \in S_i}$$

(2) Wir nennen $s \in S$ **strikt stabil für Spieler** $i \in I$, wenn gilt:

$$\boxed{u_i(s_i; s_{-i}) > u_i(x; s_{-i}) \quad \text{für alle } x \in S_i \smallsetminus \{s_i\}}$$

(3) Ein Strategievektor $s \in S$ heißt **(striktes) Nash–Gleichgewicht**, wenn er (strikt) stabil ist für jeden Spieler $i \in I$. Wir schreiben hierfür

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{NE}(u) &= \{\, s \in S \mid s \text{ ist ein Nash–Gleichgewicht von } u \,\} \quad \text{sowie} \\ \mathrm{NE}^!(u) &= \{\, s \in S \mid s \text{ ist ein striktes Nash–Gleichgewicht von } u. \,\} \end{aligned}}$$

☺ Satz von Nash: Für jedes endliche reelle Spiel u gilt $\mathrm{NE}(\bar{u}) \ne \emptyset$.

Nash–Gleichgewichte

Die unmittelbare Bedeutung dieser Definition ist folgende:
(1) Der Spieler i hat keinen Vorteil davon, seine Strategie s_i zu ändern.
(2) Der Spieler i hat sogar einen Nachteil davon, von s_i abzuweichen.
Die Strategien s_{-i} aller anderen Spieler werden als konstant betrachtet. Ich erinnere an die Motivation hinter diesem Modell: Spieler i kontrolliert nur den Parameter $s_i \in S_i$. Er hat auf s_{-i} keinen direkten Einfluss, etwa durch Absprachen, Verträge, Drohungen, o.ä. außerhalb des Spiels.

(3) Kein Spieler hat Anlass, seine Strategie s_i einseitig zu ändern.
(3a) Ausführlicher gesagt: Kein Spieler hat einen Vorteil davon, seine Strategie s_i einseitig zu ändern. Behalten alle anderen ihre Strategien bei, so hat auch er keinen Anlass zu wechseln.
(3b) Im strikten Falle gilt sogar: Jeder Spieler hat einen Nachteil davon, seine Strategie s_i einseitig zu ändern. Behalten alle anderen ihre Strategien bei, so muss auch er seine Strategie beibehalten.

Solche Gleichgewichte beschreiben **mögliches rationales Verhalten**. Die Definition ist einfach, aber die Interpretation bedarf einiger Übung.

Strikt und schwach dominierte Strategien

G \ U	♦A	♣A	♦2
♦A	1 / -1	-1 / 1	1 / -1
♣A	-1 / 1	1 / -1	-2 / 2
♣2	-1 / 1	2 / -2	0 / 0

Aufgabe: (1) Gustav wird eine seiner Karten nie spielen: Welche?

(2) Uschi nimmt an, dass Gustav diese Karte tatsächlich nie spielt. Daher wird auch sie eine ihrer Karten nie spielen: Welche?

Lösung: (1) Gustavs Strategie ♣A wird schwach dominiert von ♣2, sogar strikt dominiert durch $(1-p)\cdot$ ♣2 $+\, p \cdot$ ♦A mit $p \in\,]0, 1/2[$.

(2) Uschis Strategie ♦2 wird schwach dominiert durch ♦A, sogar strikt dominiert durch $(1-q)\cdot$ ♦A $+\, q \cdot$ ♣A mit $q \in\,]0, 1/2[$.

Strikt und schwach dominierte Strategien

🙂 Diese Überlegungen vereinfachen die Untersuchung des Spiels.

Wir erinnern an die Stufen der Rationalität (Definition A2A):

$\mathscr{R}_1$: Ist Gustav rational erster Stufe, so wird er niemals ♣A spielen.

Natürlich *darf* er ♣A spielen, doch das ist in allen Fällen *strikt schlechter* als $(1-p)\cdot$ ♣2 $+\, p \cdot$ ♦A. Das muss Gustav erst einmal erkennen, und hierzu braucht er Rationalität mindestens erster Stufe.

$\mathscr{R}_2$: Ist Uschi nur rational erster Stufe, so kann sie ihre Strategie ♦2 nicht verwerfen: Diese wird noch benötigt als beste Antwort auf Gustavs ♣A.

Ist Uschi jedoch rational zweiter Stufe, so kann sie das obige Argument nutzen und daraus folgern, dass Gustav niemals ♣A spielen wird.

In diesem *reduzierten Spiel* wir Uschis Strategie ♦2 strikt dominiert von $(1-q)\cdot$ ♦A $+\, q \cdot$ ♣A. Daher wird Uschi niemals ♦2 spielen.

⚠ Die Argumentation für Gustav ist leicht, für Uschi etwas schwerer. Bei vollkommener Rationalität ist alles klar. Erfahrungsgemäß dürfen wir jedoch von realen Spielern nicht beliebig viel Rationalität erwarten.

Strikt und schwach dominierte Strategien

Definition B2G (dominierte Strategien)

Sei $u : \prod_{i \in I} S_i \to \prod_{i \in I} R_i$ ein strategisches Spiel.
Sei $i \in I$ ein Spieler und $x, y \in S_i$ zwei seiner Strategien.

Schwache Dominanz $x \ge_i^u y$ bedeutet $u_i(x; s_{-i}) \ge u_i(y; s_{-i})$,
strikte Dominanz $x >_i^u y$ bedeutet $u_i(x; s_{-i}) > u_i(y; s_{-i})$
jeweils für alle Gegenstrategien $s_{-i} \in S_{-i}$.

Für Teilmengen $X, Y \subseteq S_i$ bedeutet Dominanz $X \ge_i^u Y$ bzw. $X >_i^u Y$, zu jedem $y \in Y$ existiert ein $x \in X$ mit $x \ge_i^u y$ bzw. $x >_i^u y$.

Wir schreiben für $\ge_i^u$ kurz $\ge_i$ oder $\ge$, wenn der Kontext dies klar stellt.

🙂 Schwache Dominanz $x \ge_i^u y$ bedeutet: Ein rationaler Spieler **kann** seine Strategie y jederzeit ersetzen durch eine mindestens ebenso gute Alternative, etwa x. Er kann y spielen, er kann es aber auch vermeiden.

🙂 Strikte Dominanz $x >_i^u y$ bedeutet: Ein rationaler Spieler **muss** seine Strategie y jederzeit ersetzen durch eine strikt bessere Alternative, etwa x. Er kann nicht y spielen, er wird dies in jedem Falle vermeiden.

Strikt und schwach dominierte Strategien

Satz B2H (Streichung dominierter Strategien: reiner Fall)

Sei $u : \prod_{i \in I} S_i \to \prod_{i \in I} R_i$ *und* $u' : \prod_{i \in I} S'_i \to \prod_{i \in I} R_i$ *mit* $S_i = S'_i \sqcup D_i$.
(1) Aus strikter Dominanz $S'_i >_i^u D_i$ *folgt* $\mathrm{NE}(u') = \mathrm{NE}(u)$.
(2) Aus schwacher Dominanz $S'_i \ge_i^u D_i$ *folgt* $\mathrm{NE}(u') \subseteq \mathrm{NE}(u)$.

Beweis: (2) Sei $s \in \mathrm{NE}(u')$, also $u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x' \in S'_i} u_i(x'; s_{-i})$.
Dies ist gleich $\max_{x \in S_i} u_i(x; s_{-i})$ dank $S'_i \ge_i^u D'_i$, also $s \in \mathrm{NE}(u)$.

(1) Sei $s \in \mathrm{NE}(u)$, also $u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x \in S_i} u_i(x; s_{-i})$.
Aus $S'_i >_i^u D'_i$ folgt $s_i \in S'_i$, also $s \in S'$ und somit $s \in \mathrm{NE}(u')$. $\boxed{\text{QED}}$

Zu jedem endlichen reellen Spiel $u : \prod_{i \in I} S_i \to \mathbb{R}^I$ betrachten wir auch seine Fortsetzung $\bar{u} : \prod_{i \in I} \bar{S}_i \to \mathbb{R}^I$ auf gemischte Strategien.

Gilt (strikte bzw. schwache) Dominanz B2G bezüglich aller reinen Gegenstrategien $s_{-i} \in S_{-i}$, so auch für alle gemischten $\bar{s}_{-i} \in \bar{S}_{-i}$.

Aus $x_0 \ge_i^u y_0, \dots, x_n \ge_i^u y_n$ folgt $\sum_k p_k x_k \ge_i^u \sum_k p_k y_k$ für alle $p \in \Delta^n$.
Gilt zudem $x_k >_i^u y_k$ und $p_k > 0$ für ein k, so folgt $\sum_k p_k x_k >_i^u \sum_k p_k y_k$.

Strikt und schwach dominierte Strategien

Satz B2I (Streichung dominierter Strategien: gemischter Fall)

Sei $u : \prod_{i\in I} S_i \to \mathbb{R}^I$ *und* $u' : \prod_{i\in I} S'_i \to \mathbb{R}^I$ *mit* $S_i = S'_i \sqcup D_i$. *Dann gilt*

$$\bar S_i = \bar S'_i * \bar D_i = \{\, (1-t)x + ty \mid t \in [0,1],\ x \in \bar S'_i,\ y \in \bar D_i \,\}.$$

Die Differenz der gemischten Strategiemengen ist demnach

$$\bar S_i \smallsetminus \bar S'_i = \{\, (1-t)x + ty \mid t \in\,]0,1],\ x \in \bar S'_i,\ y \in \bar D_i \,\}.$$

(1) Aus $\bar S'_i >^u_i D_i$ *folgt* $\bar S'_i >^u_i \bar S_i \smallsetminus \bar S'_i$ *wie zuvor erklärt.*

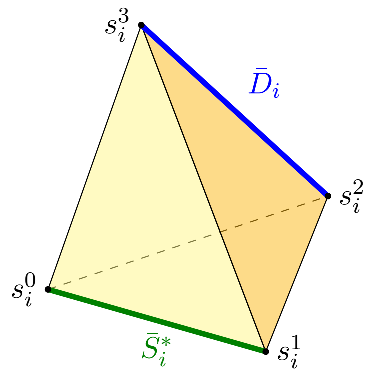
Das bedeutet: Strikt dominierte Strategien von u *kommen in keinem Nash–Gleichgewicht von* $\bar u$ *vor. Bei ihrer Streichung gilt* $\mathrm{NE}(\bar u') = \mathrm{NE}(\bar u)$.

(2) Aus $\bar S'_i \geq^u_i D_i$ *folgt* $\bar S'_i \geq^u_i \bar S_i \smallsetminus \bar S'_i$ *wie zuvor erklärt.*

Bei Streichung schwach dominierter Strategien gilt $\mathrm{NE}(\bar u') \subseteq \mathrm{NE}(\bar u)$. *Im Allgemeinen können dabei Nash–Gleichgewichte verloren gehen.*

Strikt und schwach dominierte Strategien

Aufgabe: Rechnen Sie diese Aussagen zur Übung sorgfältig nach! Geometrisch sieht die Löschung gemischter Strategien etwa so aus:



In diesem Beispiel sei $S_i^* = \{s_i^0, s_i^1\}$ und $D_i = \{s_i^2, s_i^3\}$. Wir können nicht nur die Ecken s_i^2 und s_i^3 löschen, sondern müssen auch alle gemischten Strategien löschen, die diese Ecken in ihrem Träger nutzen, also $\bar S_i \smallsetminus \bar S_i^*$.

Strikt und schwach dominierte Strategien

🙂 Anschaulich gesagt: (2) Beim Erweitern von u' zu u nehmen wir schwach dominierte Strategien hinzu. Diese erhöhen offensichtlich nicht das Maximum für den Spieler $i \in I$, also bleiben Gleichgewichte des kleinen Spiels u' auch Gleichgewichte des großen Spiels u.

(1) Strikt dominierte Strategien kommen in keinem Gleichgewicht vor. Wir können sie getrost streichen oder hinzufügen, auch hinzumischen.

🙂 Streichung dominierter Strategien vereinfacht das Spiel u zu u'. Das hilft bei der Suche nach einem bzw. allen Gleichgewichten:

(2) Die Streichung schwach dominierter Strategien löscht vielleicht Gleichgewichte. Die Inklusion $\mathrm{NE}(\bar u') \subseteq \mathrm{NE}(\bar u)$ hingegen gilt immer: Haben wir also ein Gleichgewicht für u' gefunden, so bleibt dies für u. Das genügt, wenn wir nur *irgendein* Gleichgewicht von u finden wollen.

(1) Die Streichung strikt dominierter Strategien ändert nichts an den Gleichgewichten: Genau das garantiert unsere obige Rechnung.

🙂 Dies können wir iterieren, bis keine Streichungen mehr möglich sind. Hierzu benötigen wir (wie immer) Rationalität entsprechend hoher Stufe!

Erinnerung: Stufen der Rationalität

$\mathscr{R}_1$: Wer von Ihnen weiß, was „Stufen der Rationalität“ bedeutet?
$\mathscr{R}_2$: Wer von Ihnen weiß, dass alle anderen das ebenfalls wissen?
$\mathscr{R}_3$: Wer von Ihnen weiß, dass alle wissen, dass alle das wissen?

♦ **Definition A2A (Stufen der Rationalität)**

Unter **Rationalität** fassen wir folgende Axiome zusammen:

$\mathscr{R}_0$: Jeder Spieler will seinen Gewinn maximieren.

$\mathscr{R}_1$: Jeder Spieler kennt und versteht die Regeln des Spiels.

$\mathscr{R}_2$: Es gelten die Aussagen $\mathscr{R}_0, \mathscr{R}_1$, und jeder Spieler weiß dies.

$\mathscr{R}_3$: Es gilt die Aussage $\mathscr{R}_2$, und jeder Spieler weiß dies.

etc… Genauer definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ die Aussage

$\mathscr{R}_n$: Es gilt die Aussage $\mathscr{R}_{n-1}$, und jeder Spieler weiß dies.

$\mathscr{R}_\infty$: Es gelten die Aussagen $\mathscr{R}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

🙂 Wir nennen dies *gemeinsames Wissen*, engl. *common knowledge*. Beantworten Sie erneut die obigen Fragen: haben wir $\mathscr{R}_\infty$ hergestellt?

Beispiel: Schere-Stein-Papier mit Brunnen

Beide Spieler haben zusätzlich die Strategie „Brunnen“:

A \ B	Schere	Stein	Papier	Brunnen
Schere	0 ; 0	-1 ; $+1$	$+1$; -1	-1 ; $+1$
Stein	$+1$; -1	0 ; 0	-1 ; $+1$	-1 ; $+1$
Papier	-1 ; $+1$	$+1$; -1	0 ; 0	$+1$; -1
Brunnen	$+1$; -1	$+1$; -1	-1 ; $+1$	0 ; 0

Aufgabe: Ist dies ein Nullsummenspiel? Was ist sein Wert? Sehen Sie ein Nash–Gleichgewicht dieses Spiels? gar alle?

Beispiel: Schere-Stein-Papier mit Brunnen

Lösung: Die Strategie Brunnen dominiert schwach Stein. Wir streichen daher Stein und erhalten $u' : S' \times S' \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der reduzierten Strategiemenge $S' = \{\text{Schere}, \text{Papier}, \text{Brunnen}\}$. Dieses Spiel Schere-Papier-Brunnen ist isomorph zu Schere-Stein-Papier.

Wir kennen daher das Gleichgewicht $(s', s') \in \mathrm{NE}(\bar{u}')$ mit

$$s' = \frac{1}{3} \cdot \text{Schere} + \frac{1}{3} \cdot \text{Papier} + \frac{1}{3} \cdot \text{Brunnen}$$

Dank des vorigen Satzes wissen wir $\mathrm{NE}(\bar{u}') \subseteq \mathrm{NE}(\bar{u})$, also ist (s', s') auch ein Nash–Gleichgewicht für Schere-Stein-Papier-Brunnen.

⚠ Das Spiel u könnte durchaus noch weitere Gleichgewichte haben. Das muss man jeweils genauer nachrechnen. Versuchen Sie es! Hierbei hilft Ihnen die Austauschregel B2B für Nullsummenspiele.

☺ Dies ist ein symmetrisches Nullsummenspiel, der Wert ist also 0. Zur Berechnung des Wertes genügt uns ein einziges Gleichgewicht, hier (s', s'). Alternativ impliziert bereits die Symmetrie den Wert 0.

Beispiel zu schwach dominierten Strategien

Aufgabe: Konstruieren Sie ein Spiel, bei dem die Streichung einer schwach dominierten Strategie Nash–Gleichgewichte vernichtet.

Lösung: Wir beginnen mit einem Spiel u', etwa *Matching Pennies*:

A \ B	b_0	b_1	b_2
a_0	-1 ; $+1$	$+1$; -1	0 ; -2
a_1	$+1$; -1	-1 ; $+1$	$+2$; $+1$

Die Strategie b_1 dominiert schwach die neue Strategie b_2 von Spieler B. Die Auszahlungen für Spieler A sind beliebig, wir wählen sie geschickt.

Die Strategie (a_1, b_2) ist ein Nash–Gleichgewicht des Spiels u. Beim Streichen der dominierten Strategie b_2 wird es vernichtet. Das Spiel u' hat gar keine Gleichgewichte mehr, $\bar{u}'$ hingegen schon.

Beispiel zu strikt dominierten Strategien

Aufgabe: Finden Sie alle reinen Gleichgewichte, dann alle gemischten.

A \ B	b_0	b_1	b_2
a_0	4 ; 1	3 ; 3	1 ; 2
a_1	3 ; 2	2 ; 1	3 ; 0

Lösung: Die reinen Gleichgewichte finden wir durch Hinsehen: Hier ist nur (a_0, b_1) ein Nash–Gleichgewicht, es ist sogar strikt.

Die Strategie b_1 dominiert strikt b_2. Im Teilspiel u' dominiert a_0 strikt a_1. Im Teilspiel u'' dominiert b_1 strikt b_0. Schließlich bleibt nur das triviale Teilspiel u''' bestehend aus (a_0, b_1). Das ist das einzige Gleichgewicht!

⚠ Es ist eine recht seltene Ausnahme, dass sich Spiele so einfach lösen lassen durch iterierte Löschung (strikt) dominierter Strategien. Meist lassen sich nur wenige oder gar keine Strategien ausschließen. Wenn es jedoch möglich ist, bietet dies eine nützliche Vereinfachung.

Rationalisierbare Strategien

Rationalität: Eine strikt dominierte Strategien sollte nie gespielt werden. Ebensowenig eine Strategie, die nie beste Antwort ist. Wie ist hier der logische Zusammenhang? Es besteht eine bemerkenswerte Dualität!

Definition B2J (Rationalisierbarkeit)

Die Strategie $s_i \in S_i$ heißt **rationalisierbar** oder **mindestens einmal beste Antwort**, wenn sie beste Antwort ist auf mind. eine (korrelierte) Gegenstrategie $s_{-i} \in [S_{-i}]$, also $\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x \in \bar{S}_i} \bar{u}_i(x; s_{-i})$ erfüllt.

Jedes Nash–Gleichgewicht $s \in S$ besteht aus rationalisierbaren $s_i \in S_i$.

Satz B2K (Rationalisierbar ist das Gegenteil von strikt dominiert.)

Genau dann ist s_i^* strikt dominiert, wenn s_i^* nie beste Antwort ist.

Beweis: Die Implikation „⇒“ ist klar: Dominiert $s_i \in \bar{S}_i$ strikt $s_i^* \in S_i$, so gilt $\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) > \bar{u}_i(s_i^*; s_{-i})$ für alle Gegenstrategien $s_{-i} \in \overline{S_{-i}}$.
Die Implikation „⇐“ ist bemerkenswert: Zu jedem $s_{-i} \in \overline{S_{-i}}$ existiert ein geeignetes $s_i \in \bar{S}_i$, das die Ungleichung $\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) > \bar{u}_i(s_i^*; s_{-i})$ erfüllt.
Wir suchen stärker ein $s_i \in \bar{S}_i$ für alle $s_{-i} \in \overline{S_{-i}}$. „Einer für alle!“

Rationalisierbare Strategien

Wir konstruieren hierzu aus u ein Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel $v : S_1^* \times S_2^* \to \mathbb{R}^2$ mit Strategiemengen $S_1^* = S_i \smallsetminus \{s_i^*\}$ und $S_2^* = S_{-i}$ und der Auszahlungsfunktion $v_1(s_i, s_{-i}) = u_i(s_i; s_{-i}) - u_i(s_i^*; s_{-i})$.
Sei $\bar{v} : \bar{S}_1^* \times \bar{S}_2^* \to \mathbb{R}^2$ die Fortsetzung auf gemischte Strategien.
Im Spiel u ist s_i^* keine beste Antwort auf s_{-i}, wenn

$$\max_{s_i \in \bar{S}_1^*} \bar{v}_1(s_i, s_{-i}) > 0.$$

Im Spiel u ist s_i^* demnach nie beste Antwort, wenn

$$\min_{s_{-i} \in \bar{S}_2^*} \max_{s_i \in \bar{S}_1^*} \bar{v}_1(s_i, s_{-i}) > 0.$$

Nach dem Hauptsatz B2C gilt Minimax = Maximin, also

$$\max_{s_i \in \bar{S}_1^*} \min_{s_{-i} \in \bar{S}_2^*} \bar{v}_1(s_i, s_{-i}) > 0.$$

Es existiert demnach ein $s_i \in \bar{S}_1^*$ mit $\min_{s_{-i} \in \bar{S}_2^*} \bar{v}_1(s_i, s_{-i}) > 0$.
Das bedeutet $\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) > \bar{u}_i(s_i^*; s_{-i})$ für alle $s_{-i} \in \bar{S}_{-i}$. $\boxed{\text{QED}}$

Rationalisierbare Strategien

Für Spiele mit nur zwei Spielern ist die Konstruktion klar und natürlich. Bei mehr als zwei Spielern müssen wir genauer hinsehen und erklären, warum hier *alle* Gegenspieler zu *einem* zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned} \overline{S_{-i}} &= [S_{-i}] = [S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n] \\ \supsetneq \bar{S}_{-i} &= [S_1] \times \dots \times [S_{i-1}] \times [S_{i+1}] \times \dots \times [S_n] \end{aligned}$$

Wir gehen in Definition B2J und Satz B2K vom *worst case* aus, dass sich alle Gegenspieler zu einer Koalition gegen Spieler i verbünden können. Sind alle Gegenspieler unabhängig, so ersetzen wir die konvexe Menge $\overline{S_{-i}}$ durch die nicht-konvexe Teilmenge $\bar{S}_{-i} \subsetneq \overline{S_{-i}}$; die oben bewiesene Implikation gilt dann im Allgemeinen nicht mehr (siehe Übungen).

Rekursiv können wir nun die iterierte Löschung (strikt) dominierter Strategien erklären, und ebenso Rationalisierbarkeit der Stufe $1, 2, 3, \dots$.
Das ist wie oben gesehen oft nützlich zur Vereinfachung / Reduktion.

Rationalisierbare Strategien

Satz und Beweis erinnern uns an das Problem des Quantorentauschs:

$$\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} : x > y \qquad \not\Longleftrightarrow \qquad \forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N} : x > y$$

Allgemein seien x, y Elemente eines Universums Ω und $(x, y) \mapsto P(x, y)$ eine Aussageform, also $P(x, y) = 1$, wenn die Aussage für (x, y) wahr ist, und $P(x, y) = 0$, wenn falsch. In unserem Beispiel ist $\Omega = \mathbb{N}$ und $P(x, y) = (x > y)$. Die Quantoren $\forall$ und $\exists$ entsprechen $\min$ und $\max$:

$$\begin{aligned} \forall y : P(x,y) \quad &\text{entspricht} \quad x \mapsto \min_{y \in \Omega} P(x,y) \\ \exists x\ \forall y : P(x,y) \quad &\text{entspricht} \quad \max_{x \in \Omega} \min_{y \in \Omega} P(x,y) \\ \exists x : P(x,y) \quad &\text{entspricht} \quad y \mapsto \max_{x \in \Omega} P(x,y) \\ \forall y\ \exists x : P(x,y) \quad &\text{entspricht} \quad \min_{y \in \Omega} \max_{x \in \Omega} P(x,y) \end{aligned}$$

Je zwei Allquantoren vertauschen, ebenso je zwei Existenzquantoren.
Wir dürfen Allquantoren vorziehen (B2A), aber nicht Existenzquantoren:

$$\exists x\ \forall y : P(x,y) \qquad \overset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \qquad \forall y\ \exists x : P(x,y)$$

Symmetrien von Spielen

Aufgabe: Bestimmen Sie die Symmetriegruppen der folgenden Spiele!

A \ B	bleiben	gehen
bleiben	-2, -2	-2, -5
gehen	-5, -2	0, 0

A \ B	B	S
B	1, 2	0, 0
S	0, 0	2, 1

U \ G	0	1
0	-1, $+1$	$+1$, -1
1	$+1$, -1	-1, $+1$

C \ D	K	L
K	0, 0	1, 2
L	2, 1	0, 0

Welche dieser Spiele sind zueinander isomorph? Auf wie viele Weisen?

⚠ Wir permutieren hier kohärent Spieler, Strategien und Ergebnisse.
Die Idee ist leicht, erfordert aber unbedingt eine präzise Notation.

Symmetrien von Spielen

Wir notieren jede Symmetrie $(\tau, \sigma_1, \sigma_2)$ als Bijektion der Spielermenge $\tau : I \xrightarrow{\sim} I$ sowie der Strategiemengen $\sigma_1 : S_1 \xrightarrow{\sim} S_{\tau 1}$ und $\sigma_2 : S_2 \xrightarrow{\sim} S_{\tau 2}$.

🙂 Das erste Spiel *Bleiben-oder-Gehen* hat genau zwei Symmetrien:
Die Identität $g_0 = (\mathrm{id}, \mathrm{id}, \mathrm{id})$ und den Spielertausch $g_1 = ((\mathsf{A}\,\mathsf{B}), \mathrm{id}, \mathrm{id})$.
Diesen Basisfall schreiben wir auf den folgenden Folien zuerst aus.

🙂 Das zweite Spiel *Bach oder Strawinsky* hat genau zwei Symmetrien:
Die Identität $g_0 = (\mathrm{id}, \mathrm{id}, \mathrm{id})$ und den Tausch $g_1 = ((\mathsf{A}\,\mathsf{B}), (B\,S), (B\,S))$.
Wir tauschen nicht nur die Spieler, sondern zwingend auch Strategien.

🙂 Das dritte Spiel *Matching Pennies* hat genau vier Symmetrien:
Die Identität $g_0 = (\mathrm{id}, \mathrm{id}, \mathrm{id})$ und die Drehung $g_1 = (\mathrm{id}, (0\,1), (0\,1))$,
Spielerflip $g_2 = ((\mathsf{U}\,\mathsf{G}), \mathrm{id}, (0\,1))$ und Spielerflop $g_3 = ((\mathsf{U}\,\mathsf{G}), (0\,1), \mathrm{id})$.
Die Gruppe $G = \{g_0, g_1, g_2, g_3\}$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$, nicht $\mathbb{Z}/4$.

🙂 Das vierte Spiel hat ebenfalls genau zwei Symmetrien:
Die Identität $g_0 = (\mathrm{id}, \mathrm{id}, \mathrm{id})$ und den Tausch $g_1 = ((\mathsf{C}\,\mathsf{D}), \mathrm{id}, \mathrm{id})$.
Das zweite und vierte Spiel sind isomorph, sonst keine weiteren.
$\tau : \mathsf{C} \mapsto \mathsf{A}, \mathsf{D} \mapsto \mathsf{B}$ sowie $\sigma_1 : K \mapsto B, L \mapsto S$ und $\sigma_2 : K \mapsto S, L \mapsto B$.
$\tau' : \mathsf{C} \mapsto \mathsf{B}, \mathsf{D} \mapsto \mathsf{A}$ sowie $\sigma_1' : K \mapsto S, L \mapsto B$ und $\sigma_2' : K \mapsto B, L \mapsto S$.

Isomorphismen von Spielen

Aufgabe: In welchem Sinne sind die folgenden Spiele isomorph?

A \ B	0	1
0	-1, -1	-5, 0
1	0, -5	-4, -4

A \ B	0	1
0	4, 1	0, 3
1	5, -7	1, -5

A \ B	0	1
0	2, 2	0, 3
1	3, 0	1, 1

A \ B	0	1
0	0, 1	1, 2
1	3, 0	2, 3

Lösung: $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$: Spieler und Strategien bleiben fix, die Ergebnisse werden affin-linear transformiert durch $r_1 \mapsto r_1 + 5$ bzw. $r_2 \mapsto 2r_2 + 3$.
$\Gamma_1 \cong \Gamma_3$: nicht affin, nur monoton. $\Gamma_1 \cong \Gamma_4$: nur schwach monoton.

Isomorphismen von Spielen

Isomorphismen von Spielen sind mathematisch naheliegend. John Nash hat sie 1951 eingeführt und genutzt (auf Anregung von David Gale), später Harsanyi und Selten: *A general theory of equilibrium selection in games*, MIT 1988. In Kapitel 3 erklären sie affine Isomorphismen:

> *A reasonable solution concept should neither be influenced by positive linear payoff transformations nor by renamings of players, agents, and choices. The notion of an isomorphism combines both kinds of operations. We look at invariance with respect to isomorphisms as an indispensable requirement.*

Bei 2×2–Spielen hat jeder Spieler vier Auszahlungen. Bei Ausschluss von Gleichständen gibt es $4! = 24$ Anordnungen, dies führt zu $24^2 = 576$ Spielklassen. Permutation der Strategien reduziert dies auf $12^2 = 144$. Alle Spielklassen wurden geduldig aufgelistet von Goforth, Robinson: *The Topology of* 2×2 *Games. A new periodic table*, Routledge 2005.
Unter schwacher Monotonie bleiben sogar nur $2^4 = 16$ Klassen.
Selbst wenn wir Gleichstände erlauben, sind es nur $3^4 = 81$ Klassen.
Nash–Gleichgewichte bleiben unter all diesen Isomorphismen erhalten, ebenso jeder Begriff, der allein aus der Ordnung abgeleitet wird.

Symmetrien unter Spielern

Jede Permutation $\tau \in \operatorname{Sym}(I)$ operiert durch Umordnung $u \mapsto \tau \circ u \circ \tau^-$:

$$\begin{tikzcd}
S := S_1\times\cdots\times S_n \arrow[rrr,"u"] \arrow[ddd,"\sigma"',"\cong"] & & & R_1\times\cdots\times R_n =: R \arrow[ddd,"\rho"',"\cong"] \\
& (s_1,\dots,s_n) \arrow[r,mapsto] \arrow[d,mapsto,"s'_{\tau i}=s_i"',"s'_j=s_{\tau^- j}"] & (r_1,\dots,r_n) \arrow[d,mapsto,"r'_{\tau i}=r_i"',"r'_j=r_{\tau^- j}"] & \\
& (s'_1,\dots,s'_n) \arrow[r,mapsto] & (r'_1,\dots,r'_n) & \\
S' := S'_1\times\cdots\times S'_n \arrow[rrr,"u'=\rho\circ u\circ\sigma^-"] & & & R'_1\times\cdots\times R'_n =: R'
\end{tikzcd}$$

Definition B2L (Spieler–Symmetrie)

Ein Spiel u ist **spieler-symmetrisch** unter der Permutation $\tau : I \xrightarrow{\sim} I$, wenn $u = \tau^- \circ u \circ \tau$ gilt, also $S_i = S_{\tau i}$ und $R_i = R_{\tau i}$ für alle $i \in I$ sowie $u_i(s_1,\dots,s_n) = u_{\tau i}(s_{\tau^- 1},\dots,s_{\tau^- n})$ für alle $(s_1,\dots,s_n) \in S_1\times\cdots\times S_n$.

Die Spieler-Symmetrien von u bilden die Gruppe $\operatorname{Sym}(u) \le \operatorname{Sym}(I)$. Das Spiel u heißt **spieler-symmetrisch**, falls $\operatorname{Sym}(u) = \operatorname{Sym}(I)$ gilt.

Symmetrien unter Spielern

Sei $I = \{1,2,\dots,n\}$ die Spielermenge. Jede Permutation $\tau : I \xrightarrow{\sim} I$ definiert Permutationen $\sigma : S_1\times\cdots\times S_n \to S'_1\times\cdots\times S'_n$ mit $S'_{\tau i} = S_i$ und $\rho : R_1\times\cdots\times R_n \to R'_1\times\cdots\times R'_n$ mit $R'_{\tau i} = R_i$ wie üblich auf n–Tupeln.
Wir erhalten das Spiel $u' = \rho\circ u\circ\sigma^-$ durch **Umordnung der Spieler**.
So operiert die symmetrische Gruppe $\operatorname{Sym}(I)$ auf den Spielern über I.

Allgemein seien I, J Spielermengen und $\tau : I \xrightarrow{\sim} J$ eine Bijektion.
Für jedes $i \in I$ sei $\sigma_i : S_i \xrightarrow{\sim} S'_{\tau i}$ eine Bijektion der Strategiemengen.
Dies definiert $\sigma : \prod_{i\in I} S_i \to \prod_{j\in J} S'_j$ durch $(s_i)_{i\in I} \mapsto (\sigma_{\tau^- j} s_{\tau^- j})_{j\in J}$.
Im einfachsten Falle denken wir an $S_i = S'_{\tau i}$ und $\sigma_i = \mathrm{id}_{S_i}$ für alle $i \in I$.
Für jedes $i \in I$ sei $\rho_i : (R_i,\le) \xrightarrow{\sim} (R'_{\tau i},\le)$ eine monotone Bijektion.
Dies definiert $\rho : \prod_{i\in I} R_i \to \prod_{j\in J} R'_j$ durch $(r_i)_{i\in I} \mapsto (\rho_{\tau^- j} r_{\tau^- j})_{j\in J}$.
Im strikten Falle verlangen wir $R_i = R'_{\tau i}$ und $\rho_i = \mathrm{id}_{R_i}$ für alle $i \in I$.
Kurzum: Wir permutieren kohärent Spieler, Strategien und Ergebnisse.
Das Spiel $u : S \to R$ permutieren wir zum Spiel $u' = \rho\circ u\circ\sigma^- : S' \to R'$.

Die folgende Definition präzisiert diese simple Idee für vier Szenarien und erklärt strikte / affine / monotone / schwache Isomorphismen.

Isomorphismen von Spielen

Definition B2M (Isomorphismus von Spielen)

Vorgelegt seien zwei strategische Spiele in Normalform

$$u : \prod\nolimits_{i\in I} S_i \to \prod\nolimits_{i\in I} R_i \quad\text{und}\quad u' : \prod\nolimits_{j\in J} S'_j \to \prod\nolimits_{j\in J} R'_j$$

sowie hierzu Bijektionen $\tau : I \xrightarrow{\sim} J$ und $\sigma_i : S_i \xrightarrow{\sim} S'_{\tau i}$ für jedes $i \in I$.
Das definiert die **Produktbijektion** $\sigma : S \xrightarrow{\sim} S' : (s_i)_{i\in I} \mapsto (\sigma_{\tau^- j} s_{\tau^- j})_{j\in J}$.
Wir nennen (τ,σ) oder kurz $\sigma : u \to u'$ einen **Isomorphismus**, wenn gilt:

Strikt: Für alle $i \in I$ und $s \in S$ gilt $R_i = R_{\tau i}$ und $u'_{\tau i}(\sigma s) = u_i(s)$.

Monoton: Für alle Spieler $i \in I$ und alle Strategievektoren $s, s^* \in S$ gilt die Äquivalenz $\quad u_i(s) \le u_i(s^*) \iff u'_{\tau i}(\sigma s) \le u'_{\tau i}(\sigma s^*)$.

Schwach monoton: Wir verlangen Monotonie nur falls $s_{-i} = s^*_{-i}$.

Affin: Beide Spiele sind reell, also $R_i = R_j = \mathbb{R}$ für alle $i \in I$ und $j \in J$, und es gilt $u'_{\tau i}(\sigma s) = a_i u_i(s) + b_i$ mit Konstanten $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ und $a_i > 0$.

Schwach affin: Es gilt $u'_{\tau i}(\sigma s) = a_i u_i(s) + b_i(s_{-i})$ mit $b_i : S_{-i} \to \mathbb{R}$.

Isomorphismen von Spielen

Schwach fordern wir Monotonie / Affinität für jeden Spieler $i \in I$ und $s_i \in S_i$ jeweils separat bei festgehaltener Gegenstrategie $s_{-i} \in S_{-i}$.

Proposition B2N (Abstrakter Nonsense wirkt konkret.)

*Strategische Spiele und ihre Isomorphismen bilden eine **Kategorie**:*

$$\mathtt{Game} = \mathtt{Game}_{\mathrm{s}},\quad \mathtt{Game}_{\mathrm{m}},\quad \mathtt{Game}_{\mathrm{wm}},\quad \mathtt{Game}_{\mathrm{a}},\quad \mathtt{Game}_{\mathrm{wa}}.$$

*Diese ist jeweils ein **Gruppoid**, denn jeder Morphismus ist invertierbar, Isomorphie erklärt strikte, (schwach) monotone / affine **Äquivalenz**.*

*Jeder Isomorphismus $\sigma : u \xrightarrow{\sim} u'$ bewahrt **Gleichgewichte**: Wir erhalten Bijektionen $\mathrm{NE}(u) \xrightarrow{\sim} \mathrm{NE}(u')$ und $\mathrm{NE}^!(u) \xrightarrow{\sim} \mathrm{NE}^!(u')$ vermöge $s \mapsto \sigma(s)$.*

*Zum Spiel $u \in \mathtt{Game}_*$ bilden die Automorphismen die **Gruppe** $\mathrm{Aut}_*(u)$. Diese Gruppe **operiert** demnach auf den Mengen $\mathrm{NE}(u)$ und $\mathrm{NE}^!(u)$.*

Aufgabe: Prüfen Sie die behaupteten Eigenschaften sorgfältig nach! Bestimmen Sie diese Gruppen für möglichst viele unserer Beispiele! Symmetrien sind nützlich und geben Auskunft über Gleichgewichte!

Existenz symmetrischer Gleichgewichte

Aufgabe: (0) Seien u, u' endliche reelle Spiele. Jede Produktbijektion $\sigma : u \xrightarrow{\sim} u'$ setzt sich eindeutig affin fort zur Produktbijektion $\bar\sigma : \bar u \xrightarrow{\sim} \bar u'$.

(1) Die Fortsetzung $\sigma \mapsto \bar\sigma$ erhält i.A. nicht (schwache) Monotonie!

(2) Ist $\sigma : u \xrightarrow{\sim} u'$ strikt oder (schwach) affin, so auch $\bar\sigma : \bar u \xrightarrow{\sim} \bar u'$. Wir erhalten also $\mathrm{Aut}_*(u) \hookrightarrow \mathrm{Aut}_*(\bar u) : \sigma \mapsto \bar\sigma$ für $* \in \{\mathrm{s}, \mathrm{a}, \mathrm{wa}\}$.

(3) Sei $G \le \mathrm{Aut}_*(u)$. Ist $s \in \bar S$ ein Nash–Gleichgewicht, so auch $\bar\sigma(s)$ für alle $\sigma \in G$, aber i.A. nicht die Symmetrisierung $\bar s := \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\bar\sigma(s)$.

(4) Nash bewies 1951 folgende Verschärfung seines Existenzsatzes:

Satz B2O (Existenzsatz für symmetrische Gleichgewichte)

Sei $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ ein endliches reelles Spiel, wie oben erklärt, und $\bar u : \bar S_1 \times \dots \times \bar S_n \to \mathbb{R}^n$ seine Fortsetzung auf gemischte Strategien.

Sei $G \le \mathrm{Aut}_*(u)$ eine Symmetriegruppe mit $* \in \{\mathrm{s}, \mathrm{a}, \mathrm{wa}\}$ wie oben. Dann besitzt $\bar u$ mindestens ein G–invariantes Nash–Gleichgewicht:

Die Menge $\mathrm{NE}(\bar u)^G := \{\, s \in \mathrm{NE}(\bar u) \mid \forall \sigma \in G : \bar\sigma(s) = s \,\}$ ist nicht leer.

Folgern Sie dies aus der natürlichen Äquivarianz der Nash–Funktion.

Existenz symmetrischer Gleichgewichte

Hier ist Platz für Ihre Notizen, Beweise bzw. Gegenbeispiele.

Symmetrien von Spielen und Gleichgewichten

Für die Untersuchung von Spielen sind die Nash–Gleichgewichte fundamental und haben sich als wesentliches Werkzeug bewährt. Es ist daher interessant, die Menge $\mathrm{NE}(u) \subseteq S$ bzw. $\mathrm{NE}(\bar u) \subseteq \bar S$ aller Nash–Gleichgewichte möglichst explizit zu bestimmen.

In realistischen Fällen ist dies aufwändig. Selbst wenn es theoretisch möglich ist, so ist es doch praktisch außerhalb unserer Reichweite. Wir wollen die Menge $\mathrm{NE}(\bar u) \subseteq \bar S$ der Gleichgewichte dann wenigstens qualitativ beschreiben (analytisch, geometrisch, topologisch). Sind hier beliebig komplizierte Räume möglich oder gibt es Einschränkungen?

Der Existenzsatz für Nash–Gleichgewichte ist ein erster wichtiger Schritt. Er garantiert allgemein: Für jedes endliche reelle Spiel u gilt $\mathrm{NE}(\bar u) \ne \emptyset$. Der obige Satz verallgemeinert dies schmerzfrei zu $\mathrm{NE}(\bar u)^G \ne \emptyset$.

Solcherart Struktursätze sind durchaus auch praktisch relevant, da sie Rechnungen vereinfachen können oder überprüfen helfen.

Weitere Fixpunktsätze, etwa von Kakutani oder Glicksberg, liefern Existenzaussagen für Gleichgewichte in allgemeineren Spielen u. Ihre Übungen bieten Gelegenheit, diese Fragen zu vertiefen.

Homotopien von Spielen und Gleichgewichten

Zwei Spiele $u : \prod_{i\in I} S_i \to \prod_{i\in I} R_i$ und $u' : \prod_{i\in I} S_i \to \prod_{i\in I} R'_i$ heißen **ähnlich**, wenn $u_i(s) < u_i(s^*) \iff u'_i(s) < u'_i(s^*)$ für alle $s, s^* \in S$ gilt.
Für **schwach ähnliche** Spiele verlangen wir diese Äquivalenz für alle Strategievektoren $s, s^* \in S$, die sich in der Koordinate i unterscheiden.
Anders gesagt $\mathrm{id} : u \xrightarrow{\sim} u'$ ist ein (schwach) monotoner Isomorphismus. Ähnlichkeit von Spielen ist eine sehr stark vergröbernde Sichtweise; sie erhält jedoch alle Nash–Gleichgewichte, also $\mathrm{NE}(u) = \mathrm{NE}(u')$!
Sind endliche Spiele $u, u' : S = S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ (schwach) ähnlich, so gilt dies für ihre Fortsetzungen $\bar u$ und $\bar u'$ im Allgemeinen keineswegs! Wie verändert Ähnlichkeit die Mengen $\mathrm{NE}(\bar u)$ zu $\mathrm{NE}(\bar u')$? Genauer:

Definition B2P (Homotopie reeller Spiele)

Eine **Homotopie** $H : [0,1] \times S \to \mathbb{R}^n$ ordnet jedem Zeitpunkt $t \in [0,1]$ ein Spiel $u^t : S \to \mathbb{R}^n$ zu, sodass alle Auszahlungen $t \mapsto u^t_i(s)$ stetig mit t variieren, und alle Spiele u^t untereinander (schwach) ähnlich sind.

Projekt: Was lässt sich über die Entwicklung von $\mathrm{NE}(\bar u^t)$ sagen? Wie werden die Mengen $\mathrm{NE}(\bar u)$ in $\mathrm{NE}(\bar u')$ ineinander überführt?

Die Replikatorgleichung

Die Differentialgleichung $\dot x = \lambda x$ beschreibt exponentielles Wachstum: Zum Startwert $x(0)$ ist $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto x(0)\,e^{\lambda t}$ die eindeutige Lösung.

Für gemischte Strategien nutzen wir baryzentrische Koordinaten:

$$s_i \in \bar S_i \quad : \quad s_i = \sum\nolimits_k x_i^k s_i^k, \qquad x_i^k \ge 0, \qquad \sum\nolimits_k x_i^k = 1$$

Die obigen Beispiele motivieren folgende Differentialgleichung:

$$\boxed{\dot x_i^k = x_i^k \left[\bar u_i(s_i^k; s_{-i}) - \bar u_i(s_i; s_{-i})\right]}$$

Im Falle $[\dots] > 0$ ist die Ecke s_i^k attraktiv im Vergleich zum Mittel s_i, also wächst x_i^k. Im Falle $[\dots] < 0$ ist die Ecke repulsiv, also fällt x_i^k.

Aufgabe: (0) Wie glatt ist das Vektorfeld f auf der rechten Seite? Garantiert das Existenz, Eindeutigkeit und Glattheit von Lösungen?

(1) Als Startwert geben wir $x_i^k(t_0) \ge 0$ und $\sum_k x_i^k(t_0) = 1$ vor. Bleiben diese Normierungsbedingungen für alle $t \in \mathbb{R}$ erhalten?

(2) Wie verhalten sich Fixpunkte zu Nash–Gleichgewichten? Lässt sich damit die Existenz von Nash–Gleichgewichten zeigen?

Die Replikatorgleichung

Lösung: (0) Für Bimatrixspiele $\Delta^m \times \Delta^n \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (x^\intercal A\,y, x^\intercal B\,y)$:

$$\dot x_i = x_i\big[e_i^\intercal A\,y - x^\intercal A\,y\big], \qquad \dot y_j = y_j\big[x^\intercal B\,e_j - x^\intercal B\,y\big].$$

Allgemein sei $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ ein Spiel mit $S_i = \{s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^{\ell_i}\}$. Wir setzen u in jeder Koordinate linear fort zu $\bar u : \mathbb{R}^{S_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{S_n} \to \mathbb{R}^n$,

$$\bar u\big(\dots, \textstyle\sum_{k=0}^{\ell_i} x_i^k s_i^k, \dots\big) = \textstyle\sum_{k=0}^{\ell_i} x_i^k u(\dots, s_i^k, \dots).$$

Das Vektorfeld auf der rechten Seite unserer Gleichung $\dot x = f(x)$ ist

$$f : \mathbb{R}^{\ell_1+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{\ell_n+1} \to \mathbb{R}^{\ell_1+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{\ell_n+1},$$
$$f_i^k(x) = x_i^k \left[\bar u_i(s_i^k; s_{-i}) - \bar u_i(s_i; s_{-i})\right].$$

Jede Koordinate $f_i^k(x)$ ist polynomiell in den Variablen $x = (x_1, \dots, x_n)$, genauer vom Grad 2 in x_i^k und vom Grad 1 in allen anderen Variablen.

Zu jedem Startpunkt $x(t_0)$ garantiert der Satz von Picard–Lindelöf lokale Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung, mit (1) sogar global.

Da f glatt ist, gilt dies auch für jede Lösung $t \mapsto x(t)$ von $\dot x = f(x)$.

Der Satz von Cauchy–Kowalewskaja garantiert, dass jede Lösung $t \mapsto x(t)$ sogar analytisch ist, also lokal eine konvergente Potenzreihe.

Die Replikatorgleichung

(1) Sei $x : I \to \mathbb{R}^N$ eine Lösung auf einem Intervall I mit $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$. Wir zeigen: Gilt $x_i^k(t) \ge 0$ und $\sum_k x_i^k(t) = 1$ für $t = t_0$, so für alle $t \in I$.

Geometrisch: Auf $X = \Delta^{\ell_1} \times \dots \times \Delta^{\ell_n}$ zeigt das Vektorfeld f nirgends nach außen. Jede Lösung, die in X startet, verbleibt in X. Ausführlich:

(1a) Behauptung: Gilt $x_i^k(t) = 0$ für ein (i,k) und $t = t_0$, so für alle $t \in I$. Dank Existenzsatz gibt es eine Lösung $\tilde x : J \to \mathbb{R}^N$ mit $\tilde x(t_0) = x(t_0)$, wobei wir den Funktionswert $\tilde x_i^k(t) = 0$ für alle $t \in J$ fest vorgeben. Automatisch gilt dann $\partial_t \tilde x_i^k(t) = 0 = f_i^k(\tilde x(t))$ für alle $t \in J$. Dank Eindeutigkeitssatz folgt $x_i^k(t) = 0$ für alle $t \in I \cap J$.

(1b) Behauptung: Gilt $\sum_k x_i^k(t) = 1$ für ein i und $t = t_0$, so für alle $t \in I$. Dank Existenzsatz gibt es eine Lösung $\tilde x : J \to \mathbb{R}^N$ mit $\tilde x(t_0) = x(t_0)$, wobei wir $\tilde x_i^0(t) = 1 - \sum_{k=1}^{\ell_i} \tilde x_i^k(t)$ für alle $t \in J$ fest vorgeben. Automatisch gilt dann $\partial_t \tilde x_i^0(t) = f_i^0(\tilde x(t))$ für alle $t \in J$, denn

$$f_i^0(\tilde x(t)) - \partial_t \tilde x_i^0 = \textstyle\sum_{k=0}^{\ell_i} x_i^k \big[\bar u_i(s_i^k; s_{-i}) - \bar u_i(s_i; s_{-i})\big] = 0.$$

Dank Eindeutigkeitssatz folgt $\sum_k x_i^k(t) = 1$ für alle $t \in I \cap J$.

Die Replikatorgleichung

Die behauptete Gleichung gilt lokal um jeden Zeitpunkt $t_0 \in I$. Dank Zusammenhang gilt sie somit auf dem gesamten Intervall I.

Für jede Auswahl von (abgeschlossenen oder offenen) Teilsimplizes $\Delta_1 \subseteq \Delta^{\ell_1}, \dots, \Delta_n \subseteq \Delta^{\ell_n}$ ist die Menge $\Delta_1 \times \dots \times \Delta_n \subset \mathbb{R}^N$ invariant.

⚠ Wir müssen hier sorgfältig mit dem Eindeutigkeitssatz argumentieren. Ein klassisches Gegenbeispiel ist die Differentialgleichung $\dot x = f(x)$ mit rechter Seite $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$. Zum Startwert $x(0) = 0$ existieren neben der Lösung $t \mapsto 0$ noch unendlich viele weitere, etwa $t \mapsto t^3/27$. Die Mengen der Zerlegung $\mathbb{R} = \mathbb{R}_{<0} \sqcup \{0\} \sqcup \mathbb{R}_{>0}$ sind hier nicht invariant!

(2) Jedes Nash–Gleichgewicht ist eine Nullstelle des Vektorfeldes, aber nicht jede Nullstelle des Vektorfeldes ist ein Nash–Gleichgewicht: Diese Äquivalenz gilt nur im Inneren, mit $x_i^k > 0$ für alle i und k. Z.B. ist jede Ecke eine Nullstelle, aber nicht immer ein Gleichgewicht.

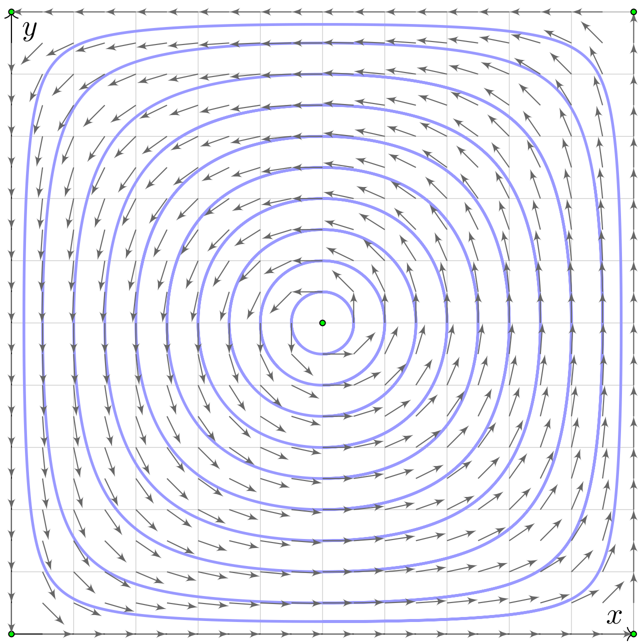
Daher lässt sich dies nicht wie die Nash–Funktion zum Beweis nutzen. Der Beweis von Satz B1E konstruiert geschickt die Nash–Funktion; dank Lemma B1H sind ihre Fixpunkte genau die Gleichgewichte.

Die Replikatorgleichung: Matching Pennies

B305
Erläuterung

Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Matching Pennies* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

B A	Kopf	Zahl
Kopf	$+1$ -1	-1 $+1$
Zahl	-1 $+1$	$+1$ -1

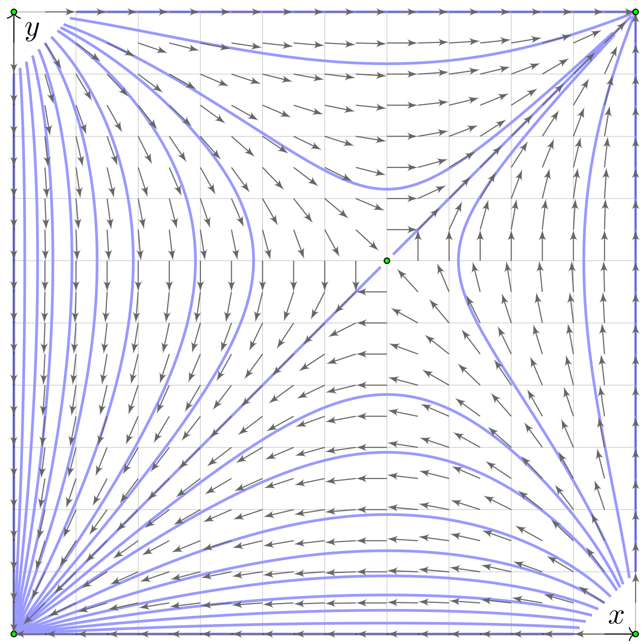


Die Replikatorgleichung: Bleiben-oder-Gehen

B306
Erläuterung

Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Bleiben-oder-Gehen* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

B A	Bleiben	Gehen
Bleiben	-2 -2	-5 -2
Gehen	-2 -5	0 0

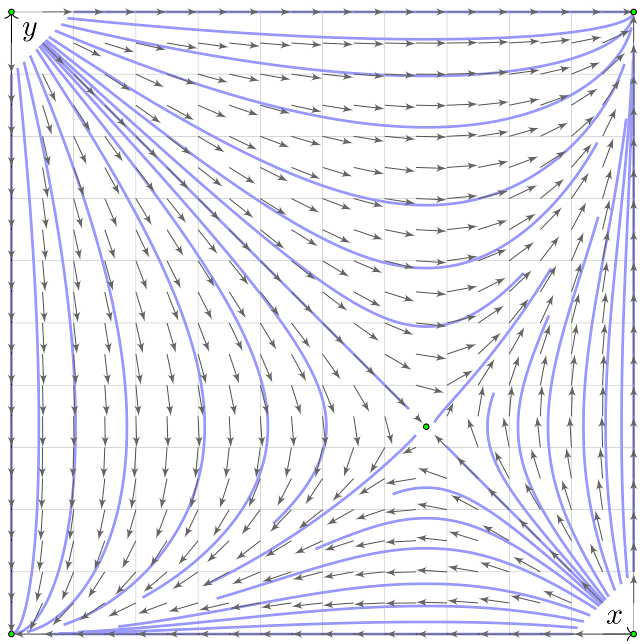


Die Replikatorgleichung: Bach oder Strawinsky

B307
Erläuterung

Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Bach oder Strawinsky* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

B A	Bach	Strawinsky
Bach	2 1	0 0
Strawinsky	0 0	1 2

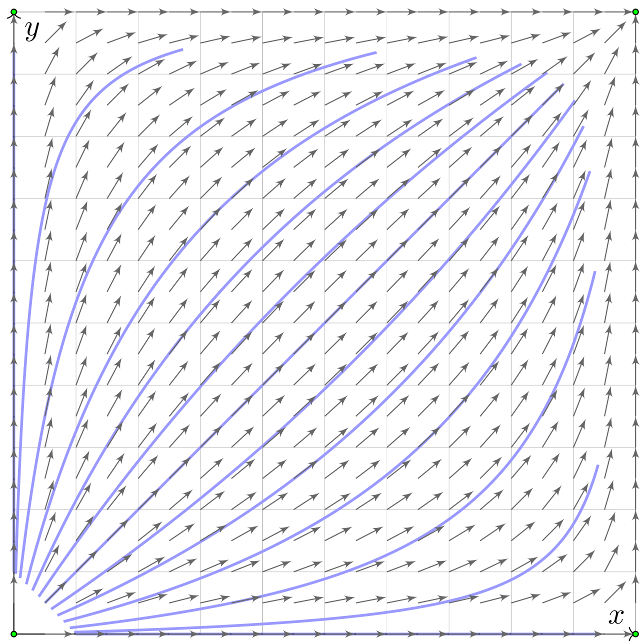


Die Replikatorgleichung: Gefangenendilemma

B308
Erläuterung

Zur Erinnerung die Daten des *Gefangenendilemmas* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

B A	Schweigen	Gestehen
Schweigen	-1 -1	0 -5
Gestehen	-5 0	-4 -4



Nash–Gleichgewichte (Klausur 2018)

Aufgabe: Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S \times S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auf der Strategiemenge $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ und seine affine Fortsetzung $\bar{g} : [S] \times [S] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auf dem Simplex $[S] = [s_1, s_2, \dots, s_n]$.

Alice \ Bob	s_1	s_2	$\dots$	s_n
s_1	1, 1	0, 0		0, 0
s_2	0, 0	1, 1		0, 0
$\dots$				0, 0
s_n	0, 0	0, 0	0, 0	1, 1

Formal haben wir also

$$g \;:\; S \times S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; g(s_k, s_\ell) = \begin{cases} (1,1) & \text{falls } k = \ell, \\ (0,0) & \text{falls } k \neq \ell. \end{cases}$$

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2018)

(1) Nennen Sie alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(g)$.
(2) Alice spielt $s_A = \frac{1}{2} s_1 + \frac{1}{2} s_2$. Nennen Sie Bobs beste Antworten.
(3) Bob spielt $s_B = \frac{2}{5} s_1 + \frac{2}{5} s_2 + \frac{1}{5} s_3$. Nennen Sie Alice' beste Antworten.
(4) Nennen Sie alle gemischten Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(\bar{g})$.

Lösung: (1) Wir sehen sofort $\mathrm{NE}(g) = \{\, (s_k, s_k) \mid k = 1, 2, \dots, n \,\}$, denn zu jedem s_k gibt es genau eine beste Antwort, nämlich s_k.

(2) Die besten Antworten auf s_A sind rein $\{s_1, s_2\}$ und gemischt $[s_1, s_2]$.

(3) Die besten Antworten auf s_B sind rein $\{s_1, s_2\}$ und gemischt $[s_1, s_2]$.

(4) Wir finden hier genau $2^n - 1$ Nash–Gleichgewichte:

$$\mathrm{NE}(\bar{g}) = \left\{ (s_A, s_B) \;\middle|\; s_A = s_B = \frac{1}{|X|} \sum_{k \in X} s_k,\ \emptyset \neq X \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \right\}.$$

Jedes dieser Strategiepaare (s_A, s_B) ist ein Gleichgewicht.
Umgekehrt ist jedes Gleichgewicht (s_A, s_B) von dieser Form.
Der Beweis ist nicht schwer, aber etwas länglich, deshalb genügte in der Klausur die Nennung der Lösung. Versuchen Sie den Beweis als Übung!

Diagonalspiele

☺ Generisch ist die Anzahl der Nash–Gleichgewichte endlich (für eine offene dichte Teilmenge solcher Spiele). Die Anzahl der Nash–Gleichgewichte kann exponentiell wachsen, wie wir hier sehen.

Aufgabe: Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S \times S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

Alice \ Bob	s_1	s_2	$\dots$	s_n
s_1	a_1, b_1	0, 0		0, 0
s_2	0, 0	a_2, b_2		0, 0
$\dots$				0, 0
s_n	0, 0	0, 0	0, 0	a_n, b_n

Die Konstanten $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{R}_{>0}$ seien strikt positiv.
Bestimmen Sie alle Nash–Gleichgewichte, rein und gemischt!

Verständnisfragen (Klausur 2018)

Aufgabe: Hat jedes endliche Spiel $g : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
(1) mindestens ein *reines* Nash–Gleichgewicht?
(2) mindestens ein *gemischtes* Nash–Gleichgewicht?
(3) Hat jedes unendliche Spiel $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mindestens ein *gemischtes* Nash–Gleichgewicht?

Lösung: (1) Nein! Ein minimales Gegenbeispiel ist *Matching Pennies*, etwas größer aber bekannter ist natürlich *Schere-Stein-Papier*. Diese Spiele erlauben keine reinen Nash–Gleichgewichte.

(2) Ja! Genau das garantiert der Existenzsatz von Nash!

(3) Nein! Ein mögliches Gegenbeispiel ist *Die höchste Zahl gewinnt*, wobei $g(s_1, s_2) = (+1, -1)$ falls $s_1 > s_2$ und $g(s_1, s_2) = (-1, +1)$ falls $s_1 < s_2$ sowie $g(s_1, s_2) = (0, 0)$ falls $s_1 = s_2$. Offensichtlich gibt es kein reines Nash–Gleichgewicht, denn jede Strategie kann vom Gegner übertrumpft werden. Ebensowenig gibt es gemischte Gleichgewichte. Das gilt selbst dann, wenn wir unendliche Konvexkombinationen / WMaße zulassen, also $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} s(n) = 1$.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2018)

Aufgabe: Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S_A \times S_B \to \mathbb{R}^2$ und seine Fortsetzung $\bar{g} : [S_A] \times [S_B] \to \mathbb{R}^2$ auf gemischte Strategien.

Alice \ Bob	a	b	c
s_0	7, 5	7, 10	3, 8
s_1	1, 10	4, 0	9, 8

(1) Nennen Sie alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(g)$.

(2) Angenommen Alice spielt die gemischte Strategie $s_t = (1-t)s_0 + ts_1$ für ein $t \in [0,1]$. Zeichnen Sie die Auszahlung $f_a(t) := \bar{g}_B(s_t, a)$ zu Bobs Strategie a, ebenso f_b und f_c.

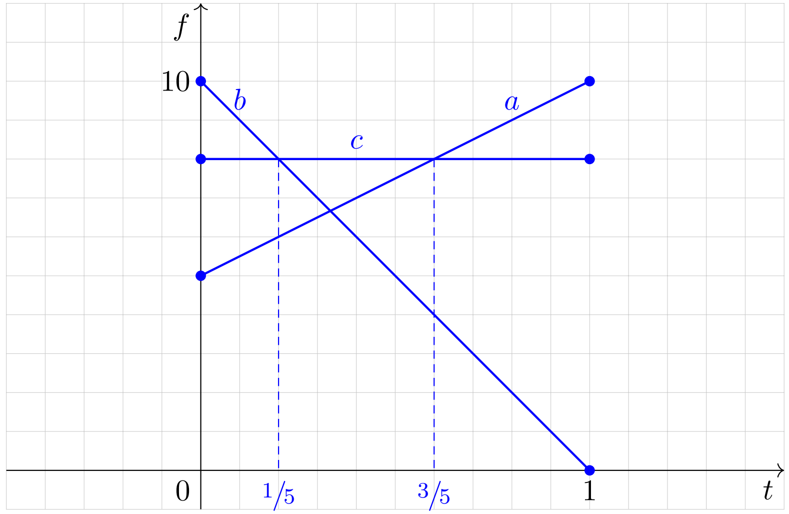
(3) Nennen Sie zu jeder Strategie s_t Bobs beste Antworten.

(4) Bestimmen Sie damit alle Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(\bar{g})$.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2018)

Lösung: (1) Das einzige reine Gleichgewicht ist $(s_A, s_B) = (s_0, b)$.

(2) Die Auszahlungen $f_a, f_b, f_c : [0,1] \to \mathbb{R}$ für Bob:



Nash–Gleichgewichte (Klausur 2018)

(3) Graphisch lesen wir zu s_t jeweils Bobs beste Antworten ab:

Intervall	$0 \le t <$	$1/5$	$< t <$	$3/5$	$< t \le 1$
Antwort	$\{b\}$	$[b, c]$	$\{c\}$	$[a, c]$	$\{a\}$

(4) Neben dem reinen Gleichgewicht (s_0, b) finden wir die gemischten

$$\left(\, s_{\frac{1}{5}},\ \tfrac{2}{3}b + \tfrac{1}{3}c \,\right) \quad \text{und} \quad \left(\, s_{\frac{3}{5}},\ \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}c \,\right).$$

☺ Dies sind *gegenseitig* beste Antworten, wie die Definition es verlangt. Hierzu ist jeweils eine kleine Rechnung notwendig: Übung!

☺ Ebenso können Sie alle $2 \times m$–Spiele lösen. Die folgende Aufgabe führt dies aus.

Nash–Gleichgewichte von $2 \times m$–Spielen

Aufgabe: (1) Entwickeln Sie einen Algorithmus, der zu jedem Spiel $g : \{0,1\} \times \{0,1,\dots,n\} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ alle Nash–Gleichgewichte bestimmt.

(2) Nennen Sie eine offene dichte Teilmenge $O \subset (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^{2\times(n+1)}$, sodass jedes Spiel $g \in O$ nur endlich viele Nash–Gleichgewichte hat.

(3a) Generisch ist die Anzahl der Nash–Gleichgewichte ungerade.

(3b) Jedes ist lokal eine rationale Funktion der Koeffizienten.

(3c) Wie viele Nash–Gleichgewichte gibt es höchstens?

Kapitel C

Erste Anwendungen und Verfeinerungen

Dem Anwenden muss das Erkennen vorausgehen.
Max Planck (1858–1947)

Inhalt dieses Kapitels

Motivation und Überblick

Im vorigen Kapitel haben wir zunächst strategische Spiele in Normalform präzisiert und dazu den Begriff des Nash–Gleichgewichts eingeführt. In diesem Kapitel diskutieren wir hierzu erste einfache Anwendungen. Die folgenden Kapitel behandeln Verfeinerungen und Erweiterungen.

Hierzu untersuchen wir diverse Situationen von Konflikt und Kooperation, etwa ökonomische Konkurrenz, mit unseren spieltheoretischen Mitteln. Unsere ersten Modelle sind meist beschämend simpel, doch sie zeigen bereits interessante Phänomene und illustrieren immerhin das Prinzip.

Reale Anwendungen, in denen etwas wichtiges auf dem Spiel steht, würde man noch wesentlich genauer und aufwändiger untersuchen. Die erste Aufgabe ist dabei immer die Formulierung eines Modells. Die Begriffe und Methoden hierzu führe ich hier exemplarisch vor.

Motivation und Überblick

Die Untersuchung konkreter Beispiele nutzt praktisch und theoretisch: Im günstigsten Falle verstehen wir dadurch die betrachtete Anwendung. Meist erkennen wir dabei vor allem Möglichkeiten und Einschränkungen unseres mathematischen Modells und unserer Methoden.

Daraus ergeben sich Verallgemeinerungen und Verfeinerungen, die wiederum für die Weiterentwicklung der Theorie zuträglich sind. Wie immer gehört die ehrliche Ausführung praktischer Anwendungen untrennbar zusammen mit der sorgfältigen Entwicklung der Theorie.

Dies sind Instanzen des zuvor erklärten Modellierungskreislaufs.

Beispiel: Bistromathics

Bistromathics itself is simply a revolutionary new way of understanding the behaviour of numbers. Just as Einstein observed that time was not an absolute, but depended on the observer's movement in space, and that space was not an absolute, but depended on the observer's movement in time, it is now realised that numbers are not absolute, but depend on the observer's movement in restaurants. [...] Numbers written on restaurant checks within the confines of restaurants do not follow the same mathematical laws as numbers written on any other pieces of paper in any other parts of the Universe.

(Douglas Adams, 1952–2001, *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy*)

Aufgabe: (0) Eine Gruppe von 20 Personen besucht ein Restaurant. Jeder wählt ein gutes Menu für 30€ oder ein exzellentes für 50€. Jeder zahlt seine eigene Rechnung und denkt: „10€ mehr wäre es mir wert, aber nicht 20€." Daher entscheidet er sich für das Menu zu 30€.

(1) Die Gruppe beschließt vor dem Restaurantbesuch, eine gemeinsame Rechnung zu verlangen und alles durch 20 zu teilen. Was passiert?

Formulieren Sie beide Situationen explizit als Spiele $u, u' : S \to \mathbb{R}^{20}$. Finden Sie alle Gleichgewichte, Dominanzen und Symmetrien.

Beispiel: Bistromathics

Das Ergebnis ist anschaulich klar. Wir üben zudem den Formalismus und all unsere Begriffe an diesem schönen übersichtlichen Beispiel.

Lösung: (0) Wir nutzen die Spielermenge $I = \{1, 2, \dots, 20\}$, für jeden Spieler $i \in I$ die Strategiemenge $S_i = \{0, 1\}$ und die Nutzenfunktion

$$u_i \;:\; S \to \mathbb{R} \;:\; s \mapsto (10 - 20)s_i = -10s_i.$$

Für jeden Spieler wird die Strategie 1 strikt dominiert durch 0. Somit ist $s = (0, 0, \dots, 0)$ das einzige Nash–Gleichgewicht (und zudem strikt).

(1) Im zweiten Fall kommt es zur Kopplung durch die Nutzenfunktion

$$u'_i \;:\; S \to \mathbb{R} \;:\; s \mapsto 10s_i - \frac{1}{20}\sum_{j=1}^{20} 20s_j = 10s_i - \sum_{j=1}^{20} s_j.$$

Für jeden Spieler wird die Strategie 0 strikt dominiert durch 1. Somit ist $s = (1, 1, \dots, 1)$ das einzige Nash–Gleichgewicht (und zudem strikt).

🙂 Beide Spiele sind symmetrisch, also $\mathrm{Sym}(u) = \mathrm{Sym}(u') = \mathrm{Sym}(I)$. Das zweite ähnelt dem Gefangenendilemma, hier jedoch für n Spieler.

Soziales Dilemma

Dies verallgemeinert das simple Beispiel des **Gefangenendilemmas**. Ein **soziales Dilemma** liegt vor, wenn individuell rationales Verhalten ein suboptimales / ineffizientes Gesamtergebnis erzeugt, also die Akteure insgesamt schlechter dastehen als durch Absprache möglich wäre, etwa durch sozial kontrollierte Übereinkunft oder einen einklagbaren Vertrag.

Häufig ist ein **Vertrag** zu aufwändig oder schlicht gänzlich unmöglich. Zudem müssen Verstöße kontrolliert und sanktioniert werden können. Auch das liegt oft außerhalb der Reichweite der einzelnen Akteure; hierzu wird eine übergeordnete (z.B. staatliche) Struktur benötigt.

Solidarität versus Unvernunft. Gegenseitige Hilfe ist nicht nur eine urmenschliche Regung, sondern kann durchaus individuell rational sein, zum eigenen Vorteil, etwa bei Versicherungen oder Katastrophenhilfe. Meist geht dies über die spontane Hilfe im Einzelfall hinaus, dazu soll sie als verlässliche Zusicherung formuliert werden.

Bei **Fehlkonstruktion** gibt Solidarität jedoch falsche Anreize, im Extremfall fördert sie (global gesehen) unvernünftiges Verhalten: Tendenz zu unnötigen Risiken oder achtloser Verschwendung.

Soziales Dilemma

Der schottische Ökonom **Adam Smith** (1723–1790) prägte in seinem Hauptwerk *Der Wohlstand der Nationen* (1776) die vielzitierte Idee der „unsichtbaren Hand des Marktes": Sie sorge dafür, so seine Hoffnung, dass individueller Egoismus in kollektiver Wohlfahrt mündet.

Bei einem **sozialen Dilemma** jedoch wirkt Egoismus genau umgekehrt: Individuell rationales Verhalten führt für alle zu einer Verschlechterung. Das widerlegt allzu naive Hoffnungen oder kühne Verallgemeinerungen: Die „unsichtbare Hand" mag manchmal wirken, aber keineswegs immer.

Soziologen sprechen von **sozialen Fallen** oder **paradoxen Effekten**: Individuell rationales Verhalten kann zu irrationalen Ergebnissen führen. Diese Grundproblematik durchzieht die gesamte Gesellschaftspolitik. Naive Analysen verfallen häufig dem Irrtum, unvernünftige Ergebnisse auf unvernünftiges Handeln zurückzuführen. Das Gegenteil ist der Fall.

Das Ziel des **Mechanismen-Design** (engl. *mechanism design*) ist die Schaffung eines Rahmens, der das gewünschte Verhalten ermöglicht. Die invididuelle Entscheidungsfreiheit kann / soll / darf dabei nicht direkt eingeschränkt werden, allein der gemeinsame Rahmen wird gestaltet.

Aufgabe: Nennen, formalisieren und analysieren Sie weitere Beispiele, die ähnlich strukturiert sind und zu sozialen Dilemmata führen können:
(1) zunächst auf lokaler Ebene, etwa in einer Wohngemeinschaft,
(2) auf nationaler bzw. europäischer Ebene, (3) schließlich global.
Welche Mechanismen wären jeweils denkbar, hilfreich, praktikabel?
Das führt schnell zu aktuellen und brisanten politischen Fragen!

Lösung: Hier eine Auswahl möglicher Beispiele, die Liste ist endlos.

(1) Sollte eine WG einen gemeinsamen Getränkekühlschrank haben?
Ist die WG-Regel „Jeder spült den Abwasch nach Bedarf“ sinnvoll?
Wie bezahlt die WG Strom, Wasser, etc. bei gemeinsamen Zähler?
Sollte der öffentliche Personennahverkehr (ÖPNV) gratis sein?

(2) Sollte das Studium (vollkommen oder weitgehend) gratis sein?
Sollten wir unsere Finanzämter mit mehr Personal ausstatten?
Wem nützt eine private Kranken- oder eine Bürgerversicherung?
Schafft die Währungsunion Anreize zu achtloser Haushaltsführung?
Gilt dies ebenso für den innerdeutschen Länderfinanzausgleich?

(3) Wie können wir den menschengemachten Klimawandel bremsen?
Wie kann bzw. sollte Emissionsrechtehandel institutionalisiert werden?
Wie können wir die Überfischung der Weltmeere verhindern?
Wie können wir die Rodung der Urwälder verhindern?

Damit formulieren wir zentrale Probleme. Eine mathematische Analyse ist möglich, eine praktikable Lösung hingegen schwer, etwa durch die Entwicklung geeigneter Mechanismen.

Nach obigem Muster funktionieren viele soziale **Konfliktsituationen** wie Schwarzfahren, Versicherungs-/Sozialbetrug, Steuerhinterziehung.

Der individuelle Nutzen ist klein, der allgemeine Schaden ist groß, doch durch die große Zahl der Betroffenen wird der Schaden verteilt und dem einzelnen nur zu einem kleinen Bruchteil in Rechnung gestellt.

Das zynische Motto: *Gewinne privatisieren, Verluste sozialisieren.* Das ist insbesondere bei Bankenkrisen und -rettungen hochaktuell. Auch die wiederkehrenden Eurokrisen folgen einer ähnlichen Struktur.

Die *Politik der hohen Schornsteine* verteilt Abgase möglichst weiträumig, die Emissionen insgesamt werden jedoch nicht reduziert, im Gegenteil! Jeder Akteur zielt nicht auf das Gesamtergebnis, sondern seinen Vorteil; er kann auch gar nicht anders, denn häufig wird Altruismus bestraft.

Dagegen scheint kein Kraut gewachsen, oft versagen die Mechanismen der sozialen Kontrolle, Religion, Moral, Ethik. Genau hierzu formulierte Immanuel Kant in seiner Ethik den **kategorischen Imperativ**:
„Handle nur nach derjenigen Maxime, durch die du zugleich wollen kannst, dass sie ein allgemeines Gesetz werde.“

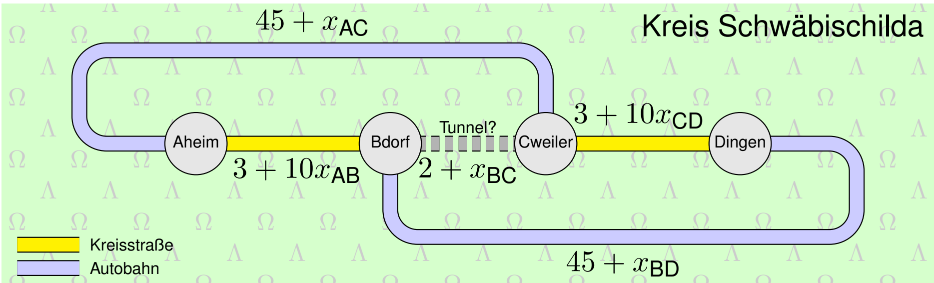
Das Problem heißt auch *Tragik der Allmende*, *tragedy of the commons*.

Eine **Allmende** ist gemeinschaftlich genutztes Eigentum, zum Beispiel landwirtschaftliche Nutzfläche oder Weidefläche. Allmenden sind heute noch beispielsweise im Schwarzwald und im Alpenraum verbreitet.

Commoners sind Bauern oder Hirten, die gemeinsam Kroneigentum als Allmende bewirtschaften. Der Begriff *tragedy of the commons* wurde 1833 geprägt vom Ökonomen William Forster Lloyd (1794–1852) und 1968 vom Ökologen Garrett Hardin (1915–2003) in *Science* ausgeführt. Aktuelle Beispiele für die **Ausbeutung natürlicher Ressourcen** sind: Überfischung der Weltmeere, Raubbau an Regenwäldern, Plünderung von Wildtierbeständen, Verschmutzung der Atmosphäre, anthropogene Klimaveränderung. Gemeines Muster: Individueller kurzfristiger Vorteil (Gier) schlägt gemeinsamen langfristigen Nutzen (Nachhaltigkeit).

Die **Spieltheorie** kann solche Mechanismen zunächst nur *erklären*, immerhin. Voraussetzung ist eine ehrliche, kritische, detaillierte Analyse. Die Menschheit wird beweisen müssen, ob sie diesen unvermeidlichen Konflikten gewachsen ist und rechtzeitig wirksame *Lösungen* findet.

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess



Täglich pendeln 6000 Autofahrer von Aheim nach Dingen, entweder über Bdorf (ABD) oder über Cweiler (ACD). Angegeben sind die Fahrzeiten in Minuten, wobei $x_{ij} \in [0, 6]$ jeweils die Autozahl in Tausend ist.

Aufgabe: (0) Erklären Sie dies als strategisches Spiel mit 6000 Spielern.
(1) Finden Sie alle Gleichgewichte: Welcher Verkehrsfluss stellt sich ein?

(2) Zur Verkürzung der Fahrzeit plant der Landkreis einen Autobahntunnel von Bdorf nach Cweiler. Hilft das oder nicht? Rechnen Sie es aus!

(3) Konstruieren Sie ein Verkehrsleitsystem. . . und weitere Beispiele!

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess

Oft hört man pauschal: „Mehr Straßen garantieren schneller ankommen.“ Das kann helfen, aber keineswegs immer: „Zusätzliche Straßen können Staus verstärken.“ Auch das hört man so pauschal. Schauen wir hin!

Unser Beispiel ist zugegeben konstruiert, dafür ist es besonders einfach. Es soll zunächst illustrieren, dass das Phänomen wirklich möglich ist. Echte Problemfälle muss man wesentlich genauer untersuchen.

Die Zahlen sind so angelegt, dass wir die Lösungen leicht überblicken: In beiden Fällen teilen sich die Verkehrsströme jeweils in gleiche Teile; bei zufällig gewählten Zahlen wird dies im Allgemeinen nicht so sein.

Unglaublich: Der Tunnel erhöht die Fahrzeit von 81 auf 90 Minuten! Ohne Absprache gibt es kein Zurück: Nur wenn sich genügend Fahrer für die beiden alten Strecken ABD und ACD entschließen, verringert sich der Stau auf den Landstraßen, und alle sind insgesamt schneller.

Könnten die Pendler nicht ihren alten Strecken folgen und den Tunnel ignorieren? Sicher, doch jeden lockt die Abkürzung mit 68 Minuten. Das Verrückte ist: Jeder einzelne handelt rational! So stellt sich ein neues Gleichgewicht ein, das paradoxerweise für alle schlechter ist.

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess

Lösung: (0) Wir wählen $I = \{1, 2, \dots, 6000\}$. Die Strategiemenge für Fahrer $i \in I$ ist $S_i = \{\text{ABD}, \text{ACD}\}$ bzw. mit Tunnel $S_i' = S_i \sqcup \{\text{ABCD}\}$. Die Verkehrszählung (in Tsd) ergibt $x_{\text{AC}}, x_{\text{BD}}, x_{\text{BC}}, x_{\text{AB}}, x_{\text{CD}} : S \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}
x_{\text{AC}}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i = \text{ACD} \,\} &&= x_1 \\
x_{\text{BD}}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i = \text{ABD} \,\} &&= x_2 \\
x_{\text{BC}}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i = \text{ABCD} \,\} &&= x_3 \\
x_{\text{AB}}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i \in \{\text{ABD}, \text{ABCD}\} \,\} &&= x_2 + x_3 \\
x_{\text{CD}}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i \in \{\text{ACD}, \text{ABCD}\} \,\} &&= x_1 + x_3
\end{aligned}$$

Hieraus berechnen wie die Fahrzeiten, und diese sind zu minimieren:

$$-u_i : S \to \mathbb{R} : s \mapsto \begin{cases} 48 + x_{\text{AC}}(s) + 10x_{\text{CD}}(s) & \text{für } s_i = \text{ACD}, \\ 48 + 10x_{\text{AB}}(s) + x_{\text{BD}}(s) & \text{für } s_i = \text{ABD}, \\ 8 + 10x_{\text{AB}}(s) + x_{\text{BC}}(s) + 10x_{\text{CD}}(s) & \text{für } s_i = \text{ABCD}. \end{cases}$$

☹ Die Strategiemenge $S = S_1 \times \dots \times S_{6000}$ ist astronomisch groß!
☺ Das Spiel u ist spieler-symmetrisch: $\mathrm{Sym}(u) = \mathrm{Sym}(I)$. Statt des Strategievektors $s \in S$ genügen uns die Häufigkeiten der Strategien!

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess

(1) Angenommen, x_1 Tsd wählen ACD, x_2 Tsd wählen ABD.

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 = 6, \quad x_1 &\ge 0, \quad x_2 \ge 0 \\
z_1(x_1, x_2) &= \big[45 + x_1\big] + \big[3 + 10x_1\big] \\
z_2(x_1, x_2) &= \big[3 + 10x_2\big] + \big[45 + x_2\big]
\end{aligned}$$

Gleichgewicht herrscht für $z_1 = z_2$, also $x_1 = x_2 = 3$ (LGS, Symmetrie). In der Ausgangssituation ist die Fahrzeit somit $z_1 = z_2 = 81$ Minuten.

(2) Angenommen, x_3 Tsd fahren ABCD durch den neu eröffneten Tunnel.

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 = 6, &\quad x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0 \\
z_1(x_1, x_2, x_3) &= \big[45 + x_1\big] + \big[3 + 10(x_1 + x_3)\big] \\
z_2(x_1, x_2, x_3) &= \big[3 + 10(x_2 + x_3)\big] + \big[45 + x_2\big] \\
z_3(x_1, x_2, x_3) &= \big[3 + 10(x_2 + x_3)\big] + \big[2 + x_3\big] + \big[3 + 10(x_1 + x_3)\big]
\end{aligned}$$

Gleichgewicht herrscht für $z_1 = z_2 = z_3$, also $x_1 = x_2 = x_3 = 2$ (LGS). Mit Tunnel erhöht sich die Fahrzeit auf $z_1 = z_2 = z_3 = 90$ Minuten!

☺ Spieler-Symmetrie hilft! Die Nash–Gleichgewichte sind strikt!

(3) Konstruieren Sie Ihre eigenen Beispiele: Es ist lehrreich!

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess

Das erstaunliche Ergebnis wird als **Braess–Paradox** bezeichnet: Eine zusätzliche Handlungsoption kann die Situation für alle verschlechtern. Es wurde 1968 von dem Mathematiker Dietrich Braess veröffentlicht. *Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung*, Unternehmensforschung Operations Research 12 (1968), 258–268, auch online verfügbar unter `homepage.ruhr-uni-bochum.de/Dietrich.Braess/paradox.pdf`.

Die Rechnung illustriert wunderbar die Idee des Nash–Gleichgewichts! Die Definition ist einfach, aber die Interpretation bedarf einiger Übung und zahlreicher Beispiele, darunter auch solch verblüffende Paradoxien. Die genaue Analyse löst dieses Scheinparadox allerdings schnell auf. Bei genauerem Hinsehen ähnelt auch dies dem Gefangenendilemma.

Ist es nur eine psychologische Falle? Eine Charakterschwäche im Sinne von Gier schlägt Geist? Nicht nur, jeder einzelne handelt, wie gesagt, vollkommen rational. Dabei optimieren alle Teilnehmer rein individuell. Die vertrackte Situation provoziert dieses Verhalten, es ist das Resultat individueller Optimierung ohne bindende Absprache oder Koordinierung.

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess

Es gibt **physikalische Entsprechungen** mit Federn in der Mechanik oder elektrischen Strömen in einer Schaltung, siehe Cohen, Horowitz: *Paradoxical behaviour of mechanical and electrical networks*, Nature 352 (1991), 699–701, `www.nature.com/articles/352699a0`

Das Phänomen ist also kein psychologischer Taschenspielertrick. Kommt das Paradox auch in realen Verkehrssituationen vor? Ja!

Die Süddeutsche Zeitung schreibt in ihrer Ausgabe vom 19. Mai 2010: „So waren die Verkehrsplaner in Stuttgart 1969 überrascht, als nach großen Investitionen ins Straßennetz rund um den Schlossplatz der Verkehrsfluss ins Stocken kam. Die Situation besserte sich erst, nachdem ein Teil der Königsstraße zur Fußgängerzone erklärt wurde.“

Weitere solche Beispiele werden aus New York und Seoul berichtet; das Problem sei unter Experten inzwischen hinlänglich bekannt, so heißt es. Straßenplaner nutzen geeignete Messdaten und Simulationssoftware zur Optimierung, insbesondere zur frühzeitigen Erkennung und Vermeidung paradoxer Verkehrsflüsse. Mathematik wirkt!

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess

Aufgabe: Entwickeln Sie ein Verkehrsleitsystem, das jedem Fahrer am Ortsausgang von Aheim und Bdorf zufällig eine Route zuweist, sodass die erwartete Fahrzeit für alle gleich ist. Welches Minimum können Sie so erreichen? Hierzu braucht es eine unabhängige Instanz! Muss dieses System Strafen androhen? Erreicht es ein korreliertes Gleichgewicht?

Mehr Straßen erhöhen automatisch den Verkehrsfluss? Nicht immer! Die Planung vor dem Straßenbau ist wichtig, wie oben gesehen, und manchmal erfordert optimaler Betrieb eine aktive zentrale Steuerung

Ähnlich drastisches Beispiel: In manchen Städten ignorieren Fahrer die Ampeln, um sich „eben noch schnell“ über die Kreuzung zu schummeln. In der Rushhour führt dies zum katastrophalen Gegenteil.

Das kann übrigens auch für Geschwindigkeitsbeschränkungen gelten: Individuelle Disziplin kann allseitigen Nutzen erzeugen. So weit, so klar. Das ist allerdings unpopulär und schwer zu vermitteln. Preis der Freiheit.

Freie Fahrt für freie Bürger! forderte der ADAC 1974 zu Zeiten der Ölpreiskrise, und später die Leipziger Montagsdemonstration 1989.

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess

Die **Verkehrsströmungslehre** (engl. *traffic flow theory and control*) ist ein ausgedehntes Gebiet und alltäglich nahezu überall relevant.

Je nach Trägersystem (Straße, Bahn, Flugzeug, etc) nutzt sie spezielle mathematische Modelle und Methoden: Optimierung (kombinatorisch, numerisch, Simulation) und Stochastik (Warteschlangentheorie) und schließlich Spieltheorie (individuell vs zentral gesteuert).

Den Straßenverkehr kann man dabei kontinuierlich modellieren analog zur Fluiddynamik mit Differentialgleichungen, oder auch mit zellulären Automaten wie im Nagel–Schreckenberg–(NaSch–)Modell, siehe `de.wikipedia.org/wiki/Nagel-Schreckenberg-Modell`.

Seit den 1990er Jahren entwickeln sich spieltheoretische Ansätze zu Psychologie und Rationalität, ökonomischen Anreizen, usw. Die Computersimulation wird ergänzt durch Experimente mit menschlichen Teilnehmern wie in der experimentellen Ökonomie. Einen Querschnitt zeigt der Symposiumsband von Schreckenberg, Selten: *Human Behaviour and Traffic Networks*, Springer 2004. Aktuell stellen Elektromobilität und ÖPNV neue Herausforderungen.

Paradoxe Systeme

Paradoxical behaviour of mechanical and electrical networks

Joel E. Cohen*† & Paul Horowitz‡

† Rockefeller University, 1230 York Avenue, Box 20, New York, New York 10021-6399, USA
‡ Department of Physics, Harvard University, Cambridge, Massachusetts 02138, USA

WE describe here a network of strings and springs in which cutting a string that supports a weight results in a rise of the weight at equilibrium. In an analogous electronic circuit of passive two-terminal devices (resistors and Zener diodes), adding a current-carrying path increases the voltage drop across the circuit. These systems are mechanical and electrical analogues of a paradox of congested traffic flow[1,2]. Along with similar hydraulic and thermal analogues, they show how non-intuitive equilibrium behaviour can arise in physical networks made up of classical components.

Paradoxe mechanische Systeme

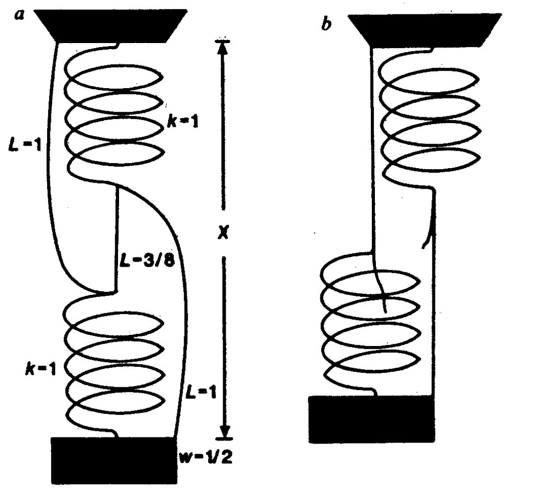


FIG. 1 Mechanical network. Springs have zero unstretched length and spring constant $k=1$. Strings are inelastic. The string that links the two springs has length $\frac{3}{8}$ m. Both safety strings have length 1 m. The weight exerts a force of $\frac{1}{2}$ N. *a*, In the initial network, both safety strings are limp, and the distance *X* from support to weight is $1\frac{3}{8}$ m. *b*, After the linking string is cut, the weight is higher at equilibrium; the new distance from support to weight is $1\frac{1}{4}$ m.

Paradoxe elektrische Systeme

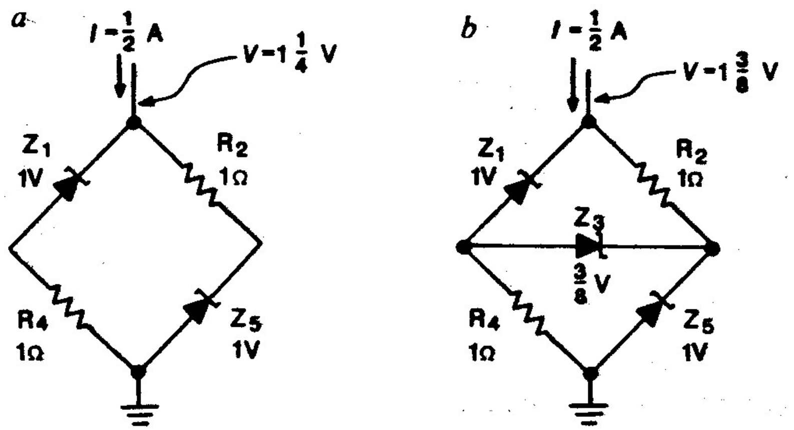


FIG. 3 Electrical network of ideal components. *a*, Initially, current flows symmetrically through left and right branches, and the voltage drop from source to ground is $1\frac{1}{4}$ V. *b*, When a $\frac{3}{8}$-V Zener diode is introduced across the network, the current through the 1-V Zener diodes drops to zero and all current flows through the 1-Ω resistors and the $\frac{3}{8}$-V Zener diode, producing a larger voltage drop from source to ground of $1\frac{3}{8}$ V.

Paradoxe Systeme

Aufgabe: Führen Sie das oben skizzierte mechanische System aus und rechnen Sie das behauptete paradoxe Verhalten sorgfältig nach! Wenn Sie es praktisch-konkret mögen, können Sie es sogar bauen.

Projekt: Wie können Sie dies für Wasser oder Wärme realisieren? Lässt sich dies ebenso einfach im Experiment demonstrieren?

Projekt: Er/Finden Sie (potentiell) paradoxe Systeme in Ihrem Alltag:

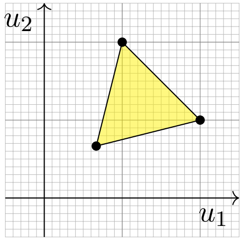
- Nutzung von Aufzügen und Treppen: Warteschlangen?
- In der Mensa: Essensausgabe? Geschirrrückgabe?
- Anmeldung zu Übungsgruppen, Seminaren, etc.

Vermutlich müssen Sie hier geeignete Annahmen / Parameter wählen. Selbst wenn die so konstruierten Beispiele etwas unrealistisch anmuten, so illustrieren sie doch immerhin die Möglichkeit paradoxen Verhaltens.

Korrelierte Strategien: Bach oder Strawinsky

Bislang nahmen wir an, dass Spieler nicht miteinander kommunizieren dürfen / können / wollen. Nützt Kommunikation vor dem Spiel? Wie?

A \ B	Bach	Strawinsky
Bach	1, 2	0, 0
Strawinsky	0, 0	2, 1



Gleichgewichte von $\bar{u}$ sind $(\text{Bach}, \text{Bach})$ und $(\text{Strawinsky}, \text{Strawinsky})$ sowie gemischt $\left(\frac{1}{3} \cdot \text{Bach} + \frac{2}{3} \cdot \text{Strawinsky},\ \frac{2}{3} \cdot \text{Bach} + \frac{1}{3} \cdot \text{Strawinsky} \right)$. Jede dieser Vereinbarung ist stabil (*self enforcing*): Nash–Gleichgewicht!

Die Spieler können einen Unparteiischen bitten, eine Münze zu werfen, allgemein eine Zufallsvariable $s : (\Omega, \mathbf{P}) \to \mathrm{NE}(\bar{u}) : \omega \mapsto (s_1(\omega), s_2(\omega))$. Das **Signal** $\omega \in \Omega$ muss hierzu beiden Spielern zugänglich sein.
☺ Damit erreichen sie die **konvexe Hülle** aller NE-Auszahlungen.

Korrelierte Strategien: Bach oder Strawinsky

A \ B	B (2/3)	S (1/3)
B (1/3)	1, 2 (2/9)	0, 0 (1/9)
S (2/3)	0, 0 (4/9)	2, 1 (2/9)

Produktmaß: unabhängig

A \ B	B (1/2)	S (1/2)
B (1/2)	1, 2 (1/2)	0, 0 (0)
S (1/2)	0, 0 (0)	2, 1 (1/2)

stochastisch abhängig / korreliert

Die Strategiemenge S_i wird zum Simplex $\bar{S}_i = [S_i]$, also WMaßen auf S_i; $S = S_1 \times \dots \times S_n$ wird zu $\bar{S} = [S_1] \times \dots \times [S_n]$, also Produktmaßen; dank Absprache zu $[S_1 \times \dots \times S_n]$, also beliebigen WMaßen auf S.

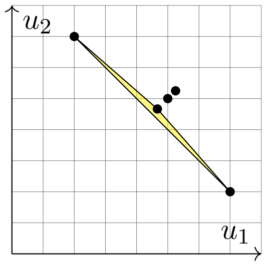
⚠ Die Absprache vor dem Spiel ist nicht bindend; sie muss im Spiel stabil sein, also ein Nash–Gleichgewicht. Lässt sich mehr erreichen als die konvexe Hülle? Sicher nicht durch ein einziges Signal $\omega \in \Omega$, das für alle gleichermaßen sichtbar ist. Das kann jedoch gelingen, wenn jeder Spieler sein eigenes Signal erhält. Diese geniale Idee zu **korrelierten Gleichgewichten** wurde von Robert Aumann 1974 eingeführt.

Korrelierte Strategien: Chicken Game

Aufgabe: Analysieren Sie das folgende Spiel *Feige-oder-mutig*.

A \ B	feige (2/3)	mutig (1/3)
feige (2/3)	6, 6 (4/9)	2, 7 (2/9)
mutig (1/3)	7, 2 (2/9)	0, 0 (1/9)

Produktmaß: unabhängig



A \ B	feige (2/3)	mutig (1/3)
feige (2/3)	6, 6 (1/3)	2, 7 (1/3)
mutig (1/3)	7, 2 (1/3)	0, 0 (0)

stochastisch abhängig / korreliert

A \ B	feige (3/4)	mutig (1/4)
feige (3/4)	6, 6 (1/2)	2, 7 (1/4)
mutig (1/4)	7, 2 (1/4)	0, 0 (0)

stochastisch abhängig / korreliert

Korrelierte Strategien: Chicken Game

Lösung: Gleichgewichte von $\bar{u}$ sind $(\text{feige}, \text{mutig})$ und $(\text{mutig}, \text{feige})$ sowie gemischt $\left(\frac{2}{3}\text{feige} + \frac{1}{3}\text{mutig},\ \frac{2}{3}\text{feige} + \frac{1}{3}\text{mutig} \right)$ mit Auszahlungen $(2, 7)$ und $(7, 2)$ sowie $(14/3, 14/3)$. Hier $14/3 \approx 4.66 > 4.5 = (7+2)/2$. Jede dieser Vereinbarung ist selbst-stabilisierend (*self enforcing*).

Ein unparteiischer Signalgeber (*signalling device*) lost eines von drei Paaren aus gemäß der Gleichverteilung $\frac{1}{3}(\mathrm{f}, \mathrm{f}) + \frac{1}{3}(\mathrm{f}, \mathrm{m}) + \frac{1}{3}(\mathrm{m}, \mathrm{f})$ und empfiehlt jedem Spieler seine Strategie: nur diese, sonst nichts! Der Spieler kennt das WMaß vollständig, die Ziehung nur teilweise.

Behauptung: Es lohnt sich für jeden Spieler, der Empfehlung zu folgen.

Wir betrachten Spieler A: Sein Signal „mutig“ bedeutet B bekam „feige“; dies ist ein Nash–Gleichgewicht. Sein Signal „feige“ bedeutet B bekam „feige“ oder „mutig“ mit bedingter Wkt $\frac{1}{2}$feige $+ \frac{1}{2}$mutig. Spielt A „feige“, so erwartet er den Gewinn 4, spielt er „mutig“ nur 3.5. Demnach wird A strikt der Empfehlung folgen, genauso auch B. Die Auszahlung ist $(5, 5)$.

☺ Die Spieler überschreiten die konvexe Hülle aller NE-Auszahlungen! Das letzte Beispiel zeigt den Maximalfall mit Auszahlungen $(21/4, 21/4)$.

Korrelierte Strategien und Gleichgewichte

Gegeben sei ein endliches Spiel $u : S = \prod_{i \in I} S_i \to \mathbb{R}^I$ und $(\Omega, \mathbf{P}, X)$, ein endlicher WRaum $(\Omega, \mathbf{P})$ mit Zufallsvariablen $X_i : \Omega \to \Omega_i$ für $i \in I$.

Jeder Spieler $i \in I$ beobachtet sein Signal $\omega_i = X_i(\omega) \in \Omega_i$ und wählt seine Strategie $s_i(\omega) = \tilde{s}_i(\omega_i) \in S_i$, also $s_i = \tilde{s}_i \circ X_i$ mit $\tilde{s}_i : \Omega_i \to S_i$.

Definition C2A (korrelierte Strategie über einem Signalgeber)

Zum Spiel $u : S = \prod_{i \in I} S_i \to \mathbb{R}^I$ gegeben sei ein Signalgeber $(\Omega, \mathbf{P}, X)$. Wir nennen $s : (\Omega, \mathbf{P}, X) \to S$ mit $s_i = \tilde{s}_i \circ X_i$ eine **korrelierte Strategie**. Sie ist ein **korreliertes Gleichgewicht**, wenn für jeden Spieler $i \in I$ gilt:

$$\mathbf{E}\big[u_i(s_i; s_{-i})\big] \ge \mathbf{E}\big[u_i(s_i'; s_{-i})\big]$$

für jede Alternative $s_i' = \tilde{s}_i' \circ X_i : \Omega \to S_i$, die nur von X_i abhängt.

Ausgeschrieben vergleichen wir hier die erwarteten Auszahlungen

$$\mathbf{E}\big[\omega \mapsto u_i(s_i(\omega); s_{-i}(\omega))\big] \ge \mathbf{E}\big[\omega \mapsto u_i(s_i'(\omega); s_{-i}(\omega))\big], \quad \text{also}$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} u_i(s_i(\omega); s_{-i}(\omega)) \cdot \mathbf{P}(\omega) \ge \sum_{\omega \in \Omega} u_i(s_i'(\omega); s_{-i}(\omega)) \cdot \mathbf{P}(\omega).$$

Korrelierte Strategien und Gleichgewichte

Die hier vorausgesetzte Endlichkeit dient als technische Vereinfachung. Allgemein haben wir einen WRaum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ und für jeden Spieler $i \in I$ eine messbare Abbildung $X_i : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\Omega_i, \mathscr{A}_i)$. Im diskreten Falle, wie hier angenommen, sind $\mathscr{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ und $\mathscr{A}_i = \mathfrak{P}(\Omega_i)$ die Potenzmengen.

Die Zufallsvariable $X_i : \Omega \to \Omega_i$ kodiert die gesamte **Zusatzinformation**, die Spieler i zur Verfügung gestellt wird: Damit und nur damit arbeitet er. Sie definiert die Unteralgebra $\mathscr{B}_i := X_i^* \mathscr{A}_i = \{\, X_i^{-1}(A) \mid A \in \mathscr{A}_i \,\} \subseteq \mathscr{A}$: Diese kodiert genau die Information, die Spieler i zur Verfügung steht. Wir nennen eine Abbildung $s_i : \Omega \to S_i$ **zulässig** für Spieler i, wenn sie $\mathscr{B}_i$–messbar ist. Dies ist äquivalent zu $s_i = \tilde{s}_i \circ X_i$ mit $\tilde{s}_i : \Omega_i \to S_i$.

Gegeben sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}, \mathscr{B})$, also ein WRaum mit Unteralgebren $\mathscr{B}_i$. Wir nennen $s : (\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}, \mathscr{B}) \to S$ eine **korrelierte Strategie**, wenn jede Komponente s_i zulässig ist, also $s_i : (\Omega, \mathscr{B}_i) \to (S_i, \mathfrak{P}(S_i))$ messbar. Sie ist ein **korreliertes Gleichgewicht**, wenn die Ungleichung

$$\mathbf{E}\big[u_i(s_i; s_{-i})\big] \ge \mathbf{E}\big[u_i(s_i'; s_{-i})\big]$$

für jede zulässige Alternative $s_i' : \Omega \to S_i$ gilt. 🙂 So geht es auch.

Korrelierte und Nash–Gleichgewichte

Gegeben sei ein endliches Spiel $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ und $(\Omega, \mathbf{P}, X)$. Wir erweitern damit jede Strategiemenge S_i zu $\tilde{S}_i := \{\, \tilde{s}_i : \Omega_i \to S_i \,\}$. Eine Abbildung $\tilde{s}_i : \Omega_i \to S_i$ legt fest, wie Spieler i jedes von ihm empfangene Signal $\omega_i \in \Omega_i$ in eine Strategie $\tilde{s}_i(\omega_i) \in S_i$ übersetzt. Die Auszahlungen sind gegeben durch die obigen Erwartungswerte:

$$\tilde{u}_i(\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_n) := \mathbf{E}\big[u_i(\tilde{s}_1 \circ X_1, \dots, \tilde{s}_n \circ X_n)\big]$$

Proposition C2B (erweitertes Spiel über einem Signalgeber)

Die korrelierten Strategien $s : (\Omega, \mathbf{P}, X) \to S$ des Spiels u entsprechen den Strategievektoren des erweiterten Spiels $\tilde{u} : \tilde{S} = \tilde{S}_1 \times \dots \times \tilde{S}_n \to \mathbb{R}^n$.

Genau dann ist $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_n)$ ein Nash–Gleichgewicht für das Spiel $\tilde{u}$, wenn $s = \tilde{s} \circ X : (\Omega, \mathbf{P}, X) \to S$ ein korreliertes Gleichgewicht für u ist.

🙂 Nash–Gleichgewichte werden also nicht überflüssig, im Gegenteil, sie erscheinen hier in erweiterter Form: Korrelierte Gleichgewichte sind eine natürliche Erweiterung von Nash–Gleichgewichten. Das wird formal übersetzt, indem wir das ursprüngliche Spiel u zum Spiel $\tilde{u}$ erweitern.

Korrelierte und Nash–Gleichgewichte

Die Spieler dürfen / können / wollen vor dem Spiel **kommunizieren**. Sie vereinbaren hierzu einen gemeinsamen **Signalgeber** $(\Omega, \mathbf{P}, X)$. Jeder Spieler bekommt sein individuelles Signal $X_i : \Omega \to \Omega_i : \omega \mapsto \omega_i$ und übersetzt dies mittels $\tilde{s}_i : \Omega_i \to S_i$ in seinen Spielzug $\tilde{s}_i(\omega_i) \in S_i$.

⚠ Während des Spiels bekommt Spieler i nur **seine Information** ω_i. Recht auf Information? nur auf Teilinformation! Frei nach Thomas de Maizière: „Ein Teil der Antwort würde die Bevölkerung verunsichern.“

⚠ Die Spieler wollen zwar kommunizieren und in diesem Rahmen kooperieren, aber sie sind nicht naiv und misstrauen sich weiterhin.

Während des Spiels ist jeder auf sich gestellt, es gibt keine bindenden Verträge oder verpflichtenden Verabredungen außerhalb des Spiels. Das koordinierende Signal ist daher zunächst nur eine **Empfehlung**.

🙂 Die **Gleichgewichtsbedingung** stellt sicher, dass jeder Spieler der Empfehlung des Signalgebers wirklich folgen kann, gar muss.

🙂 Die Ausformulierung dieser Bedingung für $s : (\Omega, \mathbf{P}, X) \to S$ führt uns erneut zu Nash–Gleichgewichten, diesmal für das erweiterte Spiel $\tilde{u}$.

Korrelierte Strategien: kanonische Signalgeber

Definition C2c (kanonische Signalgeber)

Wir betrachten weiterhin ein endliches Spiel $u : S = \prod_{i \in I} S_i \to \mathbb{R}^I$.
Das Produkt S kommt mit den Projektionen $\mathrm{pr}_i : S \to S_i : (s_j)_{j \in I} \mapsto s_i$.

Ein **kanonischer Signalgeber** $(S, \mathbf{P}, \mathrm{pr})$ ist ein WMaß $\mathbf{P} \in [S]$.
Hierzu gehört die korrelierte Strategie $\mathrm{id} : (S, \mathbf{P}, \mathrm{pr}) \to S$.
Sie ist ein **korreliertes Gleichgewicht**, wenn gilt:

$$(1) \qquad \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i; s_{-i}) \cdot \mathbf{P}(s_i; s_{-i}) \ge \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i'; s_{-i}) \cdot \mathbf{P}(s_i; s_{-i})$$

für jeden Spieler i und alle Strategien $s_i, s_i' \in S_i$. Wir schreiben hierfür

$$\boxed{\mathrm{CE}(u) = \{\, \mathbf{P} \in [S] \mid \mathbf{P} \text{ ist ein korreliertes Gleichgewicht von } u \,\}.}$$

☺ Genau so haben wir die eingangs gezeigten Beispiele gelöst!

☺ Die Gleichgewichtsdefinitionen C2a und C2c sind äquivalent.

Korrelierte Strategien: kanonische Signalgeber

Aufgabe: Warum ist die kanonische Gleichgewichtsdefinition C2c äquivalent zur allgemeinen Gleichgewichtsdefinition C2a, also

$$(2) \qquad \sum_{s \in S} u_i(s_i; s_{-i}) \cdot \mathbf{P}(s_i; s_{-i}) \ge \sum_{s \in S} u_i(\alpha(s_i); s_{-i}) \cdot \mathbf{P}(s_i; s_{-i})$$

für alle Alternativen $\alpha : S_i \to S_i$ neben der Identität $\mathrm{id} : S_i \to S_i$?

Lösung: Es gilt „(1) ⇒ (2)" dank Addition $\sum_{s_i \in S_i}$ der Ungleichungen

$$\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i; s_{-i}) \cdot \mathbf{P}(s_i; s_{-i}) \ge \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(\alpha(s_i); s_{-i}) \cdot \mathbf{P}(s_i; s_{-i}).$$

Wir zeigen die Umkehrung „(2) ⇒ (1)" durch Kontraposition.
Angenommen in (1) gilt „<" für mindestens ein Paar $s_i, s_i' \in S_i$.
Wir definieren $\alpha : S_i \to S_i$ durch $\alpha(s_i) = s_i'$ sowie $\alpha(s_i^*) = s_i^*$ für alle $s_i^* \in S_i \setminus \{s_i\}$. Dann gilt in (2) ebenfalls „<".

☺ Das beweist die Äquivalenz „(1) ⇔ (2)".

Korrelierte Strategien: kanonische Signalgeber

Proposition C2d (Emulation durch kanonischen Signalgeber)

Sei $u : S = \prod_{i \in I} S_i \to \mathbb{R}^I$ ein endliches Spiel. Jede korrelierte Strategie $s : (\Omega, \mathbf{P}, X) \to S$ können wir emulieren durch die kanonische korrelierte Strategie $\mathrm{id} : (S, \mathbf{P}_s, \mathrm{pr}) \to S$ mit dem Bildmaß $\mathbf{P}_s(A) = \mathbf{P}(s^{-1}(A))$.

Ist $s : (\Omega, \mathbf{P}, X) \to S$ ein Gleichgewicht, dann auch $\mathrm{id} : (S, \mathbf{P}_s, \mathrm{pr}) \to S$.

Aufgabe: (1) Rechnen Sie diese Aussage sorgfältig nach!
(2) Die Umkehrung gilt nicht. Finden Sie ein Gegenbeispiel!

Lösung: (1) Jede Alternative zu $(\mathrm{pr}_i)_{i \in I}$ liefert eine zu $(s_i)_{i \in I}$.
Ist also $(s_i)_{i \in I}$ ein korreliertes Gleichgewicht, dann auch $(\mathrm{pr}_i)_{i \in I}$.

(2) Wir betrachten $\Omega_i = \Omega$ und $X_i = \mathrm{id}_\Omega$, das heißt, jeder Spieler erhält vollständige Information über die Ziehung. Genau dann ist $s = (s_i)_{i \in I}$ ein korreliertes Gleichgewicht, wenn $s(\omega) \in \mathrm{NE}(u)$ für jedes $\omega \in \Omega$ gilt. Somit ist $\mathbf{P}_s \in [\mathrm{NE}(u)]$ Konvexkombination reiner Nash–Gleichgewichte. Wir haben jedoch oben bereits gesehen: Es gibt durchaus korrelierte Gleichgewichte $\mathrm{id} : (S, \mathbf{P}_s, \mathrm{pr}) \to S$, die darüber hinaus gehen!

Korrelierte Strategien: kanonische Signalgeber

☺ Im Vergleich zu einem allgemeinen Signalgeber $(\Omega, \mathbf{P}, X)$ sind im kanonischen Falle die Ergebnismenge $\Omega = S$ und die Zufallsvariablen $X_i = \mathrm{pr}_i$ fest vorgegeben. Es kommt nur noch auf das WMaß $\mathbf{P}$ an.

☺ Die kanonische Darstellung ist oft einfacher und übersichtlicher.
Beliebige Signalgeber hingegen scheinen zunächst allgemeiner.
Wir können aber jede korrelierte Strategie $s : (\Omega, \mathbf{P}, X) \to S$ ersetzen durch die kanonische korrelierte Strategie $\mathrm{id} : (S, \mathbf{P}_s, \mathrm{pr}) \to S$.
Dank C2d gehen dabei keine korrelierten Gleichgewichte verloren.

☺ Die allgemeine Formulierung der Signalgeber ist flexibel.
Die Umformulierung in das kanonische Modell ist beruhigend.
Sie liefert zudem eine einheitliche und effiziente Datenstruktur:
Im kanonischen Modell schreiben wir alle Wkten übersichtlich als Tabelle und überprüfen damit direkt die Gleichgewichtsbedingung.

Nash– und korrelierte Gleichgewichte

☺ Wir suchen korrelierte Gleichgewichte: Existieren Sie immer? Ja!

Satz C2E (gemischte Nash–Gleichgewichte als korrelierte)

Jeden gemischten Strategievektor $\bar{s} = (\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n) \in \bar{S} = \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n$ können wir darstellen als (un)korrelierte Strategie $\mathrm{id} : (S, \mathbf{P}, X) \to S$:

Jede Familie $\bar{s}$ gemischter Strategien $\bar{s}_i = \sum_k p_i^k s_i^k \in \bar{S}_i$ definiert auf S das Produktmaß $\mathbf{P} : \mathfrak{P}(S) \to [0,1]$ mit $\{(s_1^{k_1}, \dots, s_n^{k_n})\} \mapsto p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$.

Genau dann ist $\bar{s} \in \bar{S}$ ein Nash–Gleichgewicht des Spiels $\bar{u}$, wenn $\mathrm{id} : (\Omega, \mathbf{P}, X) \to S$ ein korreliertes Gleichgewicht von u ist.

☺ In diesem Sinne enthalten die korrelierten alle Nash–Gleichgewichte.

Satz C2F (Konvexität)

Die Menge der Auszahlungen korrelierter Gleichgewichte ist konvex. Sie enthält die konvexe Hülle aller NE-Auszahlungen, evtl. noch mehr.

Aufgabe: Rechnen Sie beide Sätze zur Übung sorgfältig nach!

Nash– und korrelierte Gleichgewichte

☺ Korrelierte Gleichgewichte haben technische und praktische Vorteile! Alle Bedingungen sind lineare Un/Gleichungen, sie lassen sich daher durch Lineare Programmierung lösen, etwa das Simplex-Verfahren.

☹ Dagegen sind Nash–Gleichgewichte leider recht widerspenstig. Zu lösen sind dort nicht-lineare (genauer n–lineare) Un/Gleichungen; dafür immerhin ist die Anzahl der freien Variablen dort viel kleiner.

☺ Die Menge $\mathrm{NE}(\bar{u})$ der Nash–Gleichgewichte ist nicht-leer nach dem Existenzsatz von Nash (B1E). Sie ist aber im Allgemeinen nicht konvex, wie bereits einfache Beispiele zeigen, oben etwa *Bach oder Strawinsky*.

☺ Korrelierte Gleichgewichte verhalten sich hier wesentlich besser. Im kanonischen Modell bilden alle korrelierten Gleichgewichte eine konvexe Menge, und somit auch die zugehörigen Auszahlungen (C2F).

Jedes Nash–Gleichgewicht können wir als korreliertes darstellen (C2E). Somit ist auch die Menge der korrelierten Gleichgewichte nicht-leer!

Nash– und korrelierte Gleichgewichte

Aufgabe: Bleiben korrelierte Gleichgewichte unter Isomorphismen erhalten? strikt? monoton? schwach monoton? affin? schwach affin?

Lösung: Schreiben Sie die geforderten Ungleichungen sorgfältig aus: Schwach affine Isomorphismen erhalten korrelierte Gleichgewichte, somit auch affine und strikte Isomorphismen. (Monotonie genügt nicht.)

Aufgabe: Wie korrelieren sich schwach dominierte Strategien?

Lösung: Angenommen, es gilt $s_i' \geq_i^u s_i$ für ein Paar $s_i', s_i \in S_i$, also $u_i(s_i'; s_{-i}) \geq u_i(s_i; s_{-i})$ für alle Gegenstrategien $s_{-i} \in S_{-i}$. Gilt dann für ein $s_{-i} \in S_{-i}$ zudem strikt $u_i(s_i'; s_{-i}) > u_i(s_i; s_{-i})$, so folgt in jedem korrelierten Gleichgewicht $\mathbf{P}(s_i; s_{-i}) = 0$. In Worten: Auf dominierten Strategien liegt kein Gewicht.

Nash– und korrelierte Gleichgewichte

Aufgabe: Was bedeuten korrelierte Gleichgewichte für bedingte Wkten? Warum sollte ein Spieler der ihm signalisierten Empfehlung folgen?

Lösung: Wir betrachten einen kanonischen Signalgeber $(S, \mathbf{P}, \mathrm{pr})$. Dem Spieler i wird die Strategie $s_i \in S_i$ empfohlen mit der Wkt

$$\mathbf{P}_i(s_i) := \mathbf{P}\big(\{\, s \in S \mid \mathrm{pr}_i(s) = s_i \,\}\big).$$

Falls diese > 0 ausfällt, so erhalten wir auf S_{-i} die bedingte Wkt

$$\mathbf{P}_i^{s_i}(s_{-i}) := \mathbf{P}(s_i; s_{-i}) / \mathbf{P}_i(s_i).$$

Die Gleichgewichtsbedingung fordert für alle Alternativen $s_i' \in S_i$:

$$\mathbf{E}_i^{s_i}\big[u_i(s_i; s_{-i})\big] \geq \mathbf{E}_i^{s_i}\big[u_i(s_i'; s_{-i})\big]$$

Unter der Bedingung, dass Spieler i die Empfehlung $s_i \in S_i$ bekommt, ist es für ihn nicht vorteilhaft, eine andere Strategie $s_i' \in S_i$ zu spielen.

Tabellenkalkulation und Umordnungsschwindel

Kann man aus nichts Geld machen dank kreativer Tabellenkalkulation?
Behauptung: Es ist egal, ob wir erst Zeilen oder erst Spalten summieren.
Klar, bei endlichen Tabellen! Für unendliche gibt es Überraschungen:
Sei $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $a(i,i) = +1$ und $a(i+1,i) = -1$ und sonst $= 0$.

$\vdots$	j 0	0	0	0	0	$\iddots$
0	0	0	0	0	+1	$\iddots$
0	0	0	0	+1	−1	0
0	0	0	+1	−1	0	0
0	0	+1	−1	0	0	0
0	+1	−1	0	0	0	0 i
	+1	0	0	0	0	$\cdots$

Zeilen zuerst:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a(i,j) = 0$$

Spalten zuerst:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a(i,j) = 1$$

⚠ Umordnung verlangt absolute Summierbarkeit!

Umordnung absolut summierbarer Reihen

Wir erinnern an folgenden wichtigen Umordnungssatz der Analysis 1.
Cauchy–Umordnungssatz: Für jede Doppelfolge $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ gilt

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} |a_{ij}| = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{ij}| = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} |a_{ij}| = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{i+j=k} |a_{ij}|.$$

Ist dieser Wert endlich, so ist (a_{ij}) absolut summierbar, und dann gilt

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{i+j=k} a_{ij}.$$

🙂 Diese nützliche Rechenregel hat zahlreiche Anwendungen, zum Beispiel die Multiplikation von Reihen, insbesondere Potenzreihen.

⚠ Unser obiges Beispiel ist nicht absolut summierbar, und die Umordnung der Reihe schlägt tatsächlich fehl!

Dasselbe gilt für die Integration und den Satz von Fubini.
Kreativität ist schön, Korrektheit ist besser!

Kreative Rechnung und klassischer Schwindel

These: Jedes mathematische Phänomen lässt sich finanziell ausnutzen.

Ziel: Ich will aus nichts Geld machen. Hier ist mein **Businessplan:**

$$\begin{aligned}
& 0 \\
= {} & 0 + 0 + 0 + 0 + \dots \\
= {} & (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots \\
= {} & 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \dots \\
= {} & 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \dots \\
= {} & 1 + 0 + 0 + 0 + \dots \\
= {} & 1
\end{aligned}$$

Kreative Rechnung und klassischer Schwindel

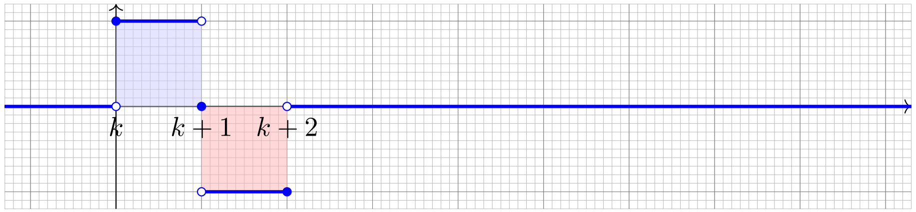
Aufgabe: Wo genau steckt der Fehler? **Lösung:** Die ersten zwei und die letzten zwei Gleichheitszeichen sind korrekt: Links und rechts stehen jeweils dieselben Werte. Die mittleren haben überhaupt gar keinen Sinn: Die mittlere Zeile definiert keinen Wert! Selbst wenn wir phantasievoll einen Wert zuweisen / erfinden / definieren, etwa $1/2$, mindestens eine der beiden mittleren Gleichungen wird falsch, vermutlich sogar beide.

Das war natürlich ein Schwindel! Hier ist mein verbesserter Plan:
Am Tag 1 leihe ich mir 1 Euro, den ich dann am Tag 2 zurückzahle.
Auch am Tag 2 leihe ich mir 1 Euro, den ich am Tag 3 zurückzahle.
Dies setze ich nun unbegrenzt fort. Was ich leihe, zahle ich zurück...
dennoch verschafft mir diese Reihe 1 Euro, den ich nie zurückzahle!

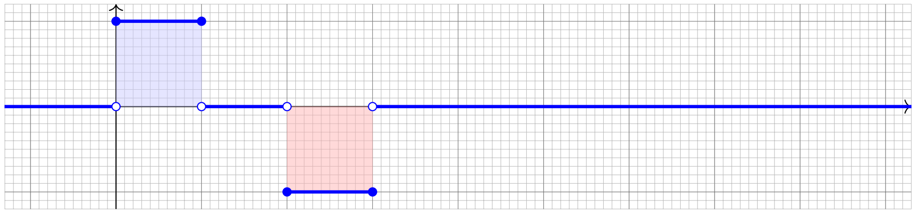
Anschaulich: Die Schulden werden nach Unendlich verschoben.
Für manche Menschen bedeutet $t = \infty$ einfach alles nach ihnen.
Wie bitte, Sie halten das für unrealistisch, gar verrückt? Ja, sicher.
Dennoch wird diese Methode erstaunlich häufig angewendet.
Sie funktioniert, solange sie akzeptiert wird.

Kreative Rechnung und klassischer Schwindel

Kredit und Tilgung: Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k = \mathbf{I}_{[k,k+1]} - \mathbf{I}_{[k+1,k+2]}$.



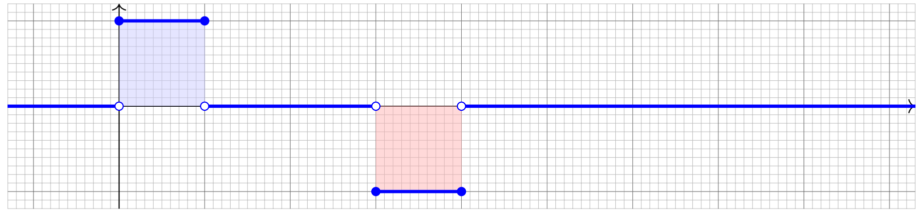
Offensichtlich gilt $\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x = 0$.



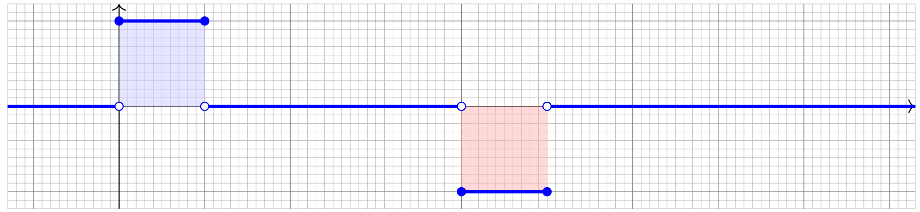
Auch für $g_1 = f_0 + f_1$ ist das Integral Null.

Kreative Rechnung und klassischer Schwindel

Graph zu $g_2 = f_0 + f_1 + f_2$:



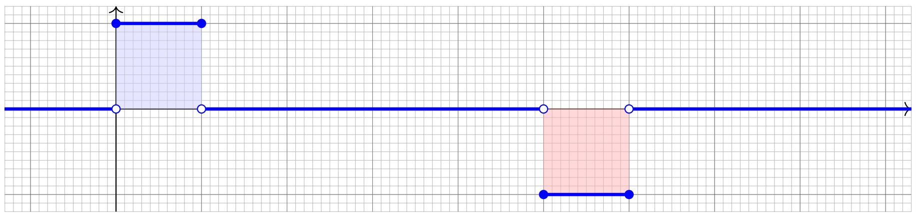
Graph zu $g_3 = f_0 + f_1 + f_2 + f_3$:



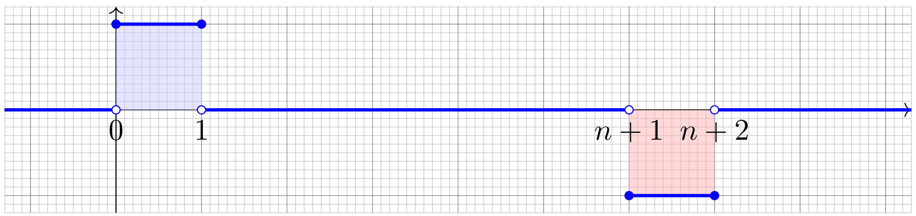
Das Integral ist jeweils Null.

Kreative Rechnung und klassischer Schwindel

Graph zu $g_4 = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4$:



Graph zu $g_n = f_0 + f_1 + \dots + f_n$:



Das Integral $\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,\mathrm{d}x$ ist jeweils Null. Was passiert für $n \to \infty$?

Kreative Rechnung und klassischer Schwindel

Aufgabe: Man berechne und vergleiche und bestaune:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x\right) \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right)\mathrm{d}x$$

Lösung: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sehen wir (rechnerisch oder graphisch):

$$\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad\Longrightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x\right) = 0$$

Andererseits kennen wir für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Teleskopsumme

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \mathbf{I}_{[0,1]}(x) - \mathbf{I}_{[n+1,n+2]}(x) \quad\to\quad \mathbf{I}_{[0,1]}(x).$$

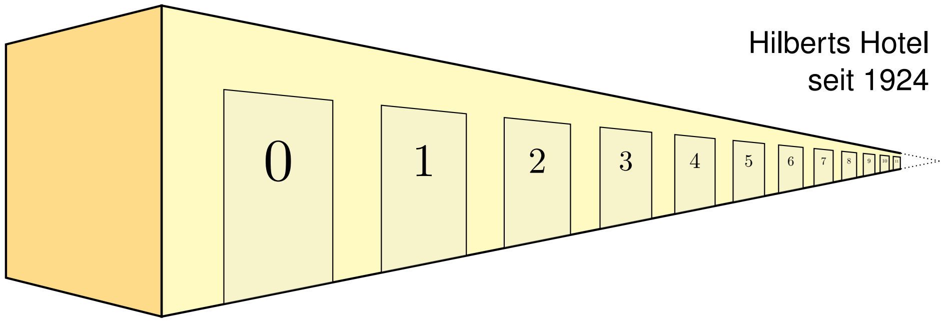
Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $n \to \infty$ gilt daher punktweise Konvergenz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \mathbf{I}_{[0,1]}(x) \quad\Longrightarrow\quad \int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right)\mathrm{d}x = 1.$$

⚠ Anschauliche Ursache: „Masse verschwindet nach Unendlich“.

Von Hilberts Hotel zu Hilberts Casino

C309



Hilberts Hotel
seit 1924

Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen,
soll uns niemand vertreiben können.

David Hilbert, *Über das Unendliche*,
Mathematische Annalen 95 (1926), 161–190

Von Hilberts Hotel zu Hilberts Casino

C310
Erläuterung

Sie kennen diese wunderbare Geschichte aus Ihrem ersten Semester:

Wenn in einem **endlichen Hotel** alle Zimmer belegt sind, dann kann kein Gast mehr aufgenommen werden. Das gilt selbst dann noch, wenn die Managerin die Gäste neu auf die Zimmer verteilt. Es hilft alles nichts!

Wir betrachten nun **Hilberts Hotel** mit unendlich vielen Zimmern. Diese seien nummeriert durch die natürlichen Zahlen $0, 1, 2, 3, \dots$ Sind alle Zimmer belegt, so kann immer noch ein Gast aufgenommen werden: Der Gast aus Zimmer 0 zieht nach 1, der von 1 nach 2, der von 2 nach 3, usw. Wir nutzen hierzu die Bijektion $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}_{\ge 1} : n \mapsto n+1$.

Ebenso zwei Gäste, oder drei, oder vier… Nun kommt ein Hilbert–Bus mit unendlich vielen Gästen. Die Managerin quartiert die alten Gäste um vermöge der Bijektion $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} 2\mathbb{N} : n \mapsto 2n$. Die neuen Gäste beziehen ihre Zimmer vermöge $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} 2\mathbb{N}+1 : n \mapsto 2n+1$. Zusammengefasst erhalten wir so die Bijektion $\{0,1\} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N} : (i,n) \mapsto 2n+i$.

Schließlich kommen unendliche viele Busse jeweils mit unendlich vielen Gästen. Kein Problem, hierzu finden wir eine Bijektion $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$.

Aufgabe: Schreiben Sie eine solche Bijektion explizit aus!

Von Hilberts Hotel zu Hilberts Casino

C311

HOTEL INFINITY, lyrics © 2000 by Lawrence Mark Lesser

On a dark desert highway — not much scenery
Except this long hotel stretchin' far as I could see.
Neon sign in front read "No Vacancy,"
But it was late and I was tired, so I went inside to plea.

The clerk said, "No problem. Here's what can be done —
We'll move those in a room to the next higher one.
That will free up the first room and that's where you can stay."
I tried understanding that as I heard him say:

[CHORUS] *"Welcome to the Hotel called Infinity —*
Where every room is full (every room is full)
Yet there's room for more.
Yeah, plenty of room at the Hotel called Infinity —
Move 'em down the floor (move 'em down the floor)
To make room for more."

Von Hilberts Hotel zu Hilberts Casino

C312

I'd just gotten settled, I'd finally unpacked
When I saw 8 more cars pull into the back.
I had to move to room 9; others moved up 8 rooms as well.
Never more will I confuse a Hilton with a Hilbert Hotel!

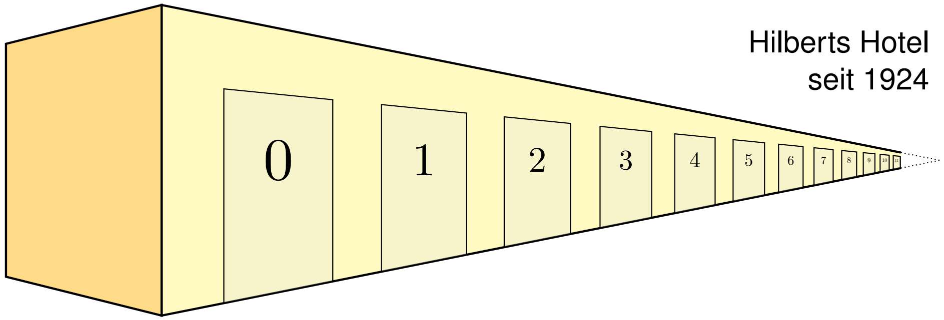
My mind got more twisted when I saw a bus without end
With an infinite number of riders coming up to check in.
"Relax," said the nightman. "Here's what we'll do:
Move to the double of your room number:
that frees the odd-numbered rooms." [CHORUS]

Last thing I remember at the end of my stay —
It was time to pay the bill but I had no means to pay.
The man in 19 smiled, "Your bill is on me.
20 pays mine, and so on, so you get yours for free!" [CHORUS]

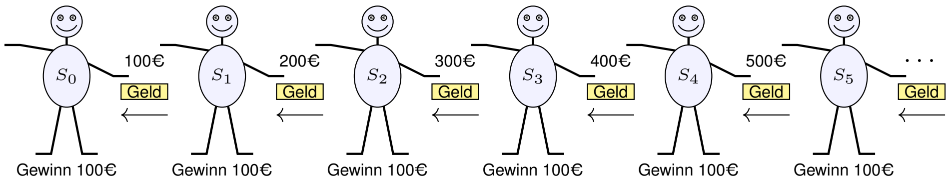
(`www.math.utep.edu/Faculty/lesser/GreatestLesserHits`)

Schneeballsystem und Ponzi–Betrug

C313



These: Jedes mathematische Phänomen lässt sich finanziell ausnutzen.



Wundersame Vermehrung des Geldes: *Everyone's a winner?*

Schneeballsystem und Ponzi–Betrug

C314
Erläuterung

Metamathematische Erfahrung führt zu folgender Hypothese:
Jedes mathematische Phänomen lässt sich finanziell ausnutzen (in gut gemeinten Anwendungen) bzw. ausbeuten (in betrügerischer Absicht).

Letzteres gilt besonders für wenig bekannte Regelmäßigkeiten (Sätze), noch besser eignen sich Unverständnis und weit verbreitete Fehler. Ausgenutzt wird hierbei nicht direkt der mathematische Sachverhalt, sondern vor allem die ungleich verteilte Information darüber.

Einige Indizien sprechen für die häufige Richtigkeit der Vermutung. Glücksspiele, auch und besonders unsere staatlichen Lotterien, verdienen Geld mit der Risikoliebe — und irrationalem Handeln, vermutlich Unwissen. Daher heißen sie auch *Steuer auf Dummheit*.

Neben legaler Ausnutzung mathematisch-logischen Unwissens gibt es auch die illegale, kriminelle Seite: Das nennen wir Betrug. Hier blühen die erstaunlichsten Schöpfungen menschlicher Dreistigkeit, gefördert durch die erstaunlichsten Auswüchse menschlicher Dummheit. Dumm-dreist versprochen wird: *Everyone's a winner, baby, that's no lie!*

Schneeballsystem und Ponzi–Betrug

C315
Erläuterung

Wir machen folgendes **Finanzexperiment** – bitte nur in Gedanken!
„Ich darf mich vorstellen, mein Name ist Charles Ponzi, Finanzgenie. Bitte passen Sie gut auf und machen Sie mit, alle werden gewinnen! Ich bin Spieler 0, Sie sind Spieler 1, Ihr Nachbar ist Spieler 2, usw. Spieler 1: Sie geben mir 100€, Ihr Nachbar gibt Ihnen 200€, Ihnen bleiben 100€ Gewinn. Spieler 2: Sie haben gerade 200€ gegeben, Ihr Nachbar gibt Ihnen jedoch 300€, also bleiben auch Ihnen 100€ Gewinn. Und so weiter, und so weiter. Jeder Teilnehmer macht so 100€ Gewinn.

Wo liegt das Problem? Befragungen meiner Mitmenschen deuten an: Viele schöpfen Verdacht, deutlich weniger durchschauen es sofort.

Als Grundregel helfen **Erhaltungssätze**: Werte kann man nicht mühelos vermehren, das sollte jeden warnen: *There are no free lunches!*

Eine genauere Analyse offenbart das **Problem der Endlichkeit**. $\mathscr{R}_1$: Der letzte Spieler S_n bleibt auf seinen Schulden sitzen. Ist er rational, wird er schon zuvor nichts zahlen. $\mathscr{R}_2$: Ist S_{n-1} rational zweiter Stufe, so sieht er den Zusammenbruch kommen und wird zuvor nichts zahlen… Die frühen Spieler benötigen jedoch Rationalität sehr hoher Stufe!

Schneeballsystem und Ponzi–Betrug

C316
Erläuterung

Schneeballsystem nennt man ein betrügerisches Geschäftsmodell, das zu seinem Betrieb immer neue Teilnehmer benötigt: Es gibt kein profitables Produkt, sondern Gewinne entstehen hauptsächlich oder ausschließlich durch das frisch zufließende Kapitel neuer Teilnehmer.

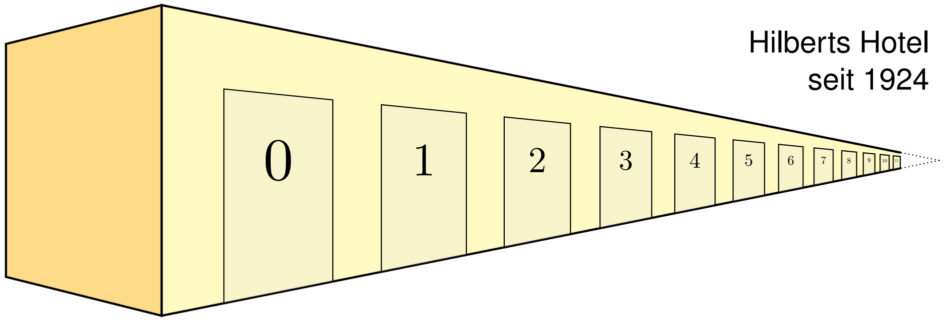
Dies heißt auch **Ponzi–Betrug**, engl. *Ponzi scheme*: Beiträge neuer Teilnehmer bezahlen die Ausschüttungen der vorigen Teilnehmer.

Berühmt-berüchtigt wurde diese Betrugsmasche durch **Charles Ponzi**, der in den 1920er Jahren Anleger in den USA um 20Mio Dollar prellte. Er versprach phantastische Renditen und lockte immer neue Investoren. Seine Methode **robbing Peter to pay Paul** flog nach acht Monaten auf.

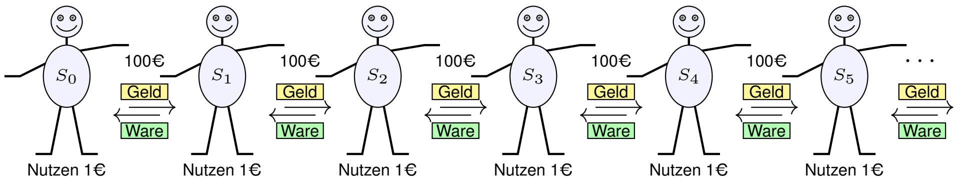
Aktuelles Beispiel eines solchen Betrugssystem ist der Betrugsskandal des Investmentunternehmens von **Bernard Madoff**. Es brach 2008 in der Bankenkrise zusammen, Investoren verloren etwa 18Mrd Dollar.

Ähnlich funktionieren **Kettenbriefe** und **Pyramidensysteme**, die heute im Internet kursieren: *Schnelles-Geld-Briefe*, engl. *Make Money Fast*. Der Schwindel beruht auf dem Versuch, Schulden nach Unendlich zu verschieben: eine unseriöse Rechnung, die Sie vermeiden sollten!

Wie und warum funktioniert Geld?



These: Jedes mathematische Phänomen lässt sich finanziell ausnutzen.



Wundersamer Nutzen des Geldes: *Everyone's a winner!*

Wie und warum funktioniert Geld?

Wir nutzen die Sprache der Mathematik, hier speziell der Spieltheorie. Als erstes möchte ich ehrlich zugeben: Das gezeigte Modell ist zwar leicht verständlich, aber leider auch extrem vereinfacht und allzu simpel. Komplizierte Geldsysteme versteht vermutlich kaum jemand so recht, oder bestenfalls nur in Analogie zu simplen Fällen wie diesem.

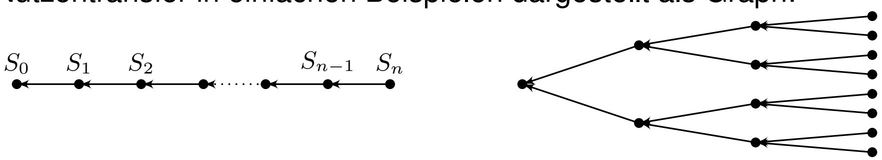
Spieler 0 bekommt Ware, die er nützlich findet und haben möchte. Spieler 1 bekommt im Gegenzug 100€; sie selbst sind für ihn unnütz, aber sie dienen ihm als Platzhalter. Spieler 1 weiß, oder besser: hofft, dass er damit Spieler 2 bezahlen kann. Und tatsächlich:

Spieler 1 bekommt Ware, die er nützlich findet und haben möchte. Spieler 2 bekommt im Gegenzug 100€; sie selbst sind für ihn unnütz, aber sie dienen ihm als Platzhalter. Spieler 2 weiß, oder besser: hofft, dass er damit Spieler 3 bezahlen kann. Und tatsächlich: . . .

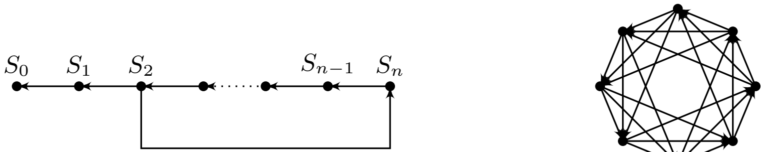
Jeder Spieler S_n weiß, mit einer kleinen Wkt $\varepsilon_n \in]0, \varepsilon]$ kann das System im nächsten Schritt zusammenbrechen. Der erwartete Verlust $\varepsilon_n \cdot$ 100€ ist jedoch geringer als der erwartete Nutzen, hier beispielhaft 1€. Daher ist es für jeden Spieler lukrativ, dieses Risiko einzugehen.

Wie und warum funktioniert Geld?

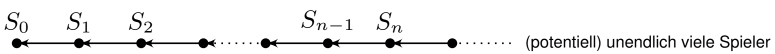
Nutzentransfer in einfachen Beispielen dargestellt als Graph:



☹ Gleichgewicht unmöglich: Ponzi–Betrug, Schneeballsystem



☺ Gleichgewicht möglich: Geldzirkulation, evtl. Abfluss, Steuern, etc.



☺ Gleichgewicht möglich: Generationenvertrag, Rentensystem, etc.

Wie und warum funktioniert Geld?

Anders als beim Ponzi–Betrug kann Geldzirkulation überall positiven Nutzen erzeugen. Das sagt freilich noch nichts über die Verteilung!

In unserem stark vereinfachten Beispiel erhält jeder denselben Nutzen / Gewinn von 1€. Für rationales Verhalten würde genügen, dass jeder strikt positiven Nutzen hat; der Nutzen kann dabei sehr unterschiedlich verteilt sein, gar extrem ungerecht. Solche Phänomene beobachten wir tatsächlich in der uns umgebenden Ökonomie.

Aus diesem Grunde wurde und wird das Geldsystem kritisiert: *Das herrschende Geldsystem ist das Geldsystem der Herrschenden.* Es wird verteidigt mit dem ideologischen Anspruch der allgemeinen Partizipation, der Chancengleichheit und der Gerechtigkeit. In der Praxis kann es dies jedoch oft nicht einlösen. Liegt das am Geldsystem selbst oder an anderen Faktoren? Darüber lohnt es sich zu streiten.

> *Geld ist eine neue Form der Sklaverei, die sich von der alten nur unterscheidet, indem sie unpersönlich ist, daß es keine direkte Beziehung zwischen Herren und Sklaven gibt.*
>
> Leo Tolstoi (1828–1910)

Wie und warum funktioniert Geld?

Jedes Tauschmittel muss gewisse Bedingungen erfüllen: (0) Es muss praktikabel und haltbar sein, aber nur schwer vermehrbar oder fälschbar. (1) Ausreichend viele Akteure akzeptieren es als Zahlungsmittel: Sie vertrauen darauf, dass ausreichend viele es akzeptieren, usw.

Aufgabe: Wir untersuchen eine einfache Gesellschaft $I = \{0, 1, \dots, N\}$. Spieler $i, j \in I$ handeln mit Wkt $p_{ij} = p_{ji}$, etwa $p_{ij} = 1/N$ für $i \neq j$.

A \ B	M	V
M	A: 0, B: 0	A: 0, B: $-a$
V	A: $-a$, B: 0	A: b, B: b

Geldnutzen zwischen Tauschpartnern: Verlust a, Nutzen b, etwa $a = b = 1$.

M: misstraut dem Tauschmittel / Geld und lehnt jeden Handel damit ab.

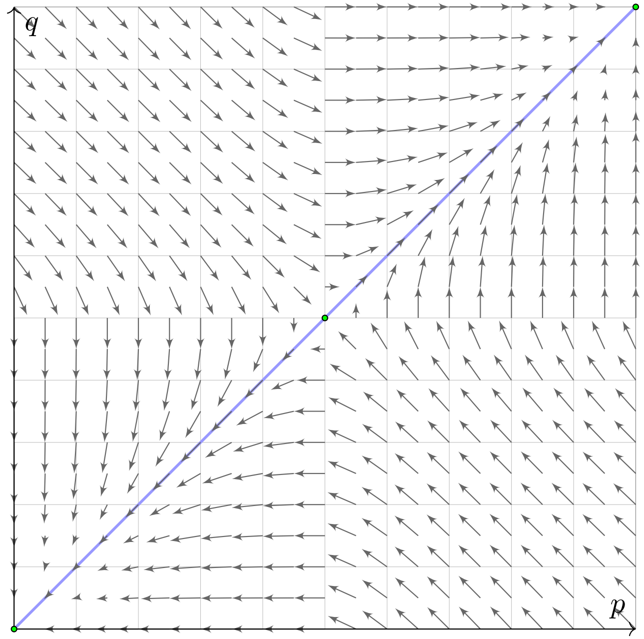
V: vertraut dem Tauschmittel / Geld und akzeptiert jeden Handel damit.

Ab welcher Akzeptanzrate $q \in [0, 1]$ setzt sich das Tauschmittel durch?

Lösung: Der erwartete Nutzen für M-Spieler ist Null. Der erwartete Nutzen für V-Spieler ist $qb - (1-q)a$, also positiv für $q > a/(a+b)$.

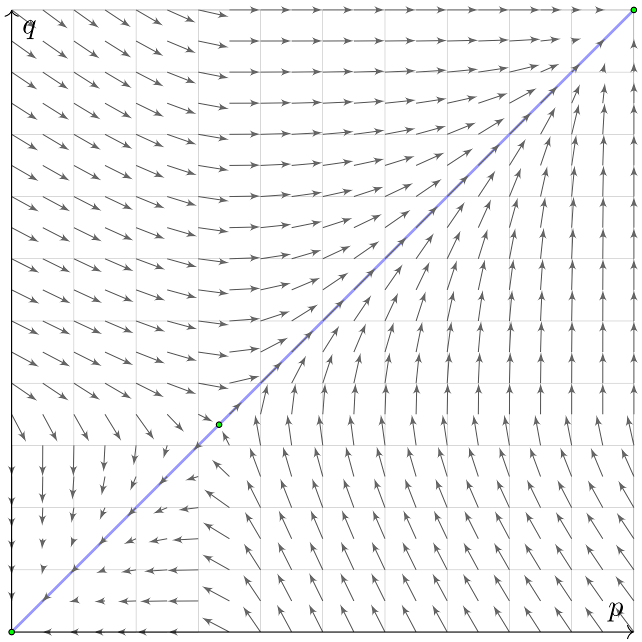
Wie und warum funktioniert Geld?

$a = 1$
$b = 1$



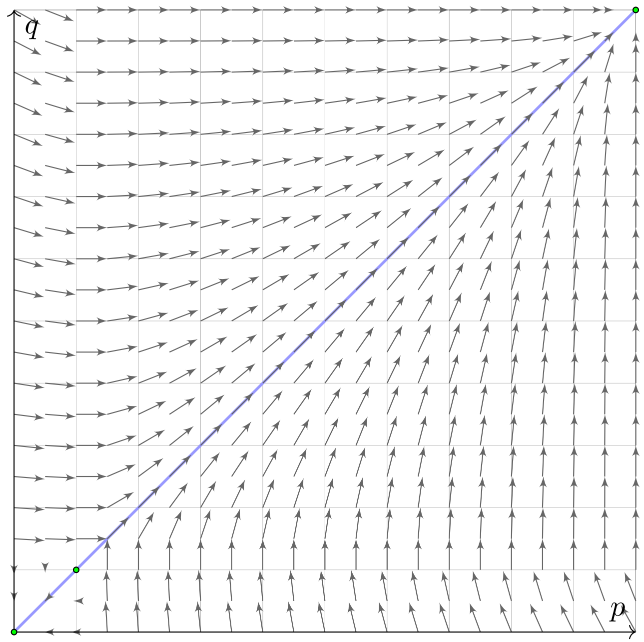
Wie und warum funktioniert Geld?

$a = 1$
$b = 2$



Wie und warum funktioniert Geld?

$a = 1$
$b = 9$



Wie und warum funktioniert Geld?

Jedes Geldsystem beruht auf **Vertrauen**, es ist eine stillschweigende **Vereinbarung** per Tradition oder ein **Gesellschaftsvertrag** per Gesetz. In unserem stark vereinfachten Modellbeispiel entsprechen allseitiges Misstrauen bzw. Vertrauen den beiden stabilen Nash–Gleichgewichten.

In schweren **Krisen** (Hyperinflation, Staatsbankrott, Bankenkollaps) übersteigt das Misstrauen (geschätzte Abbruchwkt) den Geldnutzen. Dann bricht das Geldsystem zusammen, und die Akteure flüchten sich in **Sachwerte**, etwa Rohstoffe, Edelmetalle, Immobilien, Aktien, usw... Dies ist ein sich selbst verstärkender (autokatalytischer) Vorgang. Anekdote: Auch **Zigaretten** dienten als Währung auf Schwarzmärkten. Warum akzeptiert ein Nichtraucher dieses Zahlungsmittel? Er vertraut auf viele Raucher... und auf Nichtraucher, die darauf vertrauen... usw.

Im **Tauschhandel** entwickeln sich meist bestimmte Güter zur Referenz, etwa nützliche (Getreide, Vieh) oder seltene (Muscheln, Silber, Gold): Sie werden allgemein als wertvoll anerkannt, existieren in ausreichender aber beschränkter Menge, sind praktikabel und haltbar. Sie können als **Tauschmittel** und **Wertspeicher** dienen und erhalten so Geldfunktion.

Wie und warum funktioniert Geld?

Die Übertragung dieser Funktion auf **Münzen** (China, Indien, Ägäis um 700 v.Chr.) und **Papiergeld** (China um 1000 n.Chr.) ist eine erstaunliche Errungenschaft. Das nötige Vertrauen muss zunächst aufgebaut werden, als Garant dienten meist zentrale Institutionen (König, Staat, Bank).

Seit jeher müssen diese Institutionen auch **Falschgeld** bekämpfen. In Deutschland wird bestraft (§146 StGB), wer Geld nachmacht oder verfälscht, sich Falschgeld verschafft und in Verkehr bringt, auch wer gutgläubig Falschgeld erwirbt und wissentlich weitergibt (§147 StGB). Falschgeld wird staatlicherseits eingezogen und nicht erstattet; solange jedoch niemand die Echtheit prüft, wirkt falsches genau wie echtes Geld. Alles beruht auf diesem Gleichgewicht, **Misstrauen gegen Vertrauen!**

Buchgeld stand früher im *Bankbuch*, heute wird es auf Girokonten *gebucht*. Es heißt auch **Bankengeld** oder **Giralgeld** (it. *giro*, gr. γυρός [gyrós], ‘Kreis, Umlauf’). Es ist zunächst nur ein **Zahlungsversprechen** oder umgekehrt eine **Geldforderung**. Buchgeld ist kein gesetzliches **Zahlungsmittel**, ein Gläubiger muss es daher nicht annehmen. Solange jedoch alle Beteiligten Buchgeld vertrauen, übernimmt es Geldfunktion.

Wie und warum funktioniert Geld?

Ähnlich verlief seit den 1960er Jahren die Einführung und Akzeptanz von **Kreditkarten** (Plastikgeld). Die Situation ist nicht symmetrisch, der Mechanismus aber ähnlich: Ausreichend viele Händler müssen diese Karte akzeptieren und zugleich müssen ausreichend viele Kunden sie nutzen wollen. In unserem obigen Modell entspräche dies einem Spiel zwischen zwei Populationen $I = \{1, 2, \dots, M\}$ und $J = \{1, 2, \dots, N\}$. Schwindet das Vertrauen, so kollabiert das System (auf ein voriges).

Wir erleben die jüngsten Entwicklungen dieser **Abstraktion** nahezu live: vom einst direkten Warentausch über Tauschmittel, Münzen, Scheine, Buchgeld zum elektronischen Geld und zuletzt Kryptowährungen. Auch diese leben grundlegend vom Vertrauen (allseitiger Akzeptanz) und brauchen zu diesem Zweck sichernde Institutionen, also eine geeignete und vertrauenswürdige Infrastruktur. Hier ist die dezentral organisierte **Blockchain** eine wesentliche technologische Neuerung.

In Deutschland sind Kryptowährungen (noch) kein Zahlungsmittel. Die BaFin sieht Bitcoin als Rechnungseinheit, eine Art Privatgeld, das durch gegenseitige Verrechnung als Finanzinstrument dienen kann.

Wie und warum funktioniert Geld?

Das Spiel *Misstrauen-gegen-Vertrauen* hat drei Gleichgewichte: Die beiden reinen Gleichgewichte (Misstrauen,Misstrauen) und (Vertrauen,Vertrauen) sind stabil, das gemischte Gleichgewicht dazwischen ist instabil. Wie gelingt der Übergang vom einen (Misstrauen,Misstrauen) zum anderen (Vertrauen,Vertrauen)?

Zunächst einmal hilft es, wenn das Zahlungsmittel Vorteile b hat, zudem möglichst große gegenüber den möglichen Nachteilen a. Bsp: SaniFair-Gutscheine setzen sich nicht durch als Zahlungsmittel.

Weiterhin ist es günstig, eine korrelierte Strategie zu verfolgen.

In der Praxis kann dies geschehen, indem ein speziell ausgewiesener Markt für die Benutzung des neuen Zahlungsmittels eingerichtet wird. Jeder Teilnehmer entscheidet sich, ob er daran teilnimmt (Vertrauen) oder nicht (Misstrauen). Dadurch werden die beiden Teilpopulationen weitgehend getrennt und verlustreiche Konflikte vermieden.

Dies bringt uns unverhofft zu einem weiteren interessanten Thema: evolutionär stabilen Strategien!

Evolutionär stabile Strategien

Gegeben sei ein endliches reelles Spiel $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$. Seine affine Fortsetzung $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \to \mathbb{R}^2$ interpretieren wir als Populationsmodell.

Das Spiel u sei symmetrisch, also $S_1 = S_2$ und $u_1(s_1, s_2) = u_2(s_2, s_1)$, und somit $\bar{S}_1 = \bar{S}_2 =: \bar{S}$ und $\bar{u}_1(s_1, s_2) = \bar{u}_2(s_2, s_1) =: v(s_1, s_2)$.

Dann existieren symmetrische Nash–Gleichgewichte $(s, s) \in \mathrm{NE}(\bar{u})$. Das bedeutet, die Strategie $s \in \bar{S}$ erfüllt $v(s, s) \ge v(\tilde{s}, s)$ für alle $\tilde{s} \in \bar{S}$.

Woher wissen wir das? Für endliche symmetrische Spiele erweitern wir Nashs Existenzsatz B1E auf symmetrische Gleichgewichte (B2O).

Zur Strategie $s \in \bar{S}$ tritt nun eine Mutation $\tilde{s} \in \bar{S}$ mit kleiner Wkt $\varepsilon > 0$. Die Gesamtpopulation verschiebt sich somit von s zu $s' = (1 - \varepsilon)s + \varepsilon\tilde{s}$.

Vor diesem Hintergrund s' vergleichen wir die Fitness von s bzw. $\tilde{s}$:

$$f(s) = \underbrace{(1 - \varepsilon)v(s, s)}_{\text{nullte Ordnung}} + \underbrace{\varepsilon v(s, \tilde{s})}_{\text{erste Ordnung}} \overset{!}{>} \underbrace{(1 - \varepsilon)v(\tilde{s}, s)}_{\text{nullte Ordnung}} + \underbrace{\varepsilon v(\tilde{s}, \tilde{s})}_{\text{erste Ordnung}} = f(\tilde{s})$$

Diese Ungleichung soll für alle $\varepsilon \in \left]0, \delta\right[$ gelten und ein festes $\delta > 0$. Das führt uns unmittelbar auf die folgende Definition.

Evolutionär stabile Strategien

Definition C3A (evolutionär stabile Strategien)

Gegeben sei das symmetrische Spiel

$$\bar{u} : \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \to \mathbb{R}^2 : (s_1, s_2) \mapsto \big(v(s_1, s_2), v(s_2, s_1)\big).$$

Die Strategie $s \in \bar{S}$ heißt **evolutionär stabil** gegen $\tilde{s} \in \bar{S}$, wenn gilt:

- entweder strikt $v(s, s) > v(\tilde{s}, s)$
- oder schwach $v(s, s) = v(\tilde{s}, s)$ aber $v(s, \tilde{s}) > v(\tilde{s}, \tilde{s})$.

Gilt das für alle $\tilde{s} \in \bar{S} \smallsetminus \{s\}$, so heißt s **evolutionär stabil**, kurz

$$\mathrm{ESS}(\bar{u}) := \{\ s \in \bar{S} \mid s \text{ ist evolutionär stabil}\ \}$$

Für jedes symmetrische Spiel gilt:

$$(s, s) \in \mathrm{NE}^!(\bar{u}) \implies s \in \mathrm{ESS}(\bar{u}) \implies (s, s) \in \mathrm{NE}(\bar{u})$$

Die Umkehrungen gelten i.A. nicht, wie Gegenbeispiele zeigen.

Evolutionär stabile Strategien

Wir wollen die Formel ausführlicher herleiten und diskutieren.

Sei $S = S_1 = S_2 = \{s_0, s_1, \dots, s_\ell\}$ die Strategiemenge. Im Kontext der Evolutionstheorie können wir uns jedes s_k als einen Genotyp vorstellen.

Die aktuelle Population besteht aus einer Mischung $s = \sum_{j=0}^{\ell} p_j s_j$, wobei wie immer $p_0, p_1, \dots, p_\ell \ge 0$ und $p_0 + p_1 + \dots + p_\ell = 1$ gilt.

Das vorgegebene Spiel $u : S \times S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (s_i, s_j) \mapsto (v(s_i, s_j), v(s_j, s_i))$ beschreibt die Interaktion zweier Individuen vom Genotyp s_i und s_j.

Die Spielersymmetrie bedeutet, dass keiner als „erster“ oder „zweiter“ Spieler ausgezeichnet wird. Die Paarungen werden zufällig ausgelost gemäß der in der Population $s = \sum_{j=0}^{\ell} p_j s_j$ vorliegenden Häufigkeiten.

Bezüglich der aktuellen Population $s \in \bar{S}$ hat jede reine Strategie $s_i \in S$ die Fitness $f(s_i) = v(s_i, s) = \sum_{j=0}^{\ell} p_j v(s_i, s_j)$, denn s_i spielt gegen s.

Die durchschnittliche Fitness in der Population s ist daher

$$f(s) = v(s, s) = \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{\ell} p_i p_j v(s_i, s_j).$$

Evolutionär stabile Strategien

Die Mutation $\tilde{s}$ tritt mit einer kleinen Wkt $\varepsilon > 0$ auf. Dies verschiebt die bisherige Population s zur veränderten Mischung $s' = (1 - \varepsilon)s + \varepsilon\tilde{s}$.

Bezüglich dieser neuen Gesamtpopulation s' vergleichen wir die durchschnittliche Fitness der alten Population s mit der Mutation $\tilde{s}$:

$$f(s) = v(s, s') = (1 - \varepsilon)v(s, s) + \varepsilon v(s, \tilde{s})$$
$$f(\tilde{s}) = v(\tilde{s}, s') = (1 - \varepsilon)v(\tilde{s}, s) + \varepsilon v(\tilde{s}, \tilde{s})$$

🙂 Entscheidend ist diese vereinfachende Annahme unseres Modells: Die Paarungen werden zufällig ausgelost gemäß der in der Population s' vorliegenden Häufigkeiten. Keiner kann sich sein Gegenüber aussuchen. Das ist realistisch, wenn die Individuen (nahezu) ununterscheidbar sind.

Wir nutzen dann die Linearität von v im zweiten Parameter s'. Der Vergleich führt zu den oben genannten Ungleichungen.

⚠ Die Analyse ist komplizierter und verläuft anders, wenn sich die Teilpopulationen nicht zufällig mischen, sondern meiden oder suchen.

Evolutionär stabile Strategien

Spieltheorie wird auch in der theoretischen Biologie angewendet, insbesondere der Evolutionstheorie. Hier ist der Hauptmechanismus nicht individuelle Rationalität, sondern die Evolution der Population. Diese wird angetrieben durch Vererbung, Mutation und Selektion.

Hier finden wir besondere Kriterien zur Stabilität von Gleichgewichten.

Evolutionär stabile Strategien (ESS) wurden 1973 eingeführt von John Maynard Smith and George Robert Price: *The logic of animal conflict*, Nature 246 (1973). Seither gehören sie zu den Standardwerkzeugen der Spieltheorie, insbesondere in ihren Anwendungen auf evolutionäre Modelle der theoretischen Biologie.

Evolutionär stabile Strategien

Dieses Konzept kann zahlreiche biologische Phänomene beschreiben und evolutionär erklären: Es liefert rationale Erklärungen für empirische Beobachtungen, die sonst kaum zugänglich wären.

Die mathematische Formulierung dieses Konzepts und das Verständnis seiner zahlreichen Anwendungen war ein Meilenstein der theoretischen Biologie und wurde vielfach mit Preisen ausgezeichnet.

Evolutionär stabile Strategien

Aufgabe: Manche Autoren definieren stabile Gleichgewichte $s \in \bar{S}$ durch leicht abweichende Bedingungen, etwa eines der folgenden:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & v(s,s) > v(\tilde{s},s) \quad \text{oder} \quad \big[v(s,s) = v(\tilde{s},s) \quad \text{und} \quad v(s,\tilde{s}) > v(\tilde{s},\tilde{s})\big] \\
(2) & v(s,s) \ge v(\tilde{s},s) \quad \text{und} \quad v(\tilde{s},s) > v(\tilde{s},\tilde{s}) \\
(3) & v(s,s) \ge v(\tilde{s},s) \quad \text{und} \quad v(s,s) > v(\tilde{s},\tilde{s})
\end{array}
$$

für alle Alternativen $\tilde{s} \in \bar{S}$ mit $\tilde{s} \neq s$. Welche Implikationen gelten zwischen diesen drei Definitionen? Welche Beziehungen bestehen zur Bedingung eines starken bzw. schwachen Nash–Gleichgewichts?

Evolutionär stabile Strategien

Aufgabe: Wir nutzen evolutionäre Stabilität für paarweise Interaktion in einem symmetrischen Zwei-Personen-Spiel. Wie sieht die Bedingung für symmetrische Drei-Personen-Spiele aus? und n–Personen-Spiele?

Aufgabe: Sei $u : S \times S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein endliches symmetrisches Spiel.
(1) Sei $\sharp S = 2$. Hat $\bar{u}$ immer ein evolutionär stabiles Gleichgewicht?
(2) Sei $\sharp S = 3$. Hat $\bar{u}$ immer ein evolutionär stabiles Gleichgewicht?

Taube oder Falke?

Gelegentlich kämpfen zwei Individuen einer Population um eine Beute, vom Wert 2. Jedes agiert als Taube (defensiv) oder als Falke (offensiv). Der Ausdruck *hawk or dove* bezeichnet allgemein solches Verhalten.

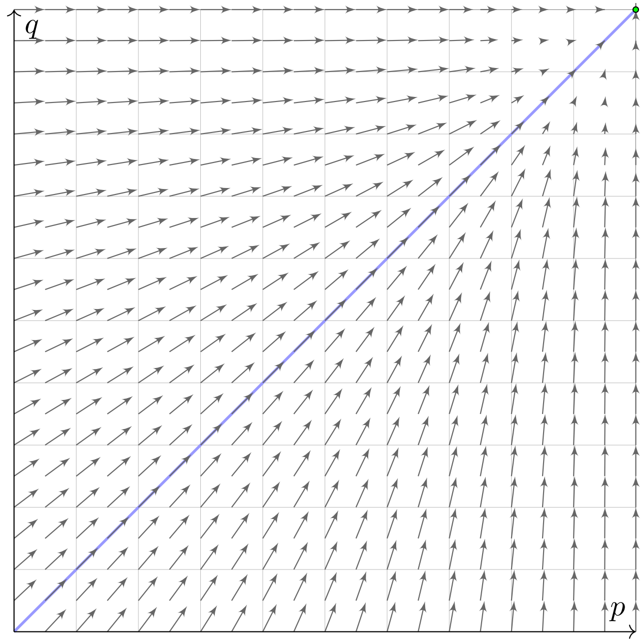
Spielen beide Taube, so teilen sie sich die Beute. Spielt nur einer Falke, so bekommt er die gesamte Beute. Spielen beide Falke, so kämpfen sie, der Wert wird reduziert und geteilt. Das entspricht folgender Normalform:

A \ B	Taube	Falke
Taube	1 / 1	0 / 2
Falke	2 / 0	$1-a$ / $1-a$

Aufgabe: Finden Sie zu $a \in \mathbb{R}$ alle (symmetrischen) Gleichgewichte in gemischten Strategien. Welche davon sind evolutionär stabil?

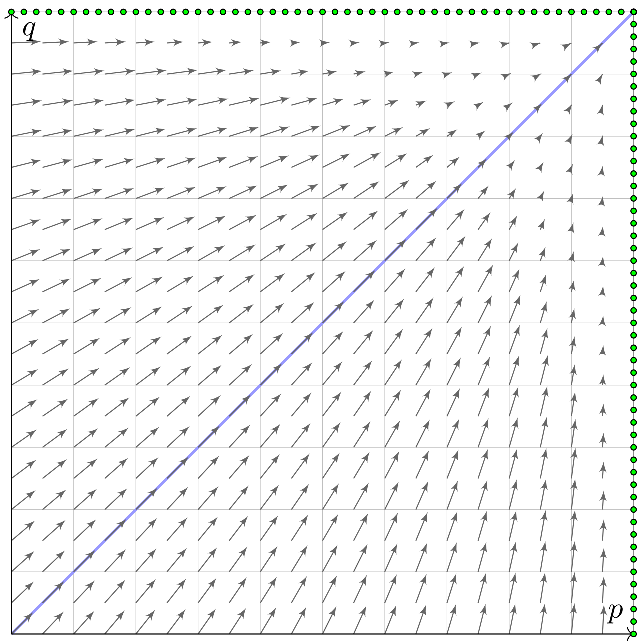
Taube oder Falke?

$a = 1/2$



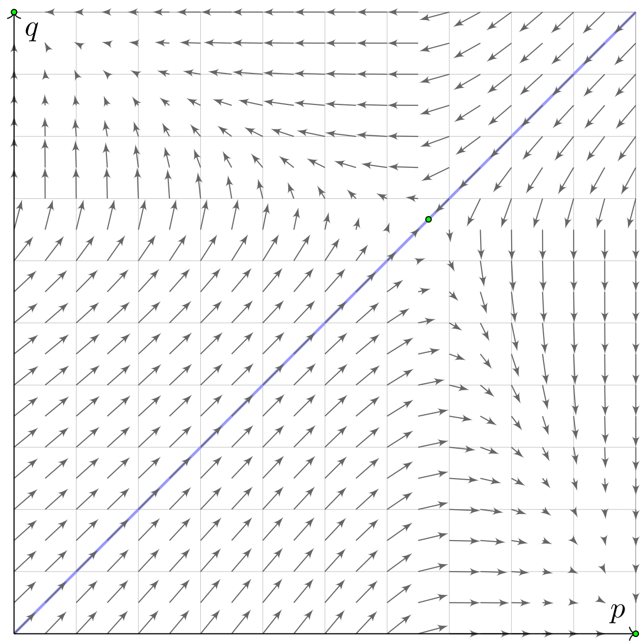
Taube oder Falke?

$a = 1$



Taube oder Falke?

$a = 3/2$



Taube oder Falke?

Lösung: Für $a < 1$ existiert genau ein Gleichgewicht, nämlich $(\text{Falke}, \text{Falke})$, denn die Strategie Taube wird strikt dominiert durch Falke.
Eine Mutation Taube kann sich in dieser reinen Falken–Population nicht durchsetzen, da sie offensichtlich Fitness-Nachteile hat.

Im Sonderfall $a = 1$ gibt es unendlich viele gemischte Gleichgewichte, nämlich (s, Falke) und (Falke, s) für jede Strategie $s \in \bar{S}$.

Für $a > 1$ hat das Spiel die beiden reinen Gleichgewichte $(\text{Taube}, \text{Falke})$ und $(\text{Falke}, \text{Taube})$, beide sind strikt, und zudem noch genau ein gemischtes Gleichgewicht (s, s) wie nachfolgend angegeben.

Für $a \geq 1$ hat das Spiel genau ein symmetrisches Gleichgewicht:

$$s = \tfrac{a-1}{a} \cdot \text{Taube} + \tfrac{1}{a} \cdot \text{Falke}.$$

Die folgende Rechnung bestätigt, dass dies ein Gleichgewicht ist.
Ist diese Strategie evolutionär stabil? Wir wenden die Definition an!

Taube oder Falke?

Wir vergleichen das Gleichgewicht s mit einer alternativen Strategie

$$\tilde{s} = (1-p) \cdot \text{Taube} + p \cdot \text{Falke}.$$

Wir finden durch geduldiges Ausrechnen:

$$\begin{aligned}
&v(\text{Taube}, s) = \tfrac{a-1}{a}, && v(s, \text{Taube}) = \tfrac{a+1}{a}, && v(\text{Taube}, \tilde{s}) = 1-p,\\
&v(\text{Falke}, s) = \tfrac{a-1}{a}, && v(s, \text{Falke}) = \tfrac{1-a}{a}, && v(\text{Falke}, \tilde{s}) = 2-p-ap,\\
&v(\tilde{s}, s) = \tfrac{a-1}{a}, && v(s, \tilde{s}) = \tfrac{a+1-2ap}{a}, && v(\tilde{s}, \tilde{s}) = 1-ap^2.
\end{aligned}$$

Hier gilt $v(s,s) = v(\tilde{s}, s) = (a-1)/a$ und $v(s, \tilde{s}) > v(\tilde{s}, \tilde{s})$ für $p \neq {}^1\!/_a$:

$$v(s, \tilde{s}) - v(\tilde{s}, \tilde{s}) = \tfrac{a+1-2ap}{a} - (1-ap^2) = a(p + \tfrac{1}{a})^2 \geq 0$$

Die Strategie s ist somit evolutionär stabil gegen alle $\tilde{s} \in \bar{S} \setminus \{s\}$.

Eine Population nur aus Falken ist instabil, ebenso nur aus Tauben.
Nur eine Population in der richtigen Mischung $s = \frac{a-1}{a} \cdot \text{Taube} + \frac{1}{a} \cdot \text{Falke}$ ist im Nash–Gleichgewicht. Sie ist sogar evolutionär stabil gegen alle Eindringlinge / Mutanten $\tilde{s} \in \bar{S} \setminus \{s\}$, egal ob rein oder gemischt.

Taube oder Falke?

Ich betone nochmals, dass wir hier nur symmetrische Spiele und symmetrische Strategien betrachten: Die gesamte Population spielt gegen sich selbst, das ist eine besondere Situation. In den Graphiken bedeutet das, wir bewegen uns ausschließlich auf der Diagonalen!
Erlauben wir auch asymmetrische Strategiepaare $(s_1, s_2) \in \bar{S} \times \bar{S}$, so ist das obige Gleichgewicht (s, s) nicht stabil, wie die Graphik zeigt:
Wir betrachten stetig verteilte zufällige Abweichung (s_1, s_2) von (s, s). Fast jede entwickelt sich unter der Dynamik des Nash–Vektorfeldes zu einem der beiden Gleichgewichte $(\text{Taube}, \text{Falke})$ oder $(\text{Falke}, \text{Taube})$.
Die beiden Attraktionsbecken werden durch die Diagonale getrennt.

Ob ein Nash–Gleichgewicht (s, s) evolutionär stabil ist oder nicht, lässt sich am Nash–Vektorfeld oft nur erahnen aber nicht sicher ablesen. Hierzu benötigen wir die Definition und eine sorgfältige Rechnung! Die vorige Aufgabe führt diese Untersuchung exemplarisch aus.

Taube oder Falke?

Einen guten Überblick gibt die Klassifikation aller 2×2–Spiele bis auf schwach monotone Isomorphie. Der Parameter a definiert eine Homotopie von Spielen, wobei wir die Isomorphieklasse wechseln!

Kommt die Strategie Falke in einem evolutionär stabilen Gleichgewicht vor, dann auch die verlustreiche Konfrontation $(\text{Falke}, \text{Falke})$.
Mit **korrelierten Gleichgewichten** lässt sich dies vermeiden!
Hierzu benötigen beide ein einfach zu beobachtendes Signal.
Die **Bourgeois-Strategie** bricht die Symmetrie wie folgt:
Spieler A ist derjenige, der die Beute zuerst besitzt / erjagt / findet.
Spieler B ist derjenige, der als zweites bei der Beute ankommt.
Dann ist die reine Strategie $(\text{Falke}, \text{Taube})$ ein Nash–Gleichgewicht.
Es ist statistisch weniger verlustreich als gemischte Gleichgewichte.
Dies erklärt zugleich das häufig beobachtete **Revierverhalten**.
Ebenso ist $(\text{Taube}, \text{Falke})$ ein Nash–Gleichgewicht, aber unsinnig.
Praktisch hieße das nämlich: Der aktuelle Besitzer gibt bei jedem drohenden Konflikt freiwillig seine Beute auf. Das wäre höchst instabil.

Dynamik von Rock-Paper-Lizards

Wir untersuchen noch einmal das Spiel *Schere-Stein-Papier*, diesmal modifiziert durch die Auszahlung $a \in \mathbb{R}$ bei Gleichstand.

	s_1	s_2	s_3
s_1	a / a	-1 / $+1$	$+1$ / -1
s_2	$+1$ / -1	a / a	-1 / $+1$
s_3	-1 / $+1$	$+1$ / -1	a / a

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & +1 \\ +1 & a & -1 \\ -1 & +1 & a \end{pmatrix}$$

Aufgabe: (1) Finden Sie hier alle (symmetrischen) Gleichgewichte in gemischten Strategien. Welche davon sind evolutionär stabil?

(2) Formulieren Sie die Populationsdynamik $\dot{x} = f(x)$ auf $\Delta^2 \subset \mathbb{R}^3$ (a) gemäß dem Nash–Feld und (b) gemäß der Replikatorgleichung.

Dynamik von Rock-Paper-Lizards

Lösung: (2a) Das Nash–Feld $f : \Delta^2 \to \mathbb{R}^2$ ist

$$f_i(x) = \frac{x_i + [e_i^\intercal A\,x - x^\intercal A\,x]^+}{1 + \sum_{j=0}^{2}[e_j^\intercal A\,x - x^\intercal A\,x]^+} - x_i$$

(2b) Die Repliktorgleichung ist gegeben durch $f : \Delta^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

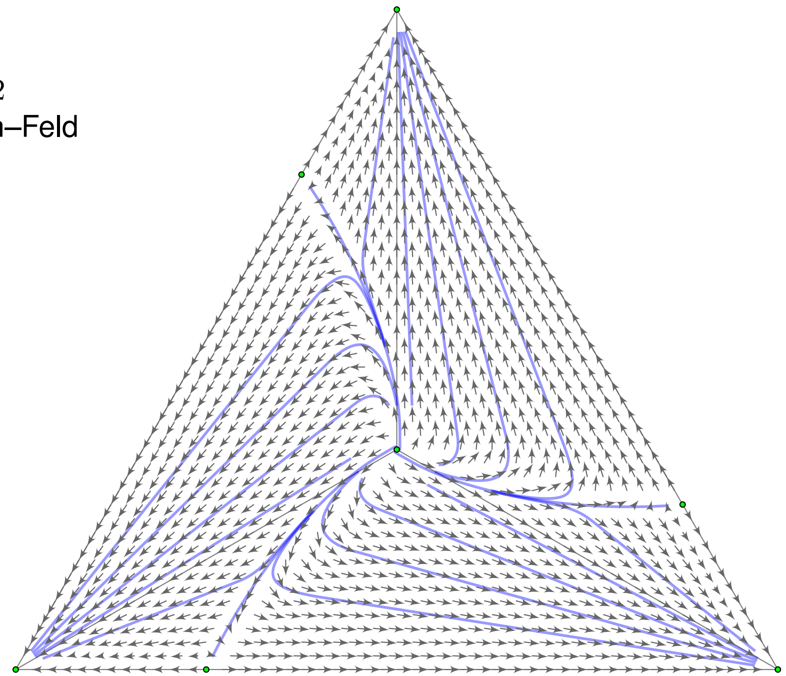
$$f_i(x) = x_i[e_i^\intercal A\,x - x^\intercal A\,x]$$

Die folgenden Skizzen zeigen die Populationsdynamik für verschiedene Parameterwerte $a \in \mathbb{R}$ sowie einige Flusslinien dieser beiden Felder.

Zu jedem Startpunkt $x(t_0)$ garantiert der Satz von Picard–Lindelöf lokale Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $x : \mathbb{R} \supset I \to \Delta^2$. Dies gilt sogar global, für maximale Lösungen $x : \mathbb{R} \to \Delta^2$: Alle Flusslinien verlaufen im Simplex Δ^2, denn das Vektorfeld f zeigt nirgends nach außen.

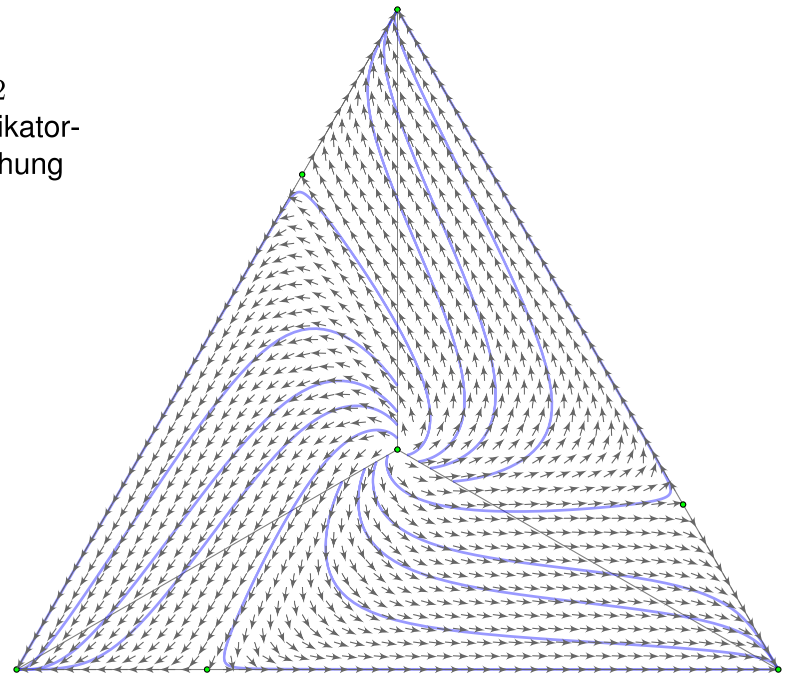
Dynamik von Rock-Paper-Lizards

$a = 2$
Nash–Feld



Dynamik von Rock-Paper-Lizards

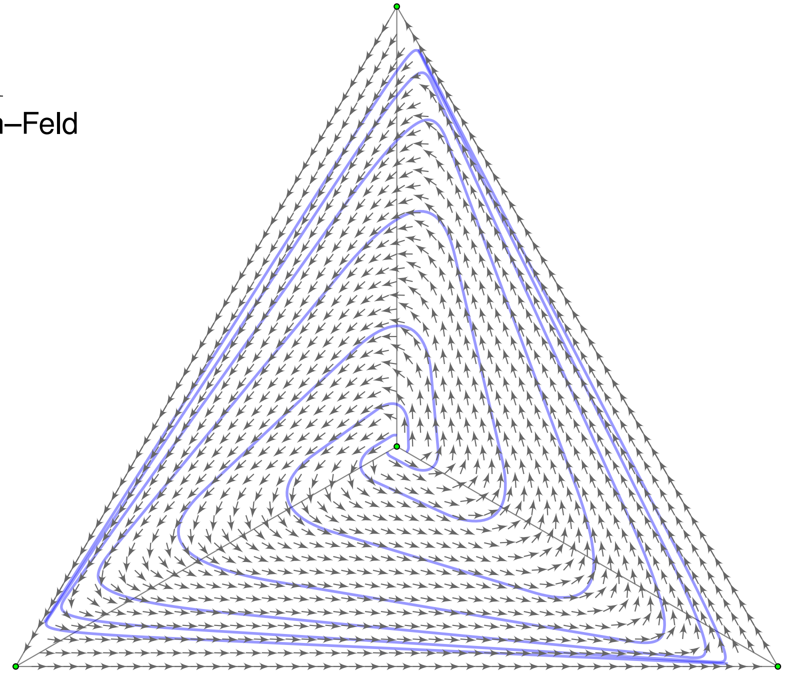
$a = 2$
Replikator-
gleichung



Dynamik von Rock-Paper-Lizards

C349

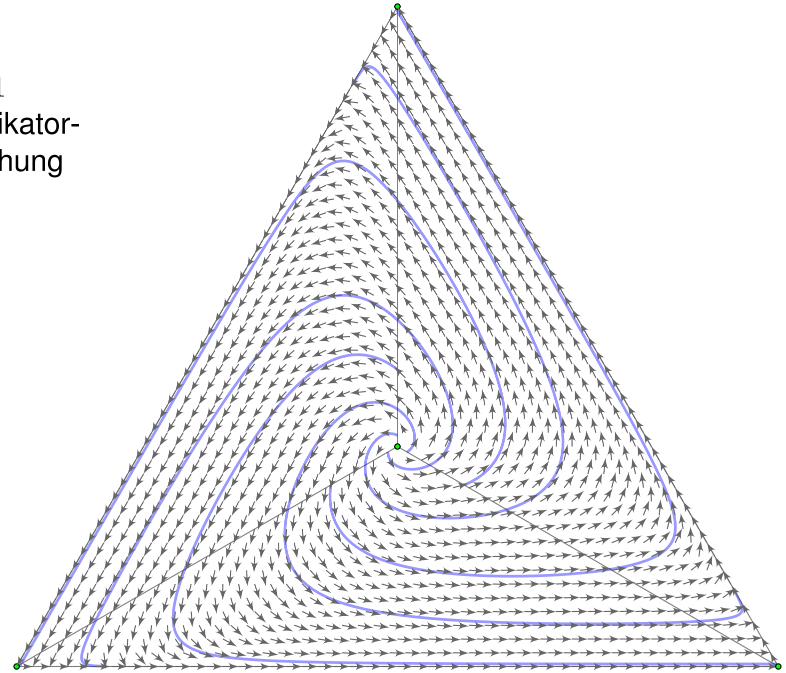
$a = 1$
Nash–Feld



Dynamik von Rock-Paper-Lizards

C350

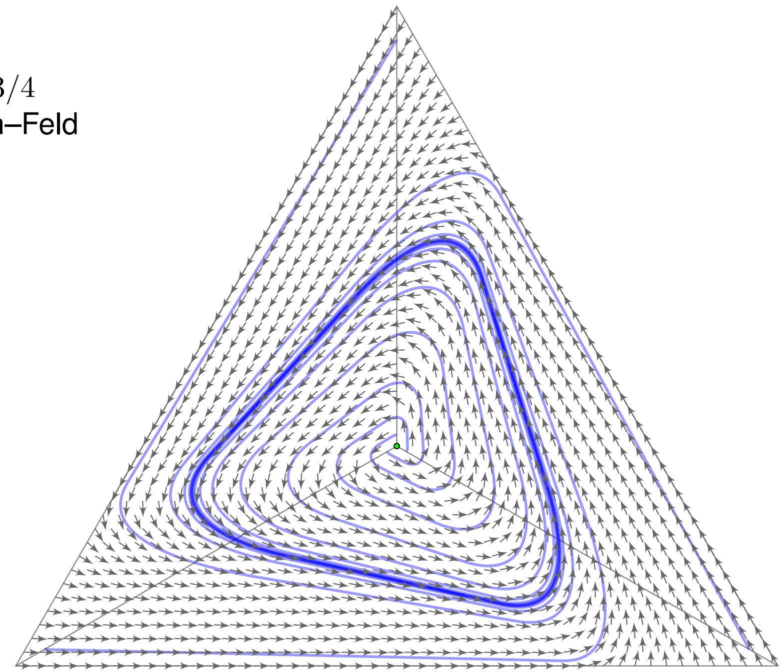
$a = 1$
Replikator-
gleichung



Dynamik von Rock-Paper-Lizards

C351

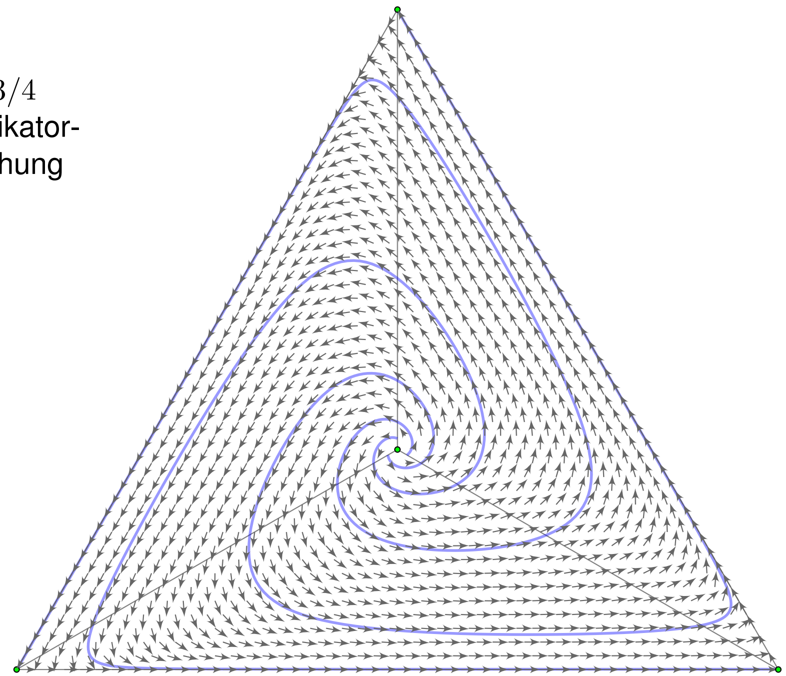
$a = 3/4$
Nash–Feld



Dynamik von Rock-Paper-Lizards

C352

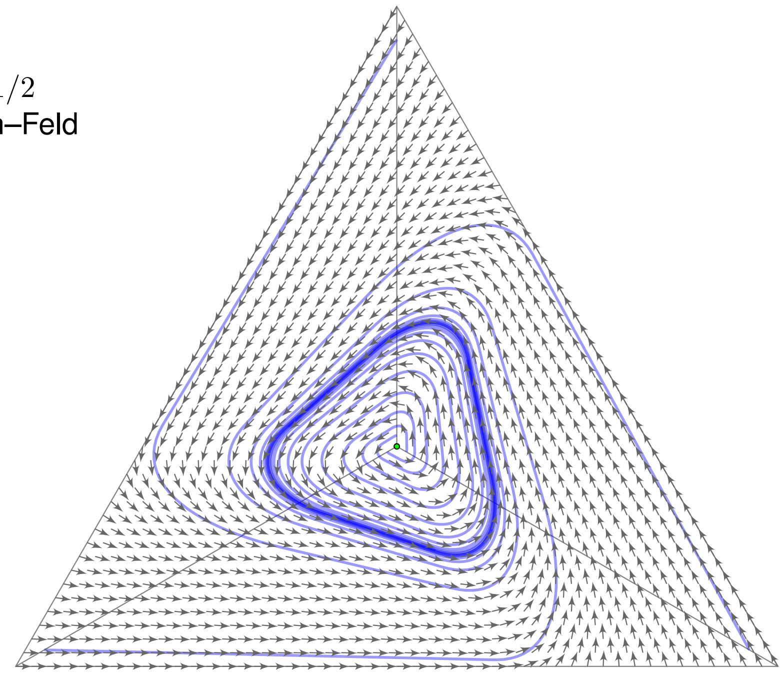
$a = 3/4$
Replikator-
gleichung



Dynamik von Rock-Paper-Lizards

C353

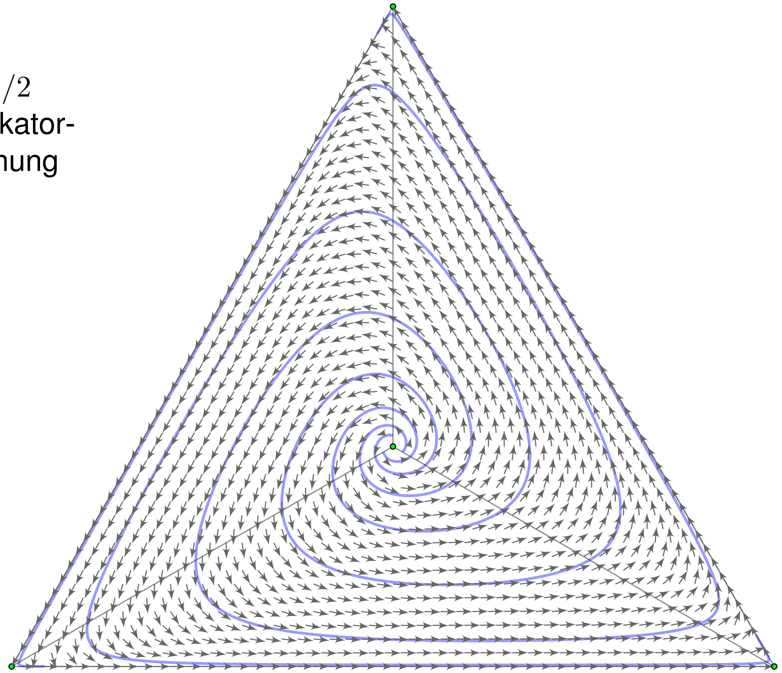
$a = 1/2$
Nash–Feld



Dynamik von Rock-Paper-Lizards

C354

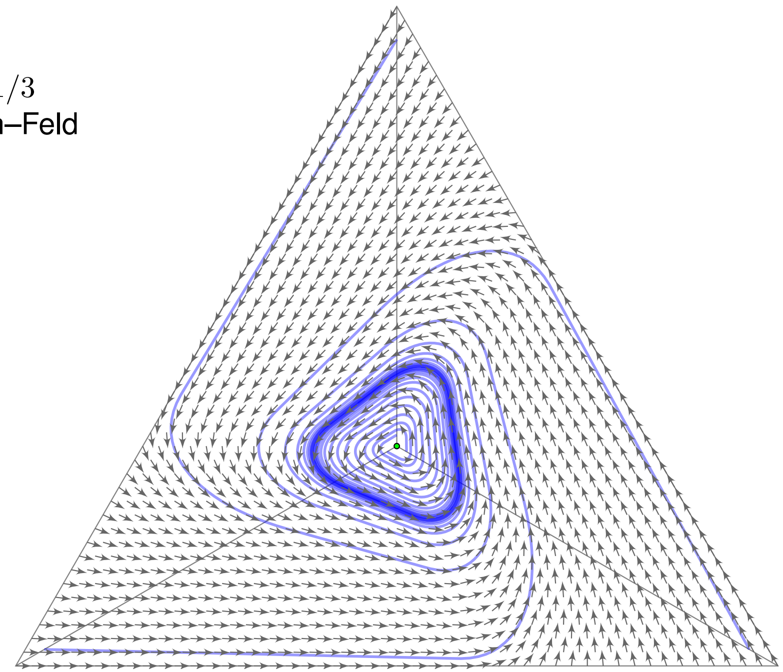
$a = 1/2$
Replikator-
gleichung



Dynamik von Rock-Paper-Lizards

C355

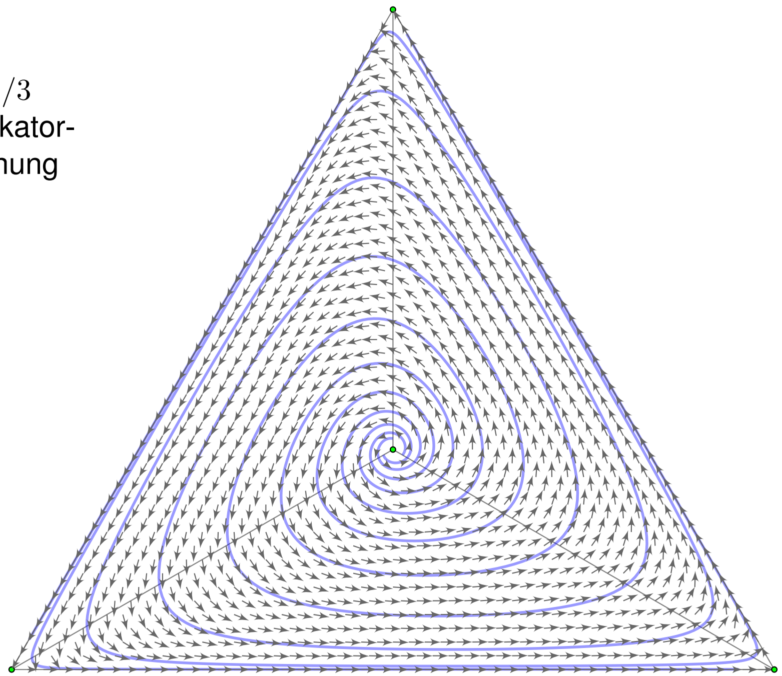
$a = 1/3$
Nash–Feld



Dynamik von Rock-Paper-Lizards

C356

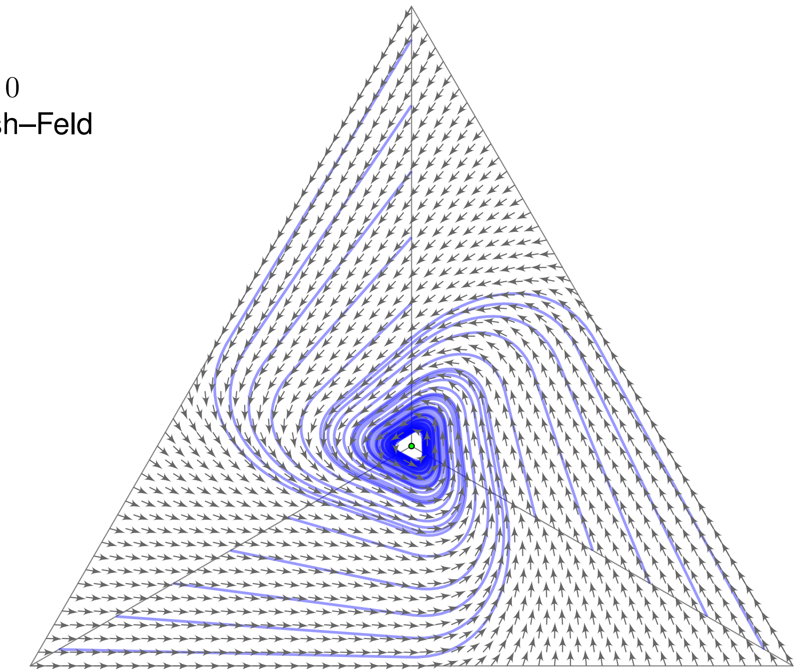
$a = 1/3$
Replikator-
gleichung



Dynamik von Rock-Paper-Lizards

C357

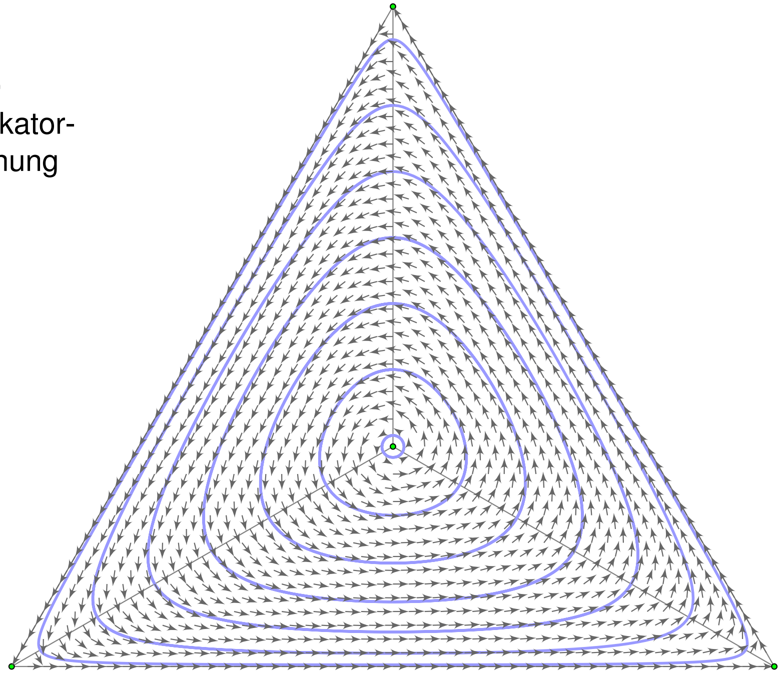
$a = 0$
Nash–Feld



Dynamik von Rock-Paper-Lizards

C358

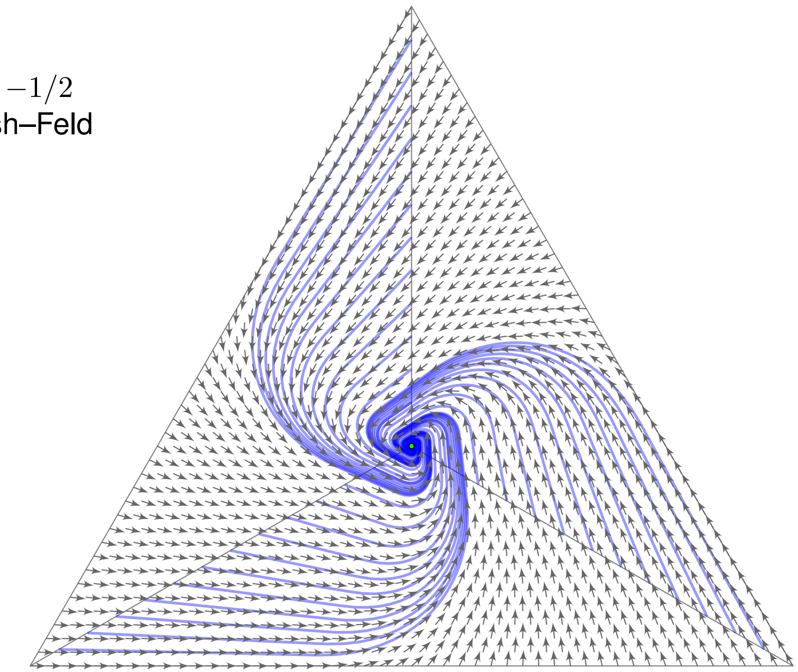
$a = 0$
Replikator-
gleichung



Dynamik von Rock-Paper-Lizards

C359

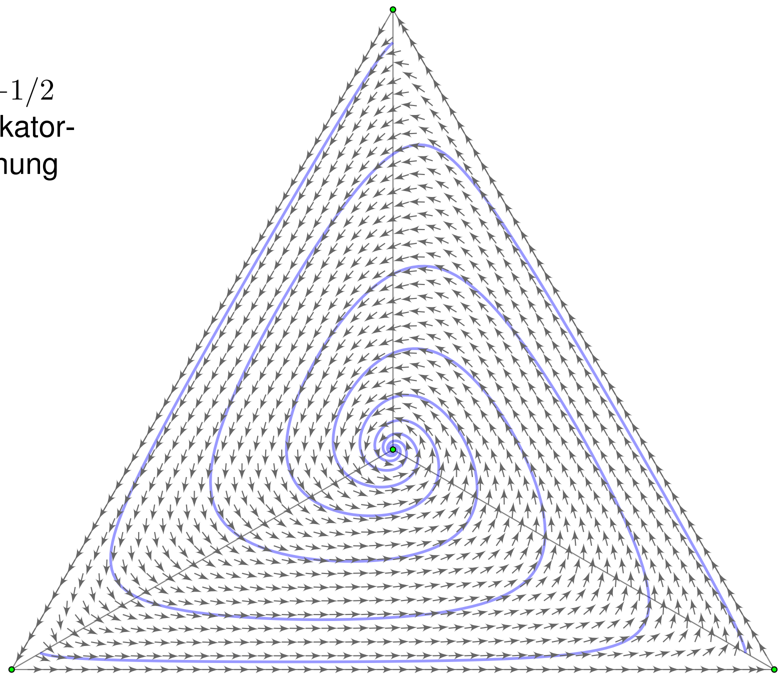
$a = -1/2$
Nash–Feld



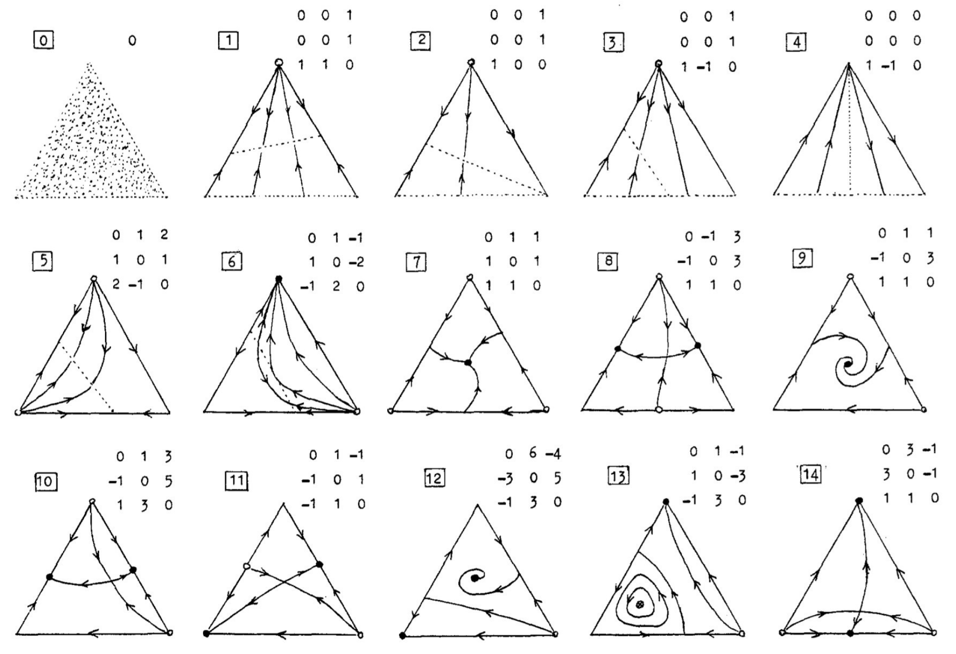
Dynamik von Rock-Paper-Lizards

C360

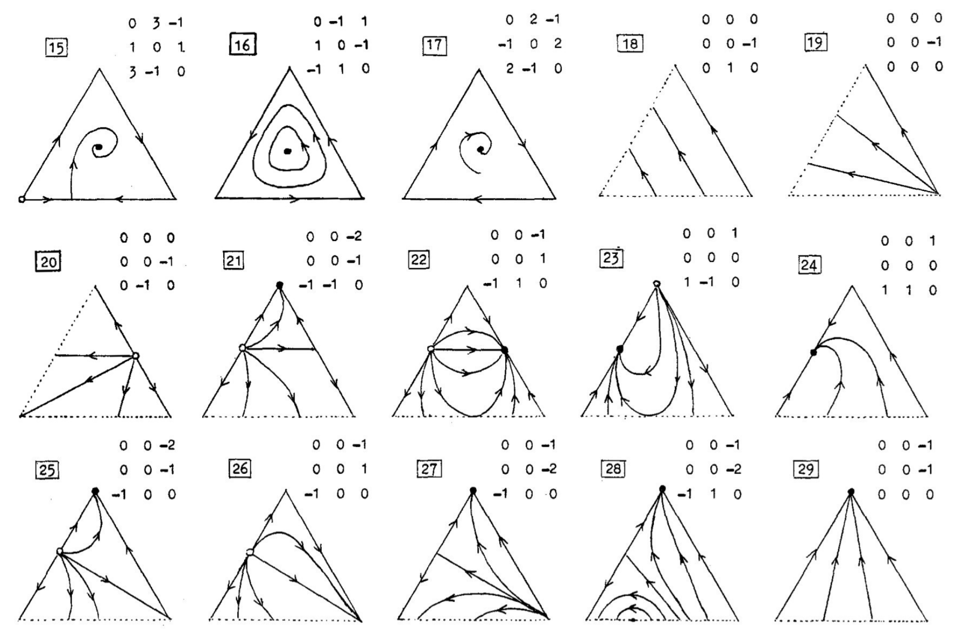
$a = -1/2$
Replikator-
gleichung



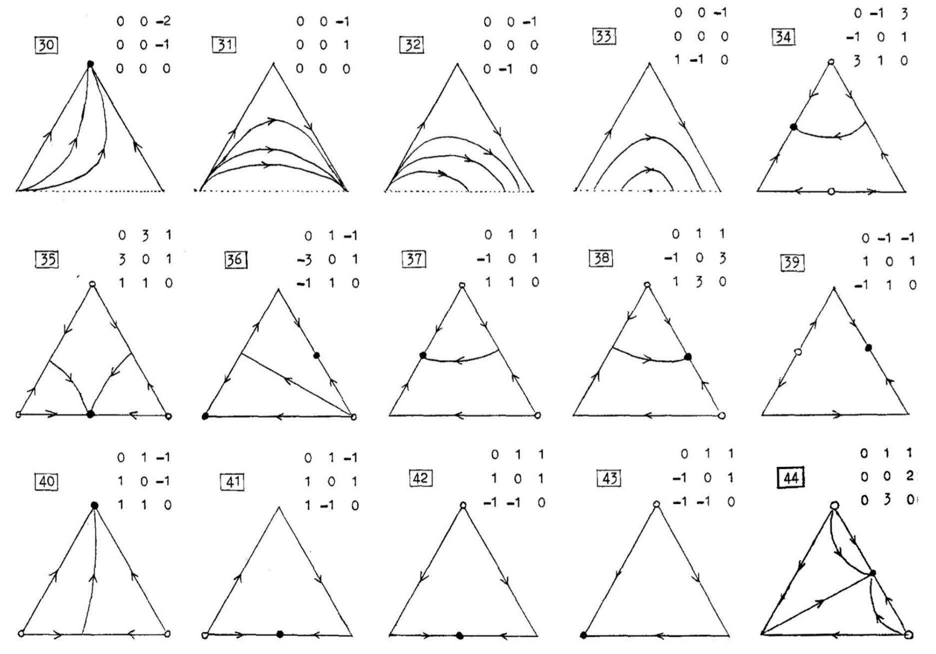
Dynamik der Replikatorgleichung



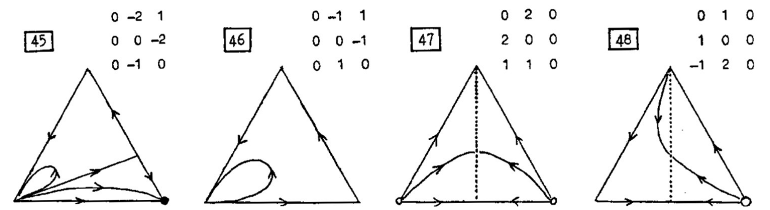
Dynamik der Replikatorgleichung



Dynamik der Replikatorgleichung



Dynamik der Replikatorgleichung

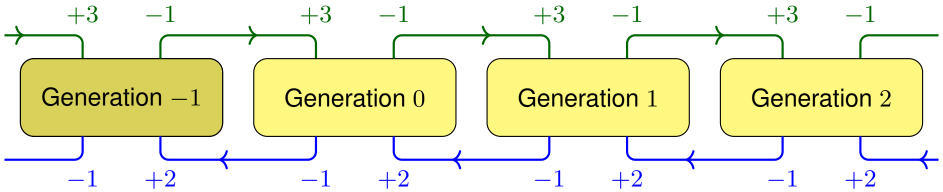


Diese Graphiken zeigen die mögliche Dynamik der Replikatorgleichung nach I.M. Bomze: *Lotka–Volterra equation and replicator dynamics: a two-dimensional classification.* Biological Cybernetics 48 (1983), 201–211, mit Korrekturen und Ergänzungen zu den Fällen 16, 20, 44–48 aus I.M. Bomze: *Lotka–Volterra equation and replicator dynamics: new issues in classification.* Biological Cybernetics 72 (1995), 447–453.

Projekt: Was wird hier klassifiziert? modulo welcher Äquivalenz? Wie ist demnach die Aussage des hier zu formulierenden Satzes? Wie lässt sich das möglichst übersichtlich organisieren und beweisen?

Ein Modell überlappender Generationen

Die Generationen G_i mit $i \in \mathbb{Z}$ interagieren nach folgendem Muster:



Jede Generation G_i erhält zunächst drei Einheiten (Reichtum, Äpfel). Eine gibt sie an ihre Kinder G_{i+1} weiter, diese wird dabei verdreifacht (Brutpflege). Die beiden verbleibenden Einheiten kann G_i entweder konsumieren (Egoismus, $a_i = 0$), oder aber eine Einheit an die Eltern G_{i-1} zurückgeben (Altersversorgung, $a_i = 1$), diese wird verdoppelt.

Jede Generation G_i kennt nur die Aktion $a_{i-1} \in \{0, 1\}$ ihrer Eltern und muss ihre eigene Aktion a_i wählen. Sie hat demnach die vier Strategien

Egoist	$E = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto0\\1\mapsto0\end{smallmatrix}\right]$,	Altruist	$A = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto1\\1\mapsto1\end{smallmatrix}\right]$,
Kontra	$K = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto1\\1\mapsto0\end{smallmatrix}\right]$,	Nachmacher	$N = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto0\\1\mapsto1\end{smallmatrix}\right]$.

Ein Modell überlappender Generationen

Wir untersuchen hier ein besonders einfaches Modell der Interaktion zwischen Generationen, in Form eines **Zwei-Generationen-Vertrags**. Hierzu suchen wir alle stabilen Lösungen, also Nash–Gleichgewichte.

Zur Vereinfachung nehmen wir hier an, jede Generation G_i investiert automatisch in ihre Kinder G_{i+1}. Auch dies könnten wir als strategische Option untersuchen, in einem erweiterten **Drei-Generationen-Vertrag**.

Konrad Adenauer wird hierzu der legendäre Satz zugeschrieben: **„Kinder bekommen die Leute immer.“** Das war aus heutiger Sicht ein Irrtum. Zur Vereinfachung lasse ich diese Option zunächst weg.

Die Werteskalen und konkret angesetzten Zahlen sind willkürlich. Uns geht es vor allem um die Frage, ob und wie Gleichgewichte möglich sind.

Das Ergebnis überrascht dann doch: Jeder Akteur, die Generation G_i, trifft nur eine einzige Entscheidung, nämlich die Zuwendung a_i an ihre Elterngeneration G_{i-1}, **ohne Gegenleistungen** erhoffen zu können.

Ist diese Zuwendung also irrational im Sinne individueller Maximierung? Oder gibt es doch Mechanismen, die sie materiell belohnen könnten? Erstaunlicherweise ist dies tatsächlich der Fall! Das klärt die Aufgabe.

Ein Modell überlappender Generationen

Aufgabe: Formulieren Sie diese Situation als strategisches Spiel, (1) zunächst für endlich viele Generationen, (2) danach unendlich. Finden Sie jeweils alle Gleichgewichtsauszahlungen!

Lösung: Die Spielermenge ist $I = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ bzw. $I = \mathbb{N}$. Für jeden Spieler $i \in I$ ist die Strategiemenge $S_i = \{E, A, K, N\}$.

Der Strategievektor $s \in S$ bestimmt den Aktionsvektor $a : \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$: Wir setzen $a_i = 0$ für $i \in \mathbb{Z} \smallsetminus I$ und rekursiv $a_i = s_i(a_{i-1})$ für $i \in I$. Die Auszahlung $u : S \to \mathbb{R}^I$ ist dann $u_i(s) = 2 - a_i + 2a_{i+1}$.

(1) Der konstante Strategievektor $s = (E, E, \dots, E)$ führt zu den Aktionen $a = (0, 0, \dots, 0)$ also den Auszahlungen $u(s) = (2, 2, \dots, 2)$. Dies ist ein Nash–Gleichgewicht! Es gibt noch weitere… äquivalente.

Jedes Nash–Gleichgewicht $s \in S$ führt genau zu demselben Ergebnis. Rückwärtsinduktion: Wäre $a \neq (0, 0, \dots, 0)$, dann existierte ein Spieler $i \in I$ mit $a_i = 1$ und $a_{i+1} = \dots = a_n = 0$, also könnte i sich aus eigener Kraft verbessern, und somit wäre s kein Gleichgewicht.

🙂 Damit kennen wir alle Gleichgewichtsauszahlungen!

Ein Modell überlappender Generationen

Bei nur **endlich vielen Generationen** ist dies ein Ponzi–Betrug: Dieses Umverteilungssystem muss irgendwann zusammenbrechen!

$\mathscr{R}_1$: Die letzte Generation G_n hat kein Interesse an einer Zuwendung an ihre Elterngeneration G_{n-1}. Im Gegenteil, dies schadet ihr nur. Bei rationalem Verhalten wird die Generation G_n also $a_n = 0$ wählen.

$\mathscr{R}_2$: Die vorletzte Generation G_{n-1} sieht dies kommen, Rationalität zweiter Stufe vorausgesetzt. Daher wird auch sie $a_{n-1} = 0$ wählen.

So geht es weiter: $a_n = 0$ führt zu $a_{n-1} = 0$ bis schließlich $a_0 = 0$. Bei rationaler Spielweise entstehen hier also keinerlei Zuwendungen.

Diese raffinierte Schlussweise heißt auch **Rückwärtsinduktion**. Wir eliminieren hierbei schrittweise alle strikt dominierten Strategien

Zu beachten ist hierbei jedoch, dass die Generation G_i Rationalität der Stufe $n - i + 1$ benötigt. Die frühen Generationen benötigen demnach Rationalität sehr hoher Stufe! Das entspricht genau dem Ponzi–Betrug.

Die Schlussweise gilt nicht mehr im Falle unendlich vieler Generationen. Tatsächlich finden wir im unendlichen Falle völlig neue Gleichgewichte.

Ein Modell überlappender Generationen

(2) Zu $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ betrachten wir folgenden Strategievektor $s^n \in S$:

$$\begin{array}{rcccccccccccc} i = & & 0, & 1, & \dots, & & n, & \dots \\ s^n = (& E, & E, & \dots, & E, & E, & A, & N, & N, & N, & \dots &) \\ a^n = (& 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & 1, & 1, & 1, & 1, & \dots &) \\ u(s^n) = (& 2, & 2, & \dots, & 2, & 4, & 3, & 3, & 3, & 3, & \dots &) \end{array}$$

Ausgeschrieben gilt $s_i^n = E$ für $i < n$ und $s_n^n = A$ und $s_i^n = N$ für $i > n$. Dies führt zu $a_i^n = 0$ für $i < n$ und $a_i^n = 1$ für $i \ge n$, also $u(s^n)$ wie oben.

Ist s^n ein Nash–Gleichgewicht? Kann sich ein Spieler $i \in \mathbb{N}$ verbessern? Nicht für $i < n$. Auch nicht für $i \ge n$. (Warum? Formulieren Sie es aus!)

☺ Also ist der Strategievektor s^n tatsächlich ein Nash–Gleichgewicht!

Sei $s \in S$ ein beliebiges Nash–Gleichgewicht mit Aktionen $a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und Auszahlungen $u(s) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Gälte $a_i = 1$ und $a_{i+1} = 0$, so könnte i sich aus eigener Kraft verbessern. Also gilt $a = a^n$ für ein $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

☺ Anders gesagt, a kann steigen oder bleiben, aber nicht fallen.

☺ Damit kennen wir alle Gleichgewichtsauszahlungen!

Ein Modell überlappender Generationen

Rückwärtsinduktion gilt nicht im Falle unendlich vieler Generationen: Es gibt keine letzte Generation, mit der die Induktion beginnen könnte. Tatsächlich finden wir im unendlichen Falle völlig neue Gleichgewichte.

Zunächst einmal sollte ich betonen, dass dieses Modell auf raffinierte Weise zwischen **Genotyp** $s_i \in \{E, A, K, N\}$ und **Phänotyp** $a_i \in \{0,1\}$ unterscheidet: Ersteres sind die individuellen Strategien, zweiteres sind die ausgespielten Aktionen, abhängig von der **Vorgeschichte**. Wie in der Biologie entsteht der Phänotyp aus Genotyp und Umweltfaktoren.

Die Generation G_0 hat nur zwei phänotypisch verschiedene Wahlen: $E \equiv N$ oder $A \equiv K$. Jede Generation G_i für $i \ge 1$ hat vier Strategien.

Jede Generation G_i trifft eine einzige Entscheidung, die Zuwendung a_i an ihre Elterngeneration G_{i-1}. Die Elterngeneration G_{i-1} hat keinerlei Rückwirkung auf G_i, also kein echtes Druckmittel (allenfalls moralische Appelle oder leere Drohungen, die wir in unserem Modell ignorieren).

Allein die Kindergeneration G_{i+1} hat ein mögliches Druckmittel auf G_i. Bemerkenswerterweise genügt bereits dieser schwächere Mechanismus, wie oben nachgerechnet, zur Erhaltung von Gleichgewichten.

Ein Modell überlappender Generationen

Damit dieses filigrane Gleichgewicht bestehen kann, muss es unendlich viele Generationen geben. Der endliche Fall verläuft völlig konträr!

Genauer: Es muss potentiell unendlich viele Generationen geben, denn keine Generation darf ernsthaft glauben, die letzte zu sein. Die Maxime „Nach mir die Sintflut!“ führt zu Rücksichtslosigkeit.

Etwas realistischer ist daher folgendes Modell: Jede Generation G_i geht davon aus, dass die Zivilisation mit einer kleinen Wkt $\varepsilon_i \in [0, {}^1\!/\!{}_2[$ endet: Weltuntergang, oder die Generation G_{i+1} spielt einfach nicht mehr mit.

Die Generation G_i vergleicht ihre Aktion $a_i = 0$ und Auszahlung $u_i = 2$ mit ihrer Alterntive $a_i = 1$ und Auszahlung $u_i = 1 + 2(1 - \varepsilon_i) > 2$. Der Vergleich fällt weiterhin zugunsten der Aktion $a_i = 1$ aus.

Beispiel: Bei Weltuntergangswkt von $\varepsilon = 1/3$ erwarten wir nur drei Generationen. Dennoch lohnt immer noch der Generationenvertrag!

Fazit: Jede Generation muss ausreichend sicher an den Fortbestand weiterer Generationen glauben und so auf die Fortsetzung des Systems vertrauen. Dann und nur dann sind nicht-triviale Gleichgewichte möglich.

Ein Modell überlappender Generationen

Aufgabe: Zur Vereinfachung haben wir nur die Auszahlungen bestimmt. Nennen Sie alle Gleichgewichte, die diese Auszahlungen realisieren, also alle Strategievektoren $s \in S$ im Nash–Gleichgewicht.

Aufgabe: Untersuchen Sie folgende Variante: Jede Generation G_i kennt die Aktionen ihrer Eltern G_{i-1} und zudem die ihrer Großeltern G_{i-2}. Es gibt demnach sechzehn mögliche Strategien, darunter insbesondere

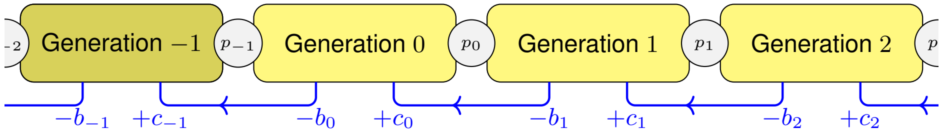
$$\text{Egoist} \quad E = \begin{bmatrix} 00 \mapsto 0, & 01 \mapsto 0 \\ 10 \mapsto 0, & 11 \mapsto 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Altruist} \quad A = \begin{bmatrix} 00 \mapsto 1, & 01 \mapsto 1 \\ 10 \mapsto 1, & 11 \mapsto 1 \end{bmatrix}.$$

Finden Sie alle Gleichgewichtsauszahlungen wie in obigem Basismodell.

Aufgabe: Untersuchen Sie folgende Variante: Jede Generation G_i bekommt 3 Einheiten. Sie kann alle behalten und keine Nachkommen zeugen, oder eine Einheit in die Brutpflege investieren. Zudem kann G_i eine Einheit an die Eltern G_{i-1} abgeben (verdreifacht). Demnach gibt es hier sechzehn Strategien, geschrieben $\left[\begin{smallmatrix} 0 \mapsto 00 \\ 1 \mapsto 00 \end{smallmatrix}\right], \dots, \left[\begin{smallmatrix} 0 \mapsto 11 \\ 1 \mapsto 11 \end{smallmatrix}\right]$.

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell

Zusammenfassung und Verallgemeinerung des Generationenmodells:



Satz C4A (Nash–Gleichgewichte im Generationenmodell)

Die Generationen $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ interagieren wie gezeigt, mit Kosten $b_i \in \mathbb{R}_{>0}$ und Nutzen $c_i \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie den Fortsetzungswkten $p_i \in [0,1]$ für $i \in \mathbb{N}$.

(1) Ist $s \in \prod_{i\in\mathbb{N}} S_i$ ein Nash–Gleichgewicht, so ist der Aktionsvektor $a = a(s) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ wachsend, also $a = a^n := \mathbf{I}_{\mathbb{N}_{\ge n}}$ für ein $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

(2) Gilt $p_m c_m < b_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so ist $a_m = 0$ strikt dominant für G_m, per Rückwärtsinduktion folgt $a_i = 0$ für alle $i = 0, 1, \dots, m$, also $n > m$.

(3) Gilt $p_i c_i > b_i$ für alle $i \ge m$, so lässt sich jeder Aktionsvektor $a = a^n$ mit $n \ge m$ realisieren durch ein Nash–Gleichgewicht $s \in \prod_{i\in\mathbb{N}} S_i$.

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell

Die graphische Darstellung unseres Modells bedeutet folgendes:

Jede Generation G_i wählt ihre Aktion $a_i \in \{0,1\}$: Sie kann ihre Eltern vernachlässigen ($a_i = 0$) oder versorgen ($a_i = 1$). Letzteres kostet b_i, aber nutzt den Eltern c_{i-1}. Mit Wkt $p_i \in [0,1]$ geht alles weiter.

Jede Generation G_i kennt nur die Aktion $a_{i-1} \in \{0,1\}$ ihrer Eltern. Sie hat demnach die Strategiemenge $S_i = \{E, A, K, N\}$ mit

Egoist	$E = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 0\\ 1\mapsto 0\end{smallmatrix}\right]$,	Altruist	$A = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 1\\ 1\mapsto 1\end{smallmatrix}\right]$,
Kontra	$K = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 1\\ 1\mapsto 0\end{smallmatrix}\right]$,	Nachmacher	$N = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 0\\ 1\mapsto 1\end{smallmatrix}\right]$.

Der Strategievektor $s \in S$ bestimmt den Aktionsvektor $a : \mathbb{Z} \to \{0,1\}$: Wir setzen $a_i = 0$ für $i \in \mathbb{Z}_{<0}$ und rekursiv $a_i = s_i(a_{i-1})$ für $i \in \mathbb{N}$.

Die Auszahlung $u : S \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist dann $u_i(s) = -b_i a_i + p_i c_i a_{i+1}$. Hier wird der Nutzen c_i diskontiert durch die Wkt p_i.

Das oben ausgeführte konkrete Basismodell entspricht der Wahl der Modellparameter $b_i = 1$ und $c_i = 2$ sowie $p_i = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell

Der endliche und unendliche Fall werden wunderbar zusammengefasst, verallgemeinert und interpoliert durch die Abbruchwkten $1 - p_i \in [0,1]$. Der Fall $p_n = 0$ entspricht sicherem Abbruch, also dem endlichen Fall.

Diese Erweiterung unseres Generationenmodells ist mathematisch gesehen nicht nur eine Verallgemeinerung, sondern vor allem eine Vereinfachung! Das erweiterte Modell ist zudem wesentlich realistischer.

Die Wkten haben hier keine Erinnerung, somit ist für jede Generation G_i der Vergleich sehr einfach: Den Kosten b_i gegenüber steht die erwartete Altersversorgung $p_i c_i$, also c_i diskontiert durch die Wkt p_i.

Im Falle $p_i c_i < b_i$ ist für G_i nur das egoistische Verhalten stabil / rational. Im Falle $p_i c_i > b_i$ *kann* das altruistische Verhalten für G_i rational sein, *wenn* G_{i+1} und alle nachfolgenden Generationen dies belohnen.

Aufgabe: (1) Beweisen Sie die Aussagen des Satzes.
(2) Nennen Sie alle Nash–Gleichgewichte $s \in S$.
(3) Was passiert im allgemeinen Fall $p_i c_i \ge b_i$?

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell

Die Altersversorgung ähnelt oberflächlich einem **Ponzi–Betrug**, führt aber tatsächlich zu einem nicht-trivialen Nash–Gleichgewicht. Das Modell erklärt nicht, was eine **gerechte Altersversorgung** ist. Es zeigt jedoch, dass eine Altersversorgung der Eltern nicht altruistisch begründet sein muss, sondern durchaus egoistisch vorteilhaft sein kann.

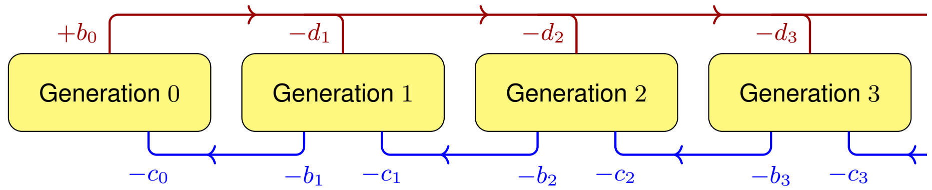
Es gibt Menschen, die diesem System **misstrauen**, es ablehnen und seine Wirksamkeit abstreiten. In unserem Modell ist die von ihnen zugrundegelegte Wkt Null oder zu klein, um ein Nash–Gleichgewicht tragen zu können. Auch dieses Misstrauen ist also im Modell abbildbar.

Unser Modell ist ein einfaches Beispiel von **Mechanismen-Design** (engl. *mechanism design*). Das Ziel ist die Schaffung eines Rahmens (als Spiel, Anreiz, Gesetz, etc.), der gewünschtes Verhalten ermöglicht, fördert oder gar erzwingt. Die inviduelle Entscheidungsfreiheit kann / soll / darf dabei nicht direkt eingeschränkt werden, allein der Rahmen wird so gestaltet, dass rationale Spieler das gewünschte Verhalten wählen.

Die Spieltheorie ist daher logische Grundlage für jeden **Gesetzgeber**, oder allgemein für jede Gestaltung von Regeln des Zusammenlebens.

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Heute, der 2. Mai, ist Deutschlands Weltüberlastungstag 2018.



Nach uns die Sintflut!
Wo kein Kläger, da kein Richter!

Wir haben die Erde nicht von unseren Eltern geerbt,
sondern von unseren Kindern nur geliehen.

Gesetz zur Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen (GzG):

§0: Jede Generation muss nach ihrem bestem Wissen und Gewissen die berechtigten Interessen aller zukünftigen Generationen wahren.

§1: Jede Generation muss §0 von ihren Eltern einfordern.

§2: Jede Generation muss §1 von ihren Eltern einfordern.

§3: Jede Generation muss §2 von ihren Eltern einfordern.

usw… Jede Generation muss diese Prinzipien strengstens einhalten, Forderungen unverzüglich einklagen und jede Säumnis bestrafen.

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

„Nach uns die Sintflut!“ Was tun, wenn eine Generation durchdreht? Kommt sie immer straflos davon? „Wo kein Kläger, da kein Richter!“ Oder können wir **intergenerationelle Schutzmechanismen** entwickeln für den Erhalt der Umwelt und die Rechte zukünftiger Generationen?

Wir haben die Erde nicht von unseren Eltern geerbt,
sondern von unseren Kindern nur geliehen.

Der Autor dieses Sinnspruchs ist unklar. Eine frühe Verwendung geht zurück auf Moses Henry Cass, 1974 Autraliens Umweltminister:

We have not inherited this earth from our parents to do with it what we will.
We have borrowed it from our children and we must be careful
to use it in their interests as well as our own.

Die **Generationengerechtigkeit** leidet an ihrer inhärenten Asymmetrie: Zukünftige Generationen können ihre Interessen aktuell nicht vertreten. Gewaltenteilung beruht prinzipiell auf **Checks and Balances**, und diese erfordern gleichzeitige Existenz, Kommunikation und Einflussnahme.

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Wir, die aktuelle Generation G_0, sind jetzt verantwortlich für diese Welt. Wenn unser Handeln sich in Generation G_n niederschlägt, kann sie sich nicht wehren: Wir sind lange tot, alle Appelle und Anklagen sind nutzlos. Heute sind wir zwar noch lebendig und belangbar, doch Generation G_n lebt noch nicht und kann uns daher nicht zur Verantwortung ziehen.

Nur Sie, die direkt nachfolgende Generation G_1, könnten uns belangen. Sie stehen also vor Ihrer Entscheidung: schweigen oder anklagen? Sie können unser Verschulden nicht mehr heilen, nur noch ertragen. Die Anklage kostet Sie Ressourcen: Zeit, Energie, Mühe, Überwindung. Rational würden Sie also die Situation zähneknirschend akzeptieren. Sie werden sich beruhigend einreden, es sei noch nicht so schlimm. Wir, G_0, kommen straflos davon. „Wo kein Kläger, da kein Richter.“

Was werden später Ihre Kinder, die Generation G_2 tun? Sie können uns, die Großeltern G_0 und eigentlichen Verursacher, nicht mehr belangen. Generation G_2 kann nur Sie, die eigene Elterngeneration G_1, anklagen. Werden Ihre Kinder das tun? Vermutlich nicht. Sie werden schweigen, so wie Sie geschwiegen haben. So geht es Generation um Generation.

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Ist diese Entwicklung unausweichlich? Oder gibt es Alternativen?

Nachhaltigkeit bedeutet die Nutzung und Bewahrung von Ressourcen; sie garantiert die Stabilität und die natürliche Regenerationsfähigkeit. Derzeit verbraucht Deutschland das Dreifache der Reproduktion: Heute, 2. Mai, haben wir die nachwachsenden Ressourcen für 2018 verbraucht.

Die **Ethnologie** untersucht hierzu traditionell-nachhaltiges Wirtschaften in indigenen Kulturen. Ein typisches Muster: Stabile Systeme verfügen über stabilisierende Mechanismen durch ethisch-moralische Prinzipien. Diese sind meist nicht rational, sondern animistisch-religiös begründet durch Mythen, Rituale, Tabus, etc. Das erschwert die Übertragung auf unsere aktuelle Gesellschaft. Ist hier Rationalität überhaupt möglich?

Hierzu untersuchen wir die Situation spieltheoretisch. Das obige Modell ist wie immer beschämend simpel, aber es illustriert doch das Prinzip.

Selbstverständlich können Fehlentscheidungen nicht gänzlich verhindert werden. Aber wir suchen ein ausgewogenes System von *Checks and Balances*, das **erkennbare Fehlentscheidungen** angreifbar macht: Sie können angeklagt werden, ja sie müssen angeklagt werden!

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Akteure sind die Generationen G_i für $i \in \mathbb{N}$. Die Generation G_0 wählt ihre Aktion / Strategie $a_0 \in A_0 = \{0 = \text{Nachhaltigkeit}, 1 = \text{Raubbau}\}$.
Jede Generation G_i mit $i \geq 1$ kennt die gesamte Vorgeschichte und folgert daraus ihre Aktion $a_i \in A_i = \{0 = \text{schweigen}, 1 = \text{anklagen}\}$.

Aufgabe: (0) Formulieren Sie dies als Spiel $u : \prod_{i\in\mathbb{N}} S_i \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
(1) Ist Raubbau $(b_0, -d_1, -d_2, \dots)$ eine Gleichgewichtsauszahlung?
(2) Ist Nachhaltigkeit $(0, 0, 0, \dots)$ eine Gleichgewichtsauszahlung?
(3) Wenn sich $G_0, \dots, G_n$ gegen alle nachfolgenden verbünden?

Lösung: (0) Hier gilt $u_0 = b_0 a_0 - c_0 a_1$ und $u_i = -b_i a_i - c_i a_{i+1} - d_i a_0$.
Dies entnehmen wir der Graphik mit den Konstanten $b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}_{>0}$.
Generation G_i hat die Strategiemenge $S_i = \{s_i : \{0,1\}^i \to \{0,1\}\}$.
Beispiel: Die konstante Abbildung 0 bedeutet „immer schweigen“.
(1) Der Strategievektor $s = (1, 0, 0, 0, \dots)$ führt zu den Aktionen $a = (1, 0, 0, 0, \dots)$ und den Auszahlungen $(b_0, -d_1, -d_2, -d_3, \dots)$.
Dieser Strategievektor s ist tatsächlich ein Nash–Gleichgewicht.
Keiner der Akteur G_i kann sich aus eigener Kraft verbessern.

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Für die Modellparameter setzen wir $0 < b_i < c_i$ voraus für alle $i \in \mathbb{N}$.
Der angerichtete Schaden $d_i > 0$ spielt im Folgenden keine Rolle.

(2) Jede Generation G_i prüft §0–§∞ GzG, bis §$(i-1)$ genügt: Hat ihre Elterngeneration G_{i-1} die Rechte zukünftiger Generationen gewahrt?
Falls ja, so schweigt sie: $a_i = 0$. Falls nein, so klagt sie an: $a_i = 1$.
Formel $s_i : \{0,1\}^i \to \{0,1\} : (a_0, \dots, a_{i-1}) \mapsto a_0 + \dots + a_{i-1} \bmod 2$.
Diese Strategie $s = (0 = s_0, s_1, s_2, s_3, \dots)$ führt zu den Aktionen $a = (0, 0, 0, 0, \dots)$ und den Auszahlungen $(0, 0, 0, 0, \dots)$.
Dieser Strategievektor s ist tatsächlich ein Nash–Gleichgewicht.

(3) Das gilt selbst, wenn sich $G_0, G_1, \dots, G_n$ verbünden.
Rückwärtsinduktion: Schließlich wird G_n einlenken.
Daher lenken auch $G_{n-1}, G_{n-2}, \dots, G_0$ ein.
Wir haben hier sehr starke Voraussetzungen, insbesondere Kenntnis der gesamten Vergangenheit und so umfangreiche Strategiemöglichkeiten.
Wir erhalten dafür sogar ein teilspielperfektes Gleichgewicht!

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Dieses raffinierte System an **Checks and Balances** ist bemerkenswert!
Wie kann das funktionieren? Wird Information von der Zukunft in die Gegenwart übertragen? Nein, natürlich nicht! Aber die gegenwärtige Information wird übergreifender bewertet und besser vertreten.

Kurz gesagt: Das Anklagerecht wird zur Anklagepflicht aufgewertet. Auch diese Pflicht muss überwacht werden, und das Anklagerecht hierzu zur Anklagepflicht aufgewertet werden, usw. Das erklärt die spezielle rekursive Form des oben skizzierten Gesetzes (GzG).

Die gesamte Konstruktion ist subtil und nicht einfach realisierbar.
Aber seien wir ehrlich: Wer erwartet denn hier einfache Lösungen?
Die Sachlage ist so verzwickt, dass wir erstaunt und glücklich sind, wenn sich überhaupt Lösungen abzeichnen. Denken hilft!

Alternative: Schlägt hier der **große Filter** zu? (engl. *the great filter*)
Das Universum ist groß, doch wir kennen bislang keine Zivilisationen außer unserer. Daher dürfen wir spekulieren: warum? Ist das Zufall oder Notwendigkeit? Zerbrechen Zivilisationen systematisch an ihrem Erfolg?

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Aufgabe: Untersuchen Sie die obige Strategie $s_i : \{0,1\}^i \to \{0,1\}$.
Zeigen Sie per Induktion über i, dass die obige Formel richtig ist, das heißt: Sie implementiert tatsächlich das Gesetz (GzG).

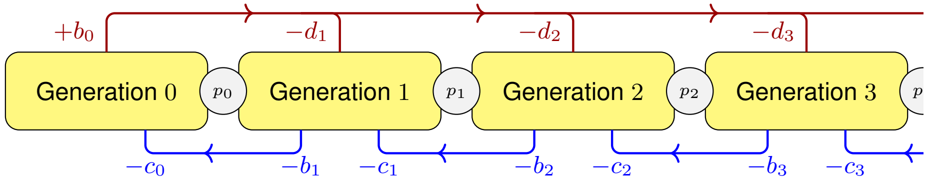
Aufgabe: Diskutieren Sie das Modell mit endlich vielen Generationen.
Berücksichtigen Sie soweit möglich / nötig die zeitliche Struktur.
Kann es hier ein (teilspielperfektes) Gleichgewicht geben?

Aufgabe: Diskutieren Sie das unendliche Modell mit Abbruchwkt $\varepsilon_i > 0$.
Jede Generation G_i geht davon aus, dass die Zivilisation mit einer kleinen Wkt $\varepsilon_i \in [0, \varepsilon[$ endet: Weltuntergang, oder die Generation G_{i+1} spielt einfach nicht mehr mit. Wie ändert das die Gleichgewichte?

Dieses Modell vereinfacht jede Generation G_i zu einem einzigen Akteur.
Übertragen auf die Menschheit ist das recht unrealistisch: Einerseits ist diese Einteilung willkürlich. Andererseits gibt es Divergenzen innerhalb jeder Generation. Damit wird auch die Schuldfrage juristisch schwierig.

Nachhaltigkeit als spieltheoretisches Modell

Zusammenfassung und Verallgemeinerung des Nachhaltigkeitsmodells:



Satz C4B (Nash–Gleichgewichte im Nachhaltigkeitsmodell)

Die Generationen $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ interagieren wie gezeigt.

(0) Raubbau $s_0 = 1$ und Schweigen $s_i = 0$ für alle $i \ge 1$ bilden ein teilspielperfektes Gleichgewicht dieses Spiels.

(1) Gilt $p_n c_n < b_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so ist $a_n = 0$ strikt dominant für G_n, und per Rückwärtsinduktion folgt $a_i = 0$ für $i = 1, \dots, n$ und $a_0 = 1$.

(2) Gilt $p_i c_i > b_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$, dann bilden nachhaltiges Verhalten und strenge Kontrolle ein teilspielperfektes Gleichgewicht, ausgeschrieben:

$$s^i \;:\; \{0,1\}^i \to \{0,1\} \;:\; (a_0, \dots, a_{i-1}) \mapsto a_0 + \dots + a_{i-1} \bmod 2$$

Nachhaltigkeit als spieltheoretisches Modell

Die graphische Darstellung unseres Modells bedeutet folgendes:

Akteure sind die Generationen G_i für $i \in \mathbb{N}$. Die Generation G_0 wählt ihre Aktion / Strategie $a_0 \in A_0 = \{0 = \text{Nachhaltigkeit}, 1 = \text{Raubbau}\}$.

Jede Generation G_i mit $i \ge 1$ kennt die gesamte Vorgeschichte und folgert daraus ihre Aktion $a_i \in A_i = \{0 = \text{schweigen}, 1 = \text{anklagen}\}$. Letzteres kostet sie selbst $b_i > 0$ und ihre Elterngeneration $c_{i-1} > 0$. Generation G_i hat somit die Strategiemenge $S_i = \{s_i : \{0,1\}^i \to \{0,1\}\}$.

Mit Wkt $p_i \in [0,1]$ setzt sich das System von Generation G_i zu G_{i+1} fort. Auszahlungen sind $u_0 = b_0 a_0 - p_0 c_0 a_1$ und $u_i = -b_i a_i - p_i c_i a_{i+1} - d_i a_0$.

Im Falle $p_i c_i < b_i$ ist für G_i nur das egoistische Verhalten stabil / rational. Im Falle $p_i c_i > b_i$ hingegen ist auch das gesetzestreue Verhalten rational, da G_{i+1} und alle nachfolgenden Generationen jeden Verstoß ahnden. Was bedeutet „gesetzestreu“ hier genau? Es geht um Gleichgewichte! Die Generationen $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ machen ihre Gesetze $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ selbst!

Aufgabe: (1) Beweisen Sie sorgfältig die Aussagen des Satzes.
(2) Nennen Sie weitere / alle Nash–Gleichgewichte $s \in S$.
(3) Was passiert im allgemeinen Fall $p_i c_i \ge b_i$?

Nachhaltigkeit als spieltheoretisches Modell

Das Modell erklärt nicht explizit, was **Generationengerechtigkeit** ist, es zeigt lediglich, wie **Kontrollmechanismen** implementiert werden. Das ist generationenübergreifend keineswegs trivial, wie wir wissen.

Unser Modell ist ein einfaches Beispiel von **Mechanismen-Design** (engl. *mechanism design*). Das Ziel ist die Schaffung eines Rahmens (als Spiel, Anreiz, Gesetz, etc.), der gewünschtes Verhalten ermöglicht, fördert oder gar erzwingt. Die inviduelle Entscheidungsfreiheit kann / soll / darf dabei nicht direkt eingeschränkt werden, allein der Rahmen wird so gestaltet, dass rationale Spieler das gewünschte Verhalten wählen.

Die Spieltheorie ist daher logische Grundlage für jeden **Gesetzgeber**, oder allgemein für jede Gestaltung von Regeln des Zusammenlebens.

Unsere Modelle sind simpel, aber die Fragen sind ernst. Seit Jahren wird darüber gestritten, in welchem Umfang die menschliche Aktivität das Klima beeinflusst oder gar eine Klimakatastrophe auslösen kann. Das ist nicht nur eine wissenschaftliche, sondern eine politische Frage. Daher müssen auch soziale Regeln und Kontrollen bedacht werden.

Nachhaltigkeit als spieltheoretisches Modell

Unser Modell versucht, Nachhaltigkeit mit Rationalität zu vereinen. Wem das zu theoretisch ist, der fragt nach praktischen Anwendungen: Lassen sich solche Prinzipien wirklich nutzen oder schon beobachten?

Die **Ethnologie** untersucht hierzu traditionell-nachhaltiges Wirtschaften in indigenen Kulturen. Rekordhalter sind die Ureinwohner Australiens (Aborigines) mit etwa 40 000 Jahren erfolgreicher Anpassung.

Manche Ethnologen interpretieren **Mythen und Riten** derart, dass sie genau diese stabilisierende Aufgabe erfüllen und den Gemeinschaften ermöglichen, sich Umweltveränderungen so weit wie nötig anzupassen und zugleich ihr Ökosystem so wenig wie möglich zu belasten.

Negativbeispiele sind (soweit wir es verstehen) die Bewohner der Osterinseln, die zwischen 1300 und 1700 n.Chr. durch systematische Abholzung ihre eigenen Lebensgrundlagen zerstörten. Gleiches gilt (vermutlich) für den Untergang der Maya-Kultur zwischen 750 und 950 n.Chr. durch natürliche und anthropogene Klimaveränderungen. Nochmal: Unsere Modelle sind simpel, aber die Fragen sind ernst.

Egonomics nach Thomas Schelling

Das **Generationenmodell** zur Altersversorgung ist relativ leicht. Das **Nachhaltigkeitsmodell** zur Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen ist etwas abstrakter und schwieriger, sowohl im logischen Aufbau als auch in der praktischen Umsetzung. Es ist überaus wichtig, leider übersteigt unsere Verantwortung offensichtlich unsere Intuition.

Wenn Ihnen das zu anwendungsfern ist: Betrachten Sie doch einmal Ihr eigenes Leben als Aneinandereihung von Generationen Ihres Ichs.

Viele Menschen kennen solche **Selbst-Konflikte**: Einerseits möchte ich heute Eis / Schokolade / Chips / Nachtisch essen. Andererseits werde ich mich morgen dafür verfluchen, denn ich will eigentlich abnehmen.

Ähnlich ist es mit der Entscheidung, Geld auszugeben oder zu sparen. Mancher zwingt sich durch Sparpläne zu einem langfristigen Handeln. Genauer gesagt: Sein heutiges Ich zwingt sein zukünftiges Ich dazu.

Diese Idee geht zurück auf Thomas Schelling: *Egonomics, or the art of self-management*, American Economic Review 68 (1978) 290–294. Ihr „gegenwärtiges Ich“ spielt gegen Ihr „zukünftiges Ich“.

Egonomics nach Thomas Schelling

Das Studentenleben ist geprägt von **Freiheiten und Entscheidungen**. Die Übungen / Hausarbeit / Klausurvorbereitung rechtzeitig anfangen oder doch lieber auf morgen verschieben und heute zur Party gehen?

Prokrastination (Aufschieberitis) zeichnet sich durch extremes Vertagen bzw. häufiges Unterbrechen unangenehmer Arbeiten aus. Es verursacht meist starken Leidensdruck. Mancher setzt sich daher selbst Deadlines.

Weitere Selbst-Konflikte sind zum Beispiel die Lust zu rauchen gegen den Wunsch gesund zu bleiben: Mancher vermeidet, Zigaretten auf Vorrat zu kaufen, um dem zukünftigen Ich den Zugang zu erschweren.

Allgemein führt Suchtverhalten zu extremen Selbst-Konflikten dieser Art. Aber auch simple Angewohnheiten folgen oft einem ähnlichen Muster: angenehmes lieber sofort, unangenehmes lieber später. Ist das rational?

Ein mögliches Mittel ist **Selbstbindung**. Ein Beispiel für Sportmuffel ist die Jahresmitgliedschaft im Fitnessstudio oder ein Vertrag mit einem Personal Trainer: Es war teuer, also muss ich jetzt Sport machen. Auch Studiengebühren können diesen positiven Effekt zeitigen.

Egonomics nach Thomas Schelling

Bildquelle: wikimedia.org

Egonomics nach Thomas Schelling

Das klassische Beispiel einer Selbstbindung, sogar im wörtlichen Sinne, ist Odysseus, der sich an den Mast binden lässt, um dem betörenden Gesang der Sirenen lauschen und ihnen doch widerstehen zu können. Das obige Photo zeigt eine attische Vasenmalerei, ca. 480–470 v.Chr.

Homers *Odyssee* (8.Jh.v.Chr.) erzählt wortgewaltig von Irrfahrten und Abenteuern des Odysseus, darunter seine Begegnung mit den Sirenen. „Dieses sind sangreiche Nymphen, die jedermann bezaubern, der auf ihr Lied horcht. [. . .] Ich aber gedachte an das Wort, das Circe, die mir dieses Alles voraussagte, gesprochen hatte. [. . .] Das weiche Wachs strich ich sodann meinen Reisegenossen in die Ohren. Sie aber banden mich auf mein Geheiß aufrecht unten an den Mast; dann setzten sie sich wieder an die Ruder und trieben das Fahrzeug getrost vorwärts. [. . .] Erst als wir glücklich vorübergesteuert und ganz aus dem Bereich der Sirenenstimmen waren, nahmen meine Freunde sich selbst das Wachs aus den Ohren, und mir lösten sie die Fesseln wieder. Ich aber dankte ihnen herzlich für ihre Beharrlichkeit.“ (Zitiert aus Gustav Schwab, *Die schönsten Sagen des klassischen Altertums*, Band 3, Stuttgart 1840, `www.deutschestextarchiv.de/schwab_sagen03_1840?p=182`)

Das Marshmallow-Experiment

Das berühmte **Marshmallow-Experiment** wurde von Walter Mischel in den Jahren 1968 bis 1974 in Stanford durchgeführt. Vierjährige Kinder mussten wählen zwischen einem Marshmallow sofort oder zwei in etwa 15 Minuten, also kleine sofortige Belohnung gegen größere später.

Kinder, die länger warten konnten, waren statistisch gesehen auch später als Erwachsene kontrollierter, zudem beruflich erfolgreicher, sie waren seltener übergewichtig und wurden seltener drogensüchtig.

W. Mischel, Y. Shoda, M.L. Rodriguez: *Delay of gratification in children.* Science 244 (1989) 933–938. Dieser und weitere Artikel sind online verfügbar unter `bingschool.stanford.edu/research/publications`.

Wohl kaum ein Experiment der Psychologie ist so bekannt wie dieses. Die faszinierende Geschichte wird wunderbar erzählt von Jonah Lehrer: *DON'T! The secret of self-control*, in The New Yorker vom 18. Mai 2009, online verfügbar `www.newyorker.com/magazine/2009/05/18/dont-2`.

Das Marshmallow-Experiment

Wie jedes Experiment sollten wir auch dieses kritisch betrachten; da es besonders berühmt ist, nenne ich einige Warnungen und Hinweise.

Die Versuchsgruppe war klein und selektiv: Sie bestand aus Kindern der Bing Nursery School an der Stanford University, und die meisten hatten dementsprechend gut ausgebildete Eltern. Solche sozialen Faktoren beeinflussen das Verhalten. Es ist daher denkbar, dass hier gefundende Zusammenhänge wenig repräsentativ für die Gesamtbevölkerung sind.

In der Längsstudie der Folgejahre konnten erwartungsgemäß immer weniger Studienteilnehmer erreicht und befragt werden, was die Fallzahl weiter verringerte und statistisch verlässliche Aussagen erschwerte.

Eine kritische Studie finden Sie in T.W. Watts, G.J. Duncan, H. Quan: *Revisiting the Marshmallow Test*, Psychological Science (2018) 1–19, `journals.sagepub.com/doi/pdf/10.1177/0956797618761661`.
Auch diese neue Studie sollten wir kritisch abwägen.

Das Marshmallow-Experiment

Belohnungsaufschub (*deferred gratification*) erfordert Selbstdisziplin und Impulskontrolle. Dies ist notwendig für langfristiges planvolles Handeln und ein wichtiger Aspekt der Selbstkontrolle.

Konrad Adenauer wird (sinngemäß) folgender Ausruf zugeschrieben:

Was interessiert mich mein Geschwätz von gestern?

Im Sinne von Gratifikationsaufschub vs sofortiger Belohnung oder Selbstkontrolle vs Prokrastination formulieren wir die Umkehrung:

Was interessiert mich mein Gejammer von morgen?

Wir werden in spieltheoretischen Modellen die zeitliche Struktur noch wesentlich genauer untersuchen, indem wir dynamische Spiele erklären. Die Lösungskonzepte werden ausgehend von Nash–Gleichgewichten noch weiter verfeinert, etwa zu teilspielperfekten Gleichgewichten.

Das Marshmallow-Experiment

Das Leben ist, soweit ich es sagen kann, ein fragiles Gleichgewicht von **Konsum und Investition**. Das trifft insbesondere auf ein Studium zu:

Sie investieren lange Jahre in Ihre Ausbildung. Da ist viel schönes dabei, das kann als sofortige Belohnung dienen, aber auch viel harte Arbeit, die Sie vielleicht gerne vermeiden oder zumindest aufschieben möchten.

Natürlich lohnt sich ein Studium, sowohl kurz- als auch mittel- und langfristig, aber es erfordert doch ein hohes Maß an Selbstdisziplin.

Vielleicht ist Ihr Studium ja eine Art Marshmellow-Experiment, bei dem Sie unter Beweis stellen, wie viel Selbstdisziplin Sie aufbringen können. Tatsächlich ist es – über die eigentlichen Inhalte, speziellen Fähigkeiten und allerlei Kompetenzen hinaus – ganz allgemein ein **guter Prädiktor**:

Wer erfolgreich Mathematik studiert hat, den haut so schnell nichts um. Sie beweisen damit neben mathematischen Fähigkeiten ein hohes Maß an Selbstdisziplin, Frustrationstoleranz und Durchhaltewillen.

☺ Ganz nebenbei lernen Sie auch noch, mathematische Methoden selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ anzuwenden.

Studium als Investition und als Konsum

Lohnt sich die Büffelei? (FAZ, Studenten-Spezial, 20.05.2015)

Studium als Investition und als Konsum

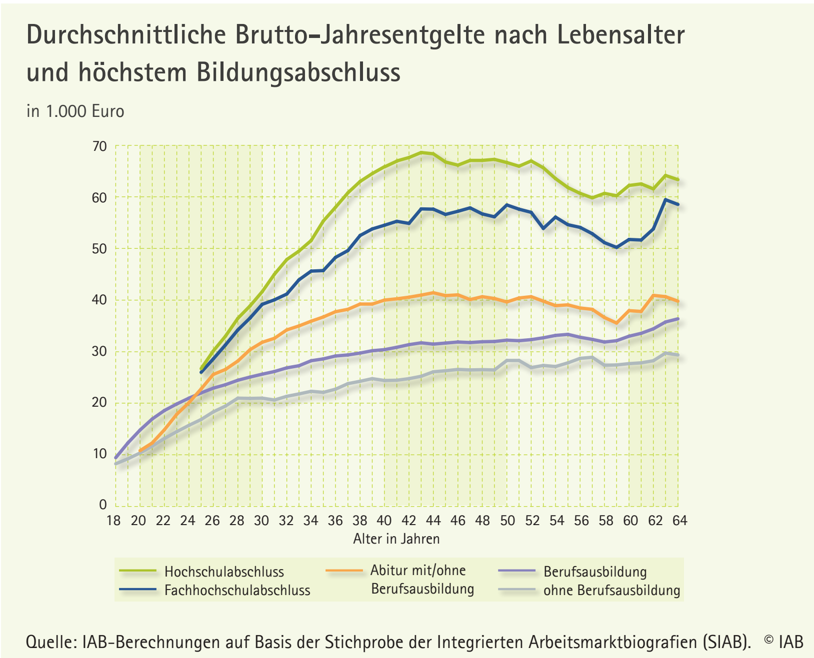
Lohnt sich die Büffelei? (FAZ, Studenten-Spezial, 20.05.2015)

„Studium oder Ausbildung — wer vor dieser Wahl steht, macht folgende Rechnung auf: Eine Lehre ist der erste Schritt in Richtung finanzieller Unabhängigkeit. Zwar ist die Vergütung nicht opulent, doch in Kombination mit Hotel Mama winkt ein bescheidener Luxus. Und nach zwei oder drei Jahren lässt sich mit dem Abschluss in der Tasche richtig Geld verdienen.

Anders beim Studium: Wer nach akademischen Weihen strebt, muss erst einmal investieren. Wenn ein Umzug nötig ist, kann Bildung richtig teuer werden. Bis der Hochschulabsolvent sein erstes Geld verdient, hat die Fachkraft oft schon die ersten Stufen auf der Karriere- und Gehaltsleiter genommen. Lässt sich das im Laufe eines Berufslebens noch aufholen?“

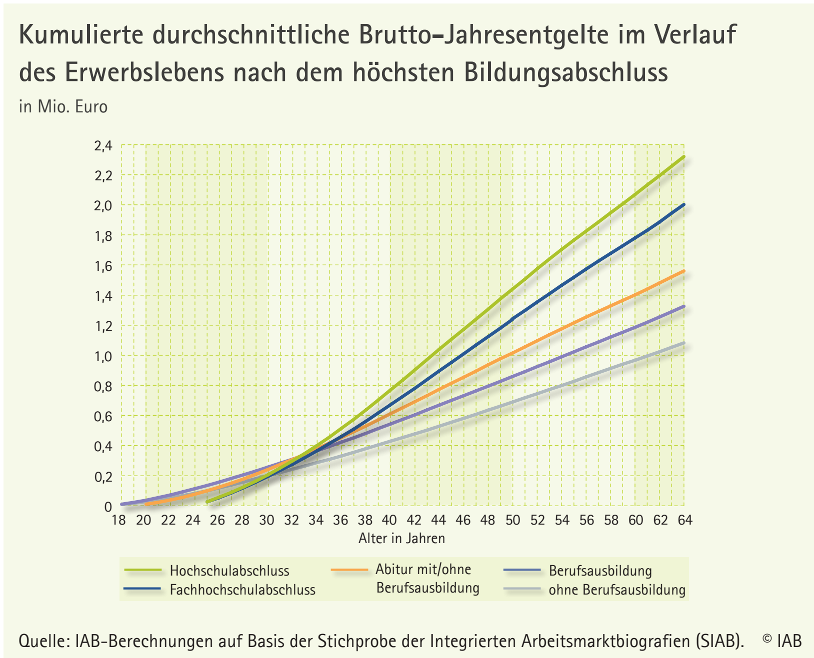
Die folgenden Daten und Graphiken (Stand 2014) stammen vom Institut für Arbeitsmarkt- und Berufsforschung der Bundesagentur für Arbeit, online verfügbar unter `doku.iab.de/kurzber/2014/kb0114.pdf`. Gruppiert nach Bildungsabschluss zeigen sie die Entgelte jetziger Arbeitnehmer, die in den letzten 40 Jahren ihre Abschlüsse erwarben.

Studium als Investition und als Konsum



www.iab.de/194/section.aspx/Publikation/k140121301

Studium als Investition und als Konsum



www.iab.de/194/section.aspx/Publikation/k140121301

Kapitel D

Lineare Optimierung und das Simplex-Verfahren

We are all familiar with methods for solving linear equation systems [. . .] On the other hand, the study of linear inequality systems excited virtually no interest until the advent of game theory in 1944 and linear programming in 1947.

George Bernard Dantzig (1914–2005)

Inhalt dieses Kapitels

Motivation und Überblick

Dieses Kapitel widmet sich dem Problem der **linearen Optimierung**. Diese Technik ist extrem vielseitig und zentral für viele Anwendungen.

Der von George Bernard Dantzig entwickelte **Simplex-Algorithmus** gehört zweifellos zu den Top-Ten aller Algorithmen. Die gute Nachricht: Er ist nicht schwieriger als der Gauß–Algorithmus der linearen Algebra. Allein Terminierung und Laufzeit sind deutlich schwieriger zu beweisen, dafür aber auch interessanter als mathematische Herausforderung.

Ich möchte Ihnen dieses wunderbare Verfahren näher bringen, soweit möglich sogar dafür begeistern. Vor allem jedoch möchte ich, dass Sie es praktisch nutzen können, um konkrete Probleme zu lösen.

Zugegeben, der erste Zugang ist nicht ganz leicht. Aber es lohnt sich! Harmonisch wie selten vereinen sich schöne Aspekte der Mathematik, Analysis (Kompaktheit), Lineare Algebra (Gauß), Geometrie (Polytope), Numerik (Optimierung), Wahrscheinlichkeit (Gleichgewichte), usw.

Unser Plan war es, schon in den Übungsaufgaben der vorigen Kapitel Ihre Neugier zu wecken und Ihr Verlangen nach besseren Methoden. Nun ist der Moment gekommen, diese Sehnsucht zu stillen.

Motivation und Überblick

Aus Diskussionen mit Hörern der Spieltheorie entnehme ich, dass viele den Simplex-Algorithmus schon mindestens einmal gesehen haben, einige bereits mehrfach, etwa in Veranstaltungen zur
- Numerik / (Numerischen) Lineare Algebra,
- Informatik / Algorithmische Geometrie,
- Optimierung / Lineare Optimierung.

Anders als bei anderen, vergleichbar fundamentalen Resultaten hält sich der Enthusiusmus jedoch in Grenzen: „Wollen Sie das wirklich tun?“ wurde ich gefragt, als ich begeistert vom Simplex-Algorithmus sprach und erklärte, ihn in die Vorlesung zur Spieltheorie einzubauen.

Ja, ich will! Der Simplex-Algorithmus hat seinen historischen Ursprung in der Spieltheorie, und er löst auch heute noch als braves Arbeitspferd eine phantastische Vielfalt von Problemen, hier und überall sonst.

Wann, wenn nicht jetzt?
Wo, wenn nicht hier?
Wer, wenn nicht wir?
(John F. Kennedy, 1917–1963)

Motivation: Nash–Gleichgewichte

Endliche reelle Zwei-Personen-Spiele führen zu **Bimatrixspielen**:

$$u \;:\; \Delta^m \times \Delta^n \to \mathbb{R}^2 \;:\; (x,y) \mapsto \big(\, x^\intercal A\, y,\; x^\intercal B\, y \,\big)$$
$$\Delta^m = \big\{\, (x_0,x_1,\dots,x_m)^\intercal \;\big|\; x_i \ge 0,\; \textstyle\sum_{i=0}^m x_i = 1 \,\big\}$$
$$\Delta^n \;= \big\{\, (y_0,y_1,\dots,y_n)^\intercal \;\big|\; y_j \ge 0,\; \textstyle\sum_{j=0}^n y_j = 1 \,\big\}$$

Wir suchen **Nash–Gleichgewichte** $(x,y) \in \Delta^m \times \Delta^n$, verlangen also:

$$u_1(x,y) \ge u_1(\tilde{x},y) \quad \text{für alle } \tilde{x} \in \Delta^m$$
$$u_2(x,y) \ge u_2(x,\tilde{y}) \quad \text{für alle } \tilde{y} \in \Delta^n$$

Dank Linearität genügt es, diese Ungleichungen für die **Ecken** zu testen:

$$x^\intercal A\, y \ge e_i^\intercal A\, y \qquad \text{für alle } i = 0,\dots,m$$
$$x^\intercal B\, y \ge x^\intercal B\, e_j \qquad \text{für alle } j = 0,\dots,n$$

Dies sind algebraische Un/Gleichungen in x, y, die Lösungsmenge ist demnach semi-algebraisch. Die Un/Gleichungen sind beinahe linear, leider nicht ganz, sondern nur bilinear. Das macht es kompliziert.

Für Nullsummenspiele reduzieren wir dies auf lineare Un/Gleichungen.

Motivation: Nash–Gleichgewichte

Aus Kapitel B kennen wir strategische Spiele $u : \prod_{i\in I} S_i \to \prod_{i\in I} R_i$ in Normalform (B2E) und den Begriff des Nash–Gleichgewichts (B2F).

Nashs Existenzsatz (B1E) garantiert: Zu jedem endlichen reellen Spiel $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ existieren Nash–Gleichgewichte, wenn schon nicht in reinen, so doch in gemischten Strategien, kurz $\mathrm{NE}(\bar{u}) \ne \emptyset$.

Das führt zur offensichtlichen Frage: Wie berechnen wir Gleichgewichte? Nashs Satz gibt hierzu leider keinerlei Auskunft, er ist nicht konstruktiv.

Zur Illustration habe ich das Problem hier für zwei Spieler ausformuliert.

Für Zwei-Personen-Nullsummenspiele wissen wir noch mehr (B2C): Hier entsprechen die Nash–Gleichgewichte genau den Min-Maximierern und den Max-Minimierern. Diese wichtige zusätzliche Eigenschaft nutzen wir geschickt, um die nicht-linearen Un/Gleichungen für Nash–Gleichgewichte zu linearen Un/Gleichungen zu vereinfachen. Letztere können wir dann mit dem Simplex-Verfahren lösen.

Motivation: korrelierte Gleichgewichte

Sei $u : S = S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ ein endliches reelles Spiel.

Eine **korrelierte Strategie** ist ein WMaß $\mathbf{P} \in [S]$ auf der Menge S, also $\mathbf{P} : S \to \mathbb{R} : s \mapsto \mathbf{P}(s) = \mathbf{P}(\{s\})$ mit $\mathbf{P}(s) \ge 0$ und $\sum_{s\in S} \mathbf{P}(s) = 1$.

Diese ist ein **korreliertes Gleichgewicht** des Spiels u, wenn gilt:

$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i(s_i; s_{-i}) \cdot \mathbf{P}(s_i; s_{-i}) \ge \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i(s_i'; s_{-i}) \cdot \mathbf{P}(s_i; s_{-i})$$

für jeden Spieler i und alle Strategien $s_i, s_i' \in S_i$.

Dies sind lineare Un/Gleichungen in den gesuchten Wkten $\mathbf{P}(s)$:

$$\mathbf{P}(s) \ge 0 \qquad \text{für alle } s \in S \text{ und} \qquad \sum_{s\in S} \mathbf{P}(s) = 1$$
$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \big[u_i(s_i; s_{-i}) - u_i(s_i'; s_{-i})\big] \cdot \mathbf{P}(s_i; s_{-i}) \ge 0$$

Wäre es nicht wunderbar, solche Probleme routiniert lösen zu können? Hierfür gibt es eine starke Theorie und erprobte Lösungsverfahren!

Motivation: korrelierte Gleichgewichte

Aus Kapitel C kennen wir den Begriff des korrelierten Gleichgewichts. Die Idee eines Signalgebers ist genial einfach und einfach genial. Unter seiner partiellen Information ändert kein Spieler seine Strategie.

Für einen kanonischen Signalgeber ist diese raffinierte Eigenschaft durch ein einfaches System von linearen Un/Gleichungen definiert. Unter seiner partiellen Information folgt jeder Spieler seiner Empfehlung.

Zur Illustration habe ich das Problem hier für zwei Spieler ausformuliert. Auch dies führt sofort zu der Frage: Wie berechnen wir Gleichgewichte? Für solche Probleme ist die lineare Optimierung maßgeschneidert!

Als erste Motivation zur linearen Optimierung mögen diese beiden Anwendungsbeispiele zu Gleichgewichten vorläufig genügen.

Die lineare Optimierung hat darüber hinaus zahlreiche weitere Anwendungsgebiete, sie ist wahrhaft ein Universalwerkzeug.

Ich behandle im Folgenden zunächst die allgemeine Problemstellung. Anschließend kehren wir zu den motivierenden Anwendungen zurück.

Erstes Beispiel: eindimensionale Optimierung

Aufgabe: Maximieren Sie die Zielfunktion $z(x) = 3x + 5$ unter den Nebenbedingungen $x \ge 0,\quad x + 2 \ge 0,\quad -2x + 3 \ge 0,\quad -3x + 4 \ge 0.$

Lösung: Der Ursprung $x = 0$ ist zulässig. Also gilt $\max z \ge z(0) = 5$.

Die Funktion $z(x) = 3x + 5$ wächst monoton mit x: Steigung $+3 > 0$. Ausgehend von $x = 0$ wollen wir daher x möglichst weit erhöhen.

$$\begin{aligned} & & x \ge 0 &\quad\Longrightarrow\quad \text{keine Einschränkung} \\ y_1 &:= & x + 2 \ge 0 &\quad\Longrightarrow\quad \text{keine Einschränkung} \\ y_2 &:= & -2x + 3 \ge 0 &\quad\Longrightarrow\quad \text{Einschränkung } x \le 3/2 \\ y_3 &:= & -3x + 4 \ge 0 &\quad\Longrightarrow\quad \text{Einschränkung } x \le 4/3 \end{aligned}$$

Der Engpass entsteht demnach in der letzten Bedingung $y_3 \ge 0$. Somit maximiert $x = 4/3$, und wir erhalten $\max z = z(4/3) = 9$.

☺ Das ist eine schöne Anwendung solider schulischer Ausbildung: Es genügen eine gute Notation und sorgfältige Fallunterscheidungen.

⚠ Ersetzen wir $x + 2 \ge 0$ durch $x - 2 \ge 0$, so werden die NB unerfüllbar!

Erstes Beispiel: eindimensionale Optimierung

Unser Ziel ist im Folgenden, solche Probleme der linearen Optimierung in höheren Dimensionen zu lösen. Das Simplex-Verfahren nutzt dabei die eindimensionale Optimierung auf der Suche nach Engpässen.

Da wir nun mehrere Variablen $x_1, \dots, x_n \ge 0$ haben und auch mehrere Nebenbedingungen $y_1, \dots, y_m \ge 0$, benötigen wir eine übersichtliche und effiziente Buchhaltung. Dies erreichen wir durch die Schreibweise als Vektoren und Matrizen: $x \ge 0$ und $y = Ax + b \ge 0$ und $z(x) = cx + d$.

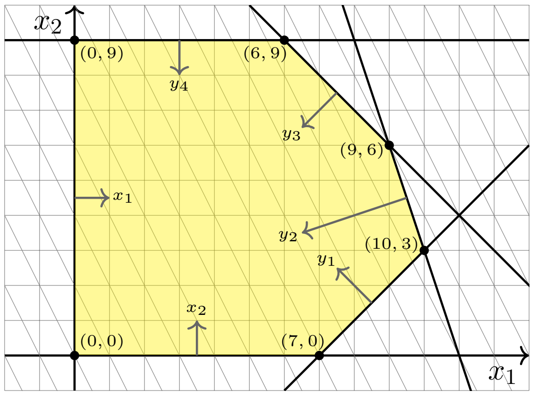
Die geniale Idee von Dantzig (1947) war es, das Problem zu lösen mit Zeilenoperationen wie im Gauß–Algorithmus. Hurra, lineare Algebra!

Ich führe dieses Verfahren an einem repräsentativen Beispiel aus. Passen Sie genau auf, danach sollen Sie es selbst können.

Wie schon beim Gauß–Algorithmus bieten sich beim Simplex-Verfahren mehrere Wege, die Methode zu erfahren, zu begreifen, zu erlernen: (1) durch zahlreiche, gut gewählte Beispiele, (2) durch Formulierung des allgemeinen Verfahrens, (3) durch sorgfältige Programmierung und Tests, (4) durch (formalen) Beweis der Richtigkeit des Verfahrens.

Zweites Beispiel: zweidimensionale Optimierung

Aufgabe: Maximieren Sie die Zielfunktion $z(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 - 4$.



Nichtnegativität:

$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} y_1 &:= 7 - x_1 + x_2 &\ge 0 \\ y_2 &:= 33 - 3x_1 - x_2 &\ge 0 \\ y_3 &:= 15 - x_1 - x_2 &\ge 0 \\ y_4 &:= 9 - x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

☺ Zweidimensionale Optimierung können wir graphisch lösen. Hierzu genügt Sorgfalt und etwas Schulmathematik der Mittelstufe.

☺ Für beliebige Dimension entwickeln wir ein algebraisches Verfahren. Das erfordert Sicherheit im Umgang mit Un/Gleichungssystemen.

Zweites Beispiel: zweidimensionale Optimierung

Sie verkaufen zwei Produkte mit Gewinn 2€ bzw. 1€ bei 4€ Fixkosten. Bei der Produktion müssen Sie gewisse Nebenbedingungen einhalten.

y_1: Sie haben 7 Teile vom Typ 1, Produkt 1 verbraucht eines, Produkt 2 setzt eines frei. (Das ist zwar ungewöhnlich, aber durchaus denkbar.)
y_2: Sie haben 33 Teile vom Typ 2, jedes Produkt benötigt davon 3 bzw. 1.
y_3: Sie haben 15 Teile vom Typ 3, jedes Produkt benötigt davon genau 1.
y_4: Sie haben 9 Teile vom Typ 4, nur Produkt 2 benötigt davon eines.

Jede unserer sechs Bedingungen $x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0$ definiert eine abgeschlossene Halbebene. Diese sind in obiger Graphik eingetragen.

Alle Bedingungen sollen gelten, das entspricht dem logischen Und: Der Durchschnitt unserer sechs Halbebenen ist ein abgeschlossenes Polygon $P \subset \mathbb{R}^2$. Allgemein erhalten wir ein n–dimensionales Polytop.

In unserem Fall ist die Erfüllungsmenge P beschränkt, somit kompakt. Die Zielfunktion $z : P \to \mathbb{R}$ ist affin-linear, somit stetig, nimmt also ein Maximum an. Unserer Graphik entnehmen wir $\max z = z(9,6) = 20$.

☺ Das folgende Simplex-Verfahren löst das Problem algebraisch.

Lineare Optimierung durch das Simplex-Verfahren

Anfangs betrachten wir $x_1, x_2 \geq 0$ als **freie Variablen**. Hiervon abhängig sind die **Schlupfvariablen** $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$ sowie die **Zielfunktion** z.

	x_1	x_2	1
y_1	-1	1	7
y_2	-3	-1	33
y_3	-1	-1	15
y_4	0	-1	9
z	2	1	-4

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	1	-1	0	0	0	7
-3	-1	0	-1	0	0	33
-1	-1	0	0	-1	0	15
0	-1	0	0	0	-1	9
2	1	0	0	0	0	-4

Der Ursprung $x_1 = x_2 = 0$ ist zulässig: $y_1 = 7$, $y_2 = 33$, $y_3 = 14$, $y_4 = 8$. Wir maximieren $x_1 \geq 0$, bis zum Engpass $y_1 \geq 0$. Basiswechsel $x_1 \leftrightarrow y_1$:

	y_1	x_2	1
x_1	-1	1	7
y_2	3	-4	12
y_3	1	-2	8
y_4	0	-1	9
z	-2	3	10

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	1	-1	0	0	0	7
0	-4	3	-1	0	0	12
0	-2	1	0	-1	0	8
0	-1	0	0	0	-1	9
0	3	-2	0	0	0	10

Lineare Optimierung durch das Simplex-Verfahren

Nun sind die Variablen $y_1, x_2 \geq 0$ frei, und $x_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$ sind Schlupf. Wir notieren links die Kurzfassung und rechts das erweiterte Tableau.

	y_1	x_2	1
x_1	-1	1	7
y_2	3	-4	12
y_3	1	-2	8
y_4	0	-1	9
z	-2	3	10

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	1	-1	0	0	0	7
0	-4	3	-1	0	0	12
0	-2	1	0	-1	0	8
0	-1	0	0	0	-1	9
0	3	-2	0	0	0	10

Der Ursprung $y_1 = x_2 = 0$ ist zulässig; wir haben Engpässe beachtet. Wir maximieren $x_2 \geq 0$, bis zum Engpass $y_2 \geq 0$. Basiswechsel $x_2 \leftrightarrow y_2$:

	y_1	y_2	1
x_1	$-1/4$	$-1/4$	10
x_2	$3/4$	$-1/4$	3
y_3	$-1/2$	$1/2$	2
y_4	$-3/4$	$1/4$	6
z	$1/4$	$-3/4$	19

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	0	$-1/4$	$-1/4$	0	0	10
0	-1	$3/4$	$-1/4$	0	0	3
0	0	$-1/2$	$1/2$	-1	0	2
0	0	$-3/4$	$1/4$	0	-1	6
0	0	$1/4$	$-3/4$	0	0	19

Lineare Optimierung durch das Simplex-Verfahren

	y_1	y_2	1
x_1	$-1/4$	$-1/4$	10
x_2	$3/4$	$-1/4$	3
y_3	$-1/2$	$1/2$	2
y_4	$-3/4$	$1/4$	6
z	$1/4$	$-3/4$	19

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	0	$-1/4$	$-1/4$	0	0	10
0	-1	$3/4$	$-1/4$	0	0	3
0	0	$-1/2$	$1/2$	-1	0	2
0	0	$-3/4$	$1/4$	0	-1	6
0	0	$1/4$	$-3/4$	0	0	19

Der Ursprung $y_1 = y_2 = 0$ ist zulässig; wir haben Engpässe beachtet. Wir maximieren $y_1 \geq 0$, bis zum Engpass $y_3 \geq 0$. Basiswechsel $y_1 \leftrightarrow y_3$:

	y_3	y_2	1
x_1	$1/2$	$-1/2$	9
x_2	$-3/2$	$1/2$	6
y_1	-2	1	4
y_4	$3/2$	$-1/2$	3
z	$-1/2$	$-1/2$	20

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	0	0	$-1/2$	$1/2$	0	9
0	-1	0	$1/2$	$-3/2$	0	6
0	0	-1	1	-2	0	4
0	0	0	$-1/2$	$3/2$	-1	3
0	0	0	$-1/2$	$-1/2$	0	20

Diese LP sind äquivalent, das letzte ist optimal: Wir lesen $\max z = 20$ ab. Probe durch Einsetzen: Wir haben $z = -\frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_2 + 20 = 2x_1 + x_2 - 4$.

Lineare Optimierung durch das Simplex-Verfahren

🙂 Unsere Aufgabe lösen wir durch nur drei elementare Basiswechsel. Jeder ist offensichtlich eine Äquivalenzumformung: Das Problem wird umformuliert von $x \geq 0$ und $Ax + b \geq 0$ und $z(x) = cx + d \to \max!$ zu $x' \geq 0$ und $A'x' + b' \geq 0$ und $z'(x') = c'x' + d' \to \max!$ und zurück. Dabei geht keine Information verloren: Beide Formulierungen haben dieselben Lösungen und lassen sich leicht ineinander umrechnen.

🙂 Geometrisch entspricht dies einer affin-linearen Transformation: Wir wechseln vom Koordinatensystem (x_1, x_2) zu (y_1, x_2) zu (y_1, y_2) zu (y_3, y_2). In Letzterem können wir die Lösung direkt ablesen! Der Ursprung unseres jeweiligen Koordinatensystems wandert von Ecke zu Ecke in unserem Polytop. Wir laufen jeweils entlang einer Kante, üblicherweise in Richtung des stärksten Anstiegs von z.

Daher hat das Verfahren seinen Namen: Wir bewegen uns entlang von Kanten, also 1–Simplizes im Rand des Polytops. Alternativ könnten wir auch durchs Innere laufen, diese Idee nutzen „Innere-Punkt-Methoden“.

Projekt: Erproben Sie möglichst viele Varianten dieser Umformungen.

Elementarer Basiswechsel zur Umformung

D205

	x_1	x_2
y_1	a	b
y_2	c	d

Basis- $\Longleftrightarrow$ wechsel

	y_1	x_2
x_1	$\dfrac{1}{a}$	$-\dfrac{b}{a}$
y_2	$\dfrac{c}{a}$	$d-\dfrac{bc}{a}$

$$y_1 = ax_1 + bx_2 \qquad\qquad x_1 = \frac{1}{a}y_1 - \frac{b}{a}x_2$$

$$y_2 = cx_1 + dx_2 \qquad\qquad y_2 = \frac{c}{a}y_1 + \left[d - \frac{bc}{a}\right]x_2$$

☺ Erfüllbarkeit und Lösbarkeit und Maximalwert bleiben dabei erhalten. Außerhalb des Kreuzes sehen wir genau den Gauß–Algorithmus.

☺ Freie Variablen / Spalten transformieren sich genauso wie abhängige Variablen / Nebenbedingungen / Zeilen, bis auf ein negatives Vorzeichen.

☺ Das Tableau betont die Dualität der Linearen Optimierung.

Elementarer Basiswechsel und Dualität

D206

	x_1	x_2
y_1	a	b
y_2	c	d

Basis- $\Longleftrightarrow$ wechsel

	y_1	x_2
x_1	$\dfrac{1}{a}$	$-\dfrac{b}{a}$
y_2	$\dfrac{c}{a}$	$d-\dfrac{bc}{a}$

trans- $\Updownarrow$ negieren

trans- $\Updownarrow$ negieren

	y_1^*	y_2^*
x_1^*	$-a$	$-c$
x_2^*	$-b$	$-d$

Basis- $\Longleftrightarrow$ wechsel

	x_1^*	y_2^*
y_1^*	$-\dfrac{1}{a}$	$-\dfrac{c}{a}$
x_2^*	$\dfrac{b}{a}$	$-d+\dfrac{bc}{a}$

Lineare Optimierung durch das Simplex-Verfahren

D207

	x_1	x_2	
y_1	-1	1	7
y_2	-3	-1	33
y_3	-1	-1	15
y_4	0	-1	9
z	2	1	-4

Der Ursprung $x_1 = x_2 = 0$ ist zulässig, denn $y_1 = 7$, $y_2 = 33$, $y_3 = 14$, $y_4 = 8$.
Wir wollen x_1 möglichst weit erhöhen.
Der Engpass entsteht durch $y_1 \ge 0$.
Wir ersetzen $y_1 = -x_1 + x_2 + 7$
durch $x_1 = -y_1 + x_2 + 7$.

$$\begin{aligned}
y_2 &= -3x_1 - 1x_2 + 33 = +3y_1 - 4x_2 + 12\\
y_3 &= -1x_1 - 1x_2 + 15 = +1y_1 - 2x_2 + 8\\
y_4 &= +0x_1 - 1x_2 + 9 \quad = +0y_1 - 1x_2 + 9\\
z &= +2x_1 + 1x_2 - 4 \quad = -2y_1 + 3x_2 + 10
\end{aligned}$$

$x_1 \Updownarrow y_1$

	y_1	x_2	
x_1	-1	1	7
y_2	3	-4	12
y_3	1	-2	8
y_4	0	-1	9
z	-2	3	10

Der Ursprung $y_1 = x_2 = 0$ ist zulässig;
er entspricht der Ecke $(x_1, x_2) = (7, 0)$.
Wir wollen x_2 möglichst weit erhöhen.
Der Engpass entsteht durch $y_2 \ge 0$.
Wir ersetzen $y_2 = 3y_1 - 4x_2 + 12$
durch $x_2 = \frac{3}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2 + 3$.

Lineare Optimierung durch das Simplex-Verfahren

D208

$x_2 \Updownarrow y_2$

… Basiswechsel …

	y_1	y_2	
x_1	$-1/4$	$-1/4$	10
x_2	$3/4$	$-1/4$	3
y_3	$-1/2$	$1/2$	2
y_4	$-3/4$	$1/4$	6
z	$1/4$	$-3/4$	19

Der Ursprung $y_1 = y_2 = 0$ ist zulässig;
er entspricht der Ecke $(x_1, x_2) = (10, 3)$.
Wir wollen y_1 möglichst weit erhöhen.
Der Engpass entsteht durch $y_3 \ge 0$.
Wir ersetzen $y_3 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + 2$
durch $y_1 = -2y_3 + y_2 + 4$.

$y_1 \Updownarrow y_3$

… Basiswechsel …

	y_3	y_2	
x_1	$1/2$	$-1/2$	9
x_2	$-3/2$	$1/2$	6
y_1	-2	1	4
y_4	$3/2$	$-1/2$	3
z	$-1/2$	$-1/2$	20

Der Ursprung $y_3 = y_2 = 0$ ist zulässig;
er entspricht der Ecke $(x_1, x_2) = (9, 6)$.
Die Zielfunktion ist hier maximal!
Wir erhalten das Ergebnis: $\max z = 20$.
Probe: Wir haben $z = -\frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_2 + 20$,
und Einsetzen ergibt $z = 2x_1 + x_2 - 4$.

Lineare Optimierung / Programmierung

Definition D2A (lineare Optimierung / Programmierung)

Eine **lineare Optimierung** oder **lineares Programm (LP)** hat die Form

$$\boxed{x \ge 0, \quad Ax + b \ge 0, \quad z(x) = cx + d \to \max!, \quad \text{kurz} \quad z : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)}$$

mit Daten $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, $c \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $d \in \mathbb{R}$; gesucht ist $x \in \mathbb{R}^n$.
Das LP ist **optimal**, wenn $c \le 0 \le b$ gilt; die Lösung ist dann $x = 0$.

(NN) **Nichtnegativität** $x \ge 0$, ausgeschrieben: $x_1 \ge 0, \ \dots, \ x_n \ge 0$.
(NB) **Nebenbedingungen** $y := Ax + b \ge 0$, ausgeschrieben:

$$\begin{array}{ccccccccc} y_1 := & a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & + & b_1 & \ge & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_m := & a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & + & b_m & \ge & 0 \end{array}$$

Dies definiert das **Polyeder** $P(A, b) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x \ge 0, \ Ax + b \ge 0 \}$.
Punkte $x \in P(A, b)$ heißen **zulässig**, die NB heißen dann **erfüllbar**.
(Z) Die **Zielfunktion** ist $z : P(A, b) \to \mathbb{R} : z(x) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n + d$.
Ist $P(A, b) \ne \emptyset$ und z nach oben **beschränkt**, so heißt das LP **lösbar**.

Lineare Optimierung / Programmierung

Die Daten $z : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ definieren die **Problemstellung** wie oben erklärt.
Zwei Ausnahmen können vorkommen und führen zur Unlösbarkeit:

1. Die Bedingungen $x \ge 0$ und $Ax + b \ge 0$ sind **nicht erfüllbar**:
   Das Polyeder ist in diesem Falle leer, also $P(A, b) = \emptyset$.
2. Die Funktion $z : P(A, b) \to \mathbb{R} : x \mapsto cx + d$ **wächst unbeschränkt**.
   In diesem Falle wird kein Maximum angenommen.

Günstigenfalls ist das Polyeder $P(A, b)$ nicht-leer und z beschränkt, etwa $P(A, b) \ne \emptyset$ kompakt: Wir suchen $x \in P(A, b)$ mit $z(x) = \max z$.
Von einem Lösungsalgorithmus erwarten wir, dass er die Ausnahmen (1) und (2) ordnungsgemäß meldet, ansonsten die Optimierung korrekt löst.

Es ist vorteilhaft, die Ungleichungen $Ax + b \ge 0$ in zwei zu teilen:
Wir definieren die **Schlupfvariablen** $y := Ax + b$ und fordern $y \ge 0$.
Wir können dann Basiswechsel durchführen wie oben erklärt;
dies werden wir nun zum Simplex-Verfahren ausbauen.

⚠ Konventionen und Schreibweisen variieren etwas in der Literatur.

Lineare Optimierung / Programmierung

Die lineare Optimierung gehört zu den Top-Ten aller Algorithmen, besser gesagt: zu den Top-Ten aller algorithmischen Problemstellungen. Viele Eigenschaften linearer Programme entsprechen Eigenschaften von Polyedern und lassen sich so geometrisch interpretieren und beweisen. So verbinden sich geometrische, algebraische und numerische Aspekte.

Die Abkürzung „LP“ können Sie auch als „Lineares Problem“ lesen. Die traditionelle Bezeichnung „Programm“ bedeutet schlicht „Planung“ also ausnahmsweise nicht die Erstellung eines Computerprogramms. Der Begriff wurde Mitte der 1940er Jahre von George Dantzig geprägt bevor Computer zur Lösung solcher Probleme eingesetzt wurden.

Die lineare Optimierung ist ein Spezialfall der konvexen Optimierung und zentrale Technik vieler Anwendungen, etwa des Operations Research. Häufig lassen sich Optimierungsprobleme auf diese Form zurückführen und so mit Standardtechniken lösen. Das ist insbesondere interessant, wenn keine maßgeschneiderten Lösungsverfahren bekannt sind.

Lineare Optimierung / Programmierung

Lineare Ungleichungen wurden 1827 von Fourier untersucht und gelöst. Die Methode wurde später zur Fourier–Motzkin–Elimination entwickelt. Allgemein wurde lineare Optimierung 1939 von Leonid Kantorovich untersucht, der hierzu auch erste Lösungsmethoden entwickelte.

Das **Simplex-Verfahren** wurde 1947 von George Dantzig angegeben; zur genauen Ausführung wurden mehrere Pivotstrategien untersucht. In der Praxis hat sich dies als eines der schnellsten Verfahren erwiesen, zumindest für generische Problemstellungen. Im schlechtesten Fall erfordert es exponentielle Laufzeit, wie der Klee–Minty–Würfel zeigt.

Die lineare Optimierung lässt sich **in polynomialer Zeit** lösen, etwa mit geeigneten Innere-Punkte-Verfahren, wie Leonid Khachiyan (1979) und Narendra Karmarkar (1984) zeigen konnten. Das Simplex-Verfahren ist immerhin **polynomial im Mittel** bzgl. diverser Verteilungen.
Weiterhin offen ist die grundlegende Frage: Gibt es eine Pivotstrategie für das Simplex-Verfahren, die immer polynomiale Laufzeit garantiert?

Optimierung durch Basiswechsel

Aufgabe: Schreiben Sie den elementaren Basiswechsel $x_k \leftrightarrow y_\ell$ aus.
Lösung: Der Basiswechsel $x_k \leftrightarrow y_\ell$ ist nur möglich, falls $a_{\ell k} \neq 0$:

$$y_\ell = a_{\ell k} x_k + \sum_{i \neq k} a_{\ell i} x_i + b_\ell \quad\Longleftrightarrow\quad x_k = \frac{1}{a_{\ell k}} y_\ell - \sum_{i \neq k} \frac{1}{a_{\ell k}} a_{\ell i} x_i - \frac{1}{a_{\ell k}} b_\ell$$

Wir ersetzen überall die alte Variable x_k durch die neue Variable y_ℓ:

$$y_j = a_{jk} x_k + \sum_{i \neq k} a_{ji} x_i + b_j = \frac{a_{jk}}{a_{\ell k}} y_\ell + \sum_{i \neq k} \Big[a_{ji} - \frac{a_{jk}}{a_{\ell k}} a_{\ell i}\Big] x_i + \Big[b_j - \frac{a_{jk}}{a_{\ell k}} b_\ell\Big]$$

$$z = c_k x_k + \sum_{i \neq k} c_i x_i + d = \frac{c_k}{a_{\ell k}} y_\ell + \sum_{i \neq k} \Big[c_i - \frac{c_k}{a_{\ell k}} a_{\ell i}\Big] x_i + \Big[d - \frac{c_k}{a_{\ell k}} b_\ell\Big]$$

Im **Tausch** wird $y_\ell \geq 0$ zur Variablen und $x_k \geq 0$ zur Nebenbedingung.
Invarianz: Das alte LP $\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und das neue LP $\left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ sind äquivalent; sie stimmen überein in Erfüllbarkeit und Lösbarkeit und Maximalwert.
Umkehrung: Erneuter Basiswechsel $y_\ell \leftrightarrow x_k$ macht alles rückgängig.

Optimierung durch Basiswechsel

Satz D2B (Jedes lösbare LP ist elementar optimierbar.)

Jedes lösbare LP $z : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist optimierbar durch Basiswechsel:
Wir können $z : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ transformieren in ein optimales LP $z' : \left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ mit $c' \leq 0 \leq b'$ und somit lösen durch $x' = 0$ und $\max z = \max z' = d'$.

Beweis-Idee: Das LP $z : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ sei lösbar, also $P(A,b)$ nicht leer, und die Zielfunktion $z : P(A,b) \to \mathbb{R} : x \mapsto cx + d$ nimmt ein Maximum an.
Dann wird das Maximum in einer Ecke $x^* \in P(A,b)$ angenommen:
Unter den Bedingungen $x_1, \dots, x_n \geq 0$ und $y_1, \dots, y_m \geq 0$ gibt es n linear unabhängige, die im Punkt x^* straff sind, also zu Gleichungen werden, und deren Richtungsvektoren der Funktion z entgegenlaufen.
Diese (zunächst abhängigen) Variablen können wir durch Basiswechsel zu freien Variablen machen, und das LP $z' : \left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ ist optimal. QED

🙂 Dieses geometrische Argument zeigt, *dass* eine Lösung möglich ist.
☹ Es erklärt leider nicht, *wie* wir eine Lösung konkret finden können.

Das Simplex-Verfahren: Dantzigs Pivotstrategie

Gegeben sei ein lineares Programm $z : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ wie oben erklärt.
Wir beschreiben das (vereinfachte) Simplex-Verfahren im Falle $b \geq 0$.

1. Wähle eine **Pivotspalte** $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $c_k > 0$.
   - Gilt $c_k \leq 0$ für alle k, dann wird z durch $x = 0$ maximiert. ⇒ Ende
   - **Pivotregel** als erprobte Empfehlung: Wähle $c_k > 0$ maximal.
2. Wähle eine **Pivotzeile** $\ell \in \{1, \dots, m\}$ mit $a_{\ell k} < 0$.
   - Gilt $c_k > 0$ und $a_{\ell k} \geq 0$ für alle ℓ, dann ist z unbeschränkt. ⇒ Ende
   - **Engpass:** Unter diesen wähle ℓ so, dass $b_\ell / |a_{\ell k}| \geq 0$ minimal ist.
3. **Basiswechsel:** Tausche $x_k \leftrightarrow y_\ell$ wie oben erklärt.

Das neue LP $z' : \left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ ist demnach äquivalent zum alten LP $z : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.
Es gilt $d' = d - \frac{c_k}{a_{\ell k}} b_\ell \geq d$ und $b_j - \frac{a_{jk}}{a_{\ell k}} b_\ell \geq 0$, da wir Engpässe beachten.
Dieses Verfahren können wir iterieren, bis zu einem Ende wie oben.

🙂 **Generisch** gilt $b > 0$ und somit $d' > 0$, das garantiert Fortschritt.
Da nur endlich viele Ecken existieren, endet dieses Verfahren.

☹ In (seltenen) **Ausnahmen** kann das Verfahren stagnieren, $d' = d$, und sogar Zykel bilden. Hierzu sind verfeinerte Strategien nötig.

Das Simplex-Verfahren: Dantzigs Pivotstrategie

Zur Klärung möglicher Missverständnisse betone ich den Dreischritt:

1. Die Daten $z : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ definieren zunächst die **Problemstellung**. Damit legen wir präzise fest, was wir als **Lösung** akzeptieren.
2. Jeder Basiswechsel ermöglicht eine **elementare Umformung**. Das Problem geht über in ein **äquivalentes Problem** $z' : \left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$.
3. Erst die genaue Schrittfolge definiert einen **Algorithmus**. Hierzu dient die explizite Formulierung einer **Pivotstrategie**.

Der geometrische Beweis von Satz D2B zeigt zunächst nur, *dass* eine Lösung prinzipiell möglich ist, er erklärt aber leider nicht, *wie* wir eine Lösung konkret finden können. Dies leistet Dantzigs Pivotstrategie: Wir hangeln uns von Ecke zu Ecke „immer an der Wand entlang“. Generisch, für fast alle Fälle, terminiert diese Methode und löst das LP.

Dieser Kenntnisstand ist praktisch meist ausreichend, aber allgemein noch nicht befriedigend. Auch die Laufzeit ist schwer zu beschränken, schlimmstenfalls sogar exponentiell, etwa für den Klee–Minty–Würfel. Daher wurden zahlreiche weitere Pivotstrategien vorgeschlagen, oder auch grundsätzlich neue Zugänge wie etwa Innere-Punkte-Methoden.

Dualität für lineare Programme (nach Neumann)

Jedes lineare Programm kommt als **duales Paar**:

primales LP:	$x \ge 0,$	$Ax + b \ge 0,$	$u(x) = cx + d \to \max!$
duales LP:	$y \ge 0,$	$yA + c \le 0,$	$v(y) = yb + d \to \min!$

Das entspricht der Transnegation von $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ zu $-v : -\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^\intercal$.
Für jedes optimale LP, also $c \le 0 \le b$, ist die Lösung offensichtlich:
$x = 0$ ist zulässig $\iff$ $b \ge 0$ $\implies$ $y = 0$ minimiert $v(y) = yb + d$
$y = 0$ ist zulässig $\iff$ $c \le 0$ $\implies$ $x = 0$ maximiert $u(x) = cx + d$

Satz D2c (Dualität der linearen Optimierung)

Schwache Dualität: *Für jeden zulässigen Punkt $x \ge 0$ mit $Ax + b \ge 0$ und dual jeden zulässigen Punkt $y \ge 0$ mit $yA + c \le 0$ gilt $u(x) \le v(y)$.*
Sind also simultan beide LP erfüllbar, so sind auch beide lösbar.

Starke Dualität: *Ist das primale LP lösbar, so auch das duale LP, und es gilt die Gleichheit $\max u = \min v$, also keine Dualitätslücke.*

Ist das primale LP erfüllbar, aber nicht das duale, so gilt $u \to +\infty$.
Ist das duale LP erfüllbar, aber nicht das primale, so gilt $v \to -\infty$.

Dualität für lineare Programme (nach Neumann)

Aufgabe: (1) Beweisen Sie die schwache Dualität durch Einsetzen.
(2) Folgern Sie die starke Dualität (D2c) aus Optimierbarkeit (D2b).
Hinweis: Gilt Dualität für optimale LP? optimierbare LP? lösbare LP?

Lösung: (0) Wir nutzen die Zulässigkeit $x \ge 0$ und $b \ge -Ax$ sowie $y \ge 0$ und $c \le -yA$. Positivkombinationen erhalten alle Ungleichungen:

$$u(x) = cx + d \le (-yA)x + d = y(-Ax) + d \le yb + d = v(x)$$

Schwache Dualität erhalten wir direkt durch geschickten Vergleich.

(1) Starke Dualität ist klar für jedes optimale LP, mit $c \le 0 \le b$. Hier löst $x = 0$ das primale LP und $y = 0$ das duale LP, also $\max u = d = \min v$.

Dank Basiswechsel gilt Dualität dann auch für jedes optimierbare LP. Dies wirkt auf beide Probleme, primal und dual, auf dieselbe Weise.

Dank Optimierbarkeit (D2b) gilt starke Dualität für jedes lösbare LP.

Das ist ein bemerkenswerter „Beweis durch Rechnung“ oder eine „Konstruktion durch Algorithmus“. Diesen Idealfall haben wir nicht oft.

Die Ergänzung zu unbeschränkten Problemen führe ich hier nicht aus.

Dualität für lineare Programme (nach Neumann)

Beispiel: Zur Illustration untersuchen wir erneut unsere Rechnung:

primal	x_1	x_2	
y_1	-1	1	7
y_2	-3	-1	33
y_3	-1	-1	15
y_4	0	-1	9
u	2	1	-4

$\Longleftrightarrow$

primal	y_3	y_2	
x_1	$1/2$	$-1/2$	9
x_2	$-3/2$	$1/2$	6
y_1	-2	1	4
y_4	$3/2$	$-1/2$	3
u	$-1/2$	$-1/2$	20

Der Punkt $x = (9,6)^\intercal$ ist zulässig, dank $Ax + b = (4,0,0,3)^\intercal \ge 0$.
Demnach gilt $\max u \ge u(x) = 20$. Das zweite Tableau zeigt zudem $u = -\frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_2 + 20 \le 20$. Beide zusammen beweisen $\max u = 20$.

Die Richtigkeit dieser zweiten Aussage können wir auch unabhängig nachprüfen, genau dazu dienen zertifizierte Lösungen: Sehen Sie wie?

Aufgabe: Dualisieren Sie dieses Problem und und lösen Sie dies.
Müssen Sie zur Lösung erneut Basiswechsel durchführen?
Wie nutzen Sie die Äquivarianz unter Transnegation?
Woran erkennen Sie die Eindeutigkeit der Lösung?

Dualität für lineare Programme (nach Neumann)

Lösung: Dualisieren ist äquivalent zur Transnegation:

dual	y_1	y_2	y_3	y_4	
x_1	-1	-3	-1	0	2
x_2	1	-1	-1	-1	1
v	7	33	15	9	-4

NN: $y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0$
NB: $x_1, x_2 \le 0$ bzw. $-x_1, -x_2 \ge 0$
Ziel: $v \to \min!$ bzw. $-v \to \max!$

Das duale Problem bringen wir somit ebenfalls auf Normalform und lösen es durch eine geeignete Folge von Basiswechseln:

	y_1	y_2	y_3	y_4	
$-x_1$	1	3	1	0	-2
$-x_2$	-1	1	1	1	-1
$-v$	-7	-33	-15	-9	4

$\Longleftrightarrow$

	$-x_1$	$-x_2$	y_1	y_4	
y_3	$-1/2$	$3/2$	2	$-3/2$	$1/2$
y_2	$1/2$	$-1/2$	-1	$1/2$	$1/2$
$-v$	-9	-6	-4	-3	-20

Der Punkt $y = (0, 1/2, 1/2, 0)$ ist zulässig, also $\min v \le v(y) = 20$.
Wir finden $v = 9(-x_1) + 6(-x_2) + 4y_1 + 3y_4 + 20$, also $\min v = 20$.

Das beweist die starke Dualität in unserem konkreten Beispiel. Allgemein gelingt dies ebenso, wie in der vorigen Aufgabe erklärt.

Zertifizierte Lösung einer linearen Optimierung

D221

Aufgabe: Zu lösen sei $x \ge 0$, $Ax + b \ge 0$, $u(x) = cx + d \to \max!$.
(1) In welcher Form würden Sie eine Lösung des Problems angeben?
(2) Können Sie leicht prüfen, ob sie zulässig ist? und ebenso optimal?
(3) Wie können Sie die Optimalität beweisen / effizient zertifizieren?

Lösung: (1) Es genügt, einen Lösungsvektor $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ anzugeben.

(2) Wir können $x \ge 0$ und $Ax + b \ge 0$ durch Einsetzen direkt prüfen.

In diesem Falle ist der Punkt x zulässig und $\max u \ge u(x)$ garantiert.
Die Gleichung $\max u = u(x)$ ist zunächst schwieriger zu beweisen!
Glücklicherweise gibt es eine simple Lösung. Dualität wirkt Wunder:

(3) Zum Beweis der Optimalität von $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ genügt ein $y \in \mathbb{R}^{1\times m}$ mit $y \ge 0$ und $yA + c \le 0$ sowie $u(x) = v(y)$. Das lässt sich leicht prüfen!

Für diese Schlussfolgerung genügt bereits die schwache Dualität.
Die starke Dualität garantiert, dass zu x ein Zertifikat y existiert!
Lösungen sollten immer als duales Paar (x, y) angegeben werden.

Zertifizierte Lösung einer linearen Optimierung

D222

Definition D2D (zertifizierte Lösung einer linearen Optimierung)

Eine **zertifizierte Lösung** zum LP $\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist ein duales Paar (x, y) mit $x \ge 0$ und $Ax + b \ge 0$ sowie $y \ge 0$ und $yA + c \le 0$, sodass $cx = yb$.

Das garantiert: x löst das primale LP und y löst das duale LP.

Beispiel: Vorgelegt sei das Ergebnis mehrerer Basiswechsel:

primal	x_1	x_2	
y_1	-1	1	7
y_2	-3	-1	33
y_3	-1	-1	15
y_4	0	-1	9
u	2	1	-4

$\Longleftrightarrow$

primal	y_3	y_2	
x_1	$1/2$	$-1/2$	9
x_2	$-3/2$	$1/2$	6
y_1	-2	1	4
y_4	$3/2$	$-1/2$	3
u	$-1/2$	$-1/2$	20

Aufgabe: Ist die Lösung korrekt? Finden Sie ein Zertifikat!

Lösung: Wir sehen das duale Paar $x = (9, 6)^\intercal$ und $y = (0, 1/2, 1/2, 0)$.
Die Probe gelingt dann leicht, direkt und effizient durch Einsetzen:
Es gilt $x \ge 0$ und $Ax + b \ge 0$ sowie $y \ge 0$ und $yA + c \le 0$ mit $cx = yb$.

Zertifizierte Lösungen: Analogien in der Algebra

D223 Erläuterung

Mit dem eigentlichen (primalen) Problem löst das Simplex-Verfahren zusätzlich und gratis auch das duale Problem. *Solve one, get one free!*

Dies nutzen wir dankend zur Zertifizierung, ganz ohne Mehraufwand. Wir extrahieren das duale Paar (x, y) als *konzise Lösung mit Beweis*.

So prüfen Sie Ihre eigene Rechnung: Jeder Irrtum wird erkannt! So überzeugt Ihre Lösung, unabhängig vom (langen) Rechenweg.

Zur Prüfung von (x, y) genügt bereits die schwache Dualität. Die starke Dualität garantiert, dass zu x ein Zertifikat y existiert!

Sie kennen ähnliche Situationen aus der (linearen) Algebra: Auch hier ist ein Zertifikat eine *konzise Lösung mit Beweis*.

Invertierbarkeit einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ über einem Körper $\mathbb{K}$:
Ist A invertierbar, so genügt $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $AB = BA = 1_{n\times n}$.
Ist A nicht invertierbar, so genügt $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ mit $Av = 0$.

Diagonalisierbarkeit einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ über einem Körper $\mathbb{K}$:
Ist A diagonalisierbar, so genügt eine Basis $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$ und Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $Av_k = \lambda_k v_k$ für alle $k = 1, \dots, n$.

Zertifizierte Lösungen: Analogien in der Algebra

D224 Erläuterung

Bild und Kern einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ über einem Körper $\mathbb{K}$:
Naiv würden wir eine Basis von Bild und Kern fordern. Zum Nachweis muss lineare Unabhängigkeit geprüft werden. Aber wie können wir sicher sein, dass das Bild bzw. der Kern nicht noch größer sind?

Mit dem Gauß–Algorithmus konstruieren wir Matrizen $S, S' \in \mathbb{K}^{m\times m}$ mit $SS' = S'S = 1_{m\times m}$ und $T, T' \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $TT' = T'T = 1_{n\times n}$ sodass $S'AT = D$ gilt, wobei mit $d_{ii} = 1$ für $i = 1, \dots, r$ und $d_{ij} = 0$ sonst.
Es gilt $AT = SD$: Das Bild $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(AT) = \mathrm{Im}(SD)$ hat demnach als eine Basis die ersten r Spalten von S, also $Se_1, \dots, Se_r \in \mathbb{K}^m$.
Der Kern $\ker(A)$ hat als eine Basis die letzten $n - r$ Spalten von T, also $Te_{r+1}, \dots, Te_n \in \mathbb{K}^n$. Die zertifizierte Lösung ist hier (S, S', T, T').

Größter gemeinsamer Teiler (ggT) d von a, b in $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{K}[X]$ oder $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$.
Mit $d \mid a$ und $d \mid b$ wissen wir nur, dass d ein gemeinsamer Teiler ist.
Aber wie können wir sicher sein, dass d maximal ist?

Gilt zudem $d = au + bv$, so ist d ein größter gemeinsamer Teiler:
Für jeden gemeinsamen Teiler d' mit $d' \mid a$ und $d' \mid b$ folgt $d' \mid au + bv$.
Der zertifizierte ggT ist hier ein Tripel (d, u, v) mit $d = au + bv \mid a, b$.

Vom Nullsummenspiel zum linearen Programm

Aufgabe: Untersuchen Sie nochmals das Spiel *Schere-Stein-Papier:*

	Schere	Stein	Papier
Schere	0 / 0	-1 / $+1$	$+1$ / -1
Stein	$+1$ / -1	0 / 0	-1 / $+1$
Papier	-1 / $+1$	$+1$ / -1	0 / 0

$$A = -B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & +1 \\ +1 & 0 & -1 \\ -1 & +1 & 0 \end{pmatrix}$$

Finden Sie ein Nash–Gleichgewicht und die Auszahlung für Spieler 1:
(1) Schreiben Sie das Problem explizit als ein lineares Programm.
(2) Finden Sie eine Lösung. Ist sie eindeutig? Finden Sie ein Zertifikat!

Dieses Nullsummenspiel dient hier zur Illustration. Sie kennen bereits die Lösung: Es gibt genau ein Nash–Gleichgewicht, nämlich $(1/3, 1/3, 1/3)$, und der Wert des Spiels ist 0, auch schon aus Symmetriegründen.

Vom Nullsummenspiel zum linearen Programm

Lösung: (1) Wir schreiben Schere-Stein-Papier als Bimatrixspiel

$$u \,:\, \Delta^2 \times \Delta^2 \to \mathbb{R}^2 \,:\, (x, y) \mapsto \big(x^\intercal A\, y,\ -x^\intercal A\, y \big).$$

Hierbei ist $\Delta^2 = [e_0, e_1, e_2] \subset \mathbb{R}^3$ und $e_0, e_1, e_2 \in \mathbb{R}^3$ die Standardbasis.
Der Spielwert / die Gleichgewichtsauszahlung für Spieler 1 ist:

$$z \;=\; \max_{x \in [e_0, e_1, e_2]} \min_{y \in [e_0, e_1, e_2]} x^\intercal A\, y \;=\; \max_{x \in [e_0, e_1, e_2]} \min_{y \in \{e_0, e_1, e_2\}} x^\intercal A\, y$$

Wir erhalten ein endliches System linearer Un/Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} z \to \max!, & z \le x^\intercal A\, e_0, & x_0 \ge 0, \\ & z \le x^\intercal A\, e_1, & x_1 \ge 0, \\ & z \le x^\intercal A\, e_2, & x_2 \ge 0, \\ & 1 = x_0 + x_1 + x_2, & z \ge 0. \end{array}$$

Trick: $A' = A + \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ erfüllt $A' > 0$ und $z' = z + 2 > 0$.
Bonus: Statt $x_0 + x_1 + x_2 = 1$ genügt die Ungleichung $x_0 + x_1 + x_2 \le 1$.

Vom Nullsummenspiel zum linearen Programm

(2) Durch diese Umformulierung erhalten wir unser lineares Programm:

$$\begin{array}{llll} z \to \max!, & x_0 \ge 0, & s_0 = x^\intercal A\, e_0 - z & \ge 0, \\ & x_1 \ge 0, & s_1 = x^\intercal A\, e_1 - z & \ge 0, \\ & x_2 \ge 0, & s_2 = x^\intercal A\, e_2 - z & \ge 0, \\ & z \ge 0, & s_3 = 1 - x_0 - x_1 - x_2 & \ge 0. \end{array}$$

(2) Wir schreiben dies als Tableau und lösen das LP:

	x_0	x_1	x_2	z	
s_0	2	3	1	-1	0
s_1	1	2	3	-1	0
s_2	3	1	2	-1	0
s_3	-1	-1	-1	0	1
z	0	0	0	1	0

Damit haben wir unser Problem in Standardform und können es lösen.
Etwas ungewöhnlich ist, dass die Zielfunktion z auch als Variable auftritt.
Wer das nicht mag, schreibt lieber $z = t \to \max!$ mit der Variablen t.

Vom Nullsummenspiel zum linearen Programm

	x_0	x_1	x_2	s_0	
z	2	3	1	-1	0
s_1	-1	-1	2	1	0
s_2	1	-2	1	1	0
s_3	-1	-1	-1	0	1
z	2	3	1	-1	0

	x_0	s_1	x_2	s_0	
z	-1	-3	7	2	0
x_1	-1	-1	2	1	0
s_2	3	2	-3	-1	0
s_3	0	1	-3	-1	1
z	-1	-3	7	2	0

	x_0	s_1	s_2	s_0	
z	6	$5/3$	$-7/3$	$-1/3$	0
x_1	1	$1/3$	$-2/3$	$1/3$	0
x_2	1	$2/3$	$-1/3$	$-1/3$	0
s_3	-3	-1	1	0	1
z	6	$5/3$	$-7/3$	$-1/3$	0

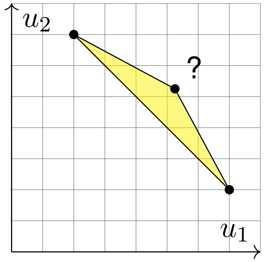
	s_3	s_1	s_2	s_0	
z	-2	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$	2
x_1	$-1/3$	0	$-1/3$	$1/3$	$1/3$
x_2	$-1/3$	$1/3$	0	$-1/3$	$1/3$
x_0	$-1/3$	$-1/3$	$1/3$	0	$1/3$
z	-2	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$	2

Eine Lösung ist $x^\intercal = (x_0, x_1, x_2, z) = (1/3, 1/3, 1/3, 2)$. Sie ist eindeutig.
Wurde richtig gerechnet? Zertifikat $y = (s_0, s_1, s_2, s_3) = (1/3, 1/3, 1/3, 2)$.
Es gilt $x \ge 0$ und $Ax + b \ge 0$ sowie $y \ge 0$ und $yA + c \le 0$ mit $cx = yb$.

Berechnung von korrelierten Gleichgewichten

Aufgabe: Analysieren Sie das folgende Spiel *Feige-oder-mutig*.

A \ B	feige	mutig
feige	x_0: 6, 6	x_1: 2, 7
mutig	x_2: 7, 2	0, 0



Welche korrelierten Gleichgewichte $x \in \Delta^2$ maximieren $u_1 + u_2$?
(1) Schreiben Sie das Problem explizit als ein lineares Programm.
(2) Finden Sie eine Lösung. Ist sie eindeutig? Finden Sie ein Zertifikat!

Ziel in (1) ist, die Ungleichungen der Definition C2c auszuschreiben, so wie wir dies bereits zu Beginn dieses Kapitels wiederholt haben. Wir haben nun alle Techniken, dies anschließend in Teil (2) zu lösen.

Berechnung von korrelierten Gleichgewichten

(1) Wir erhalten folgendes System linearer Ungleichungen:

$$\begin{aligned} u &= 12x_0 + 9x_1 + 9x_2 \to \max!, & x_0 &\geq 0, & y_0 &= -x_0 + 2x_1 &&\geq 0,\\ && x_1 &\geq 0, & y_1 &= -x_0 + 2x_2 &&\geq 0,\\ && x_2 &\geq 0, & y_2 &= 1 - x_0 - x_1 - x_2 &&\geq 0. \end{aligned}$$

(2) Wir schreiben dies als Tableau $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und lösen das LP:

	x_0	x_1	x_2	
y_0	-1	2	0	0
y_1	-1	0	2	0
y_2	-1	-1	-1	1
u	12	9	9	0

$\Longleftrightarrow$

	y_0	x_1	x_2	
x_0	-1	2	0	0
y_1	1	-2	2	0
y_2	1	-3	-1	1
u	-12	33	9	0

$\Longleftrightarrow$

	y_0	y_1	x_2	
x_0	0	-1	2	0
x_1	$1/2$	$-1/2$	1	0
y_2	$-1/2$	$3/2$	-4	1
u	$9/2$	$-33/2$	42	0

$\Longleftrightarrow$

	y_0	y_1	y_2	
x_0	$-1/4$	$-1/4$	$-1/2$	$1/2$
x_1	$3/8$	$-1/8$	$-1/4$	$1/4$
x_2	$-1/8$	$3/8$	$-1/4$	$1/4$
u	$-3/4$	$-3/4$	$-21/2$	$21/2$

Berechnung von korrelierten Gleichgewichten

Eine Lösung ist $x = (x_0, x_1, x_2)^\intercal = (1/2, 1/4, 1/4)^\intercal$. Sie ist eindeutig.
Wurde richtig gerechnet? Zertifikat $y = (y_0, y_1, y_2) = (3/4, 3/4, 21/2)$.
Es gilt $x \geq 0$ und $Ax + b \geq 0$ sowie $y \geq 0$ und $yA + c \leq 0$ mit $cx = yb$.

🙂 Auch hier können wir das Ergebnis schnell und sicher überprüfen. Das ist mehr als ein einfacher Plausibilitätscheck, es ist ein Beweis! Die ausführliche Rechnung benötigen wir, um die Lösung zu *finden*. Anschließend können wir die Rechnung vergessen, das ist vielleicht schade, aber sie ist entbehrlich: Das Ergebnis ist nachweislich richtig!

Aufgabe: Lösen Sie ebenso folgende Varianten dieses Problems:
(3) Welche korrelierten Gleichgewichte $x \in \Delta^2$ minimieren $u_1 + u_2$?
(4) Welche korrelierten Gleichgewichte $x \in \Delta^2$ max/minimieren u_1?
(5) Welche korrelierten Gleichgewichte $x \in \Delta^2$ max/minimieren u_2?
Finden Sie eine Lösung. Ist sie eindeutig? Finden Sie ein Zertifikat!

Lösung: Die obige Graphik suggeriert Ihnen jeweils die Lösung(en). Wirkliche Sicherheit erlangen Sie nur durch eigenes Rechnen.

Berechnung von korrelierten Gleichgewichten

Wir variieren die vorige Aufgabe, indem wir die Vereinfachung $x_3 = 0$ fallen lassen und das allgemeine Problem untersuchen:

A \ B	feige	mutig
feige	x_0: 6, 6	x_1: 2, 7
mutig	x_2: 7, 2	x_3: 0, 0

Aufgabe: Finden Sie alle korrelierten Gleichgewichte $x \in \Delta^3$, die
(1) $u_1 + u_2$ max/minimieren, ebenso (2) u_1 und symmetrisch (3) u_2.
Schreiben Sie das Problem explizit als ein lineares Programm.
Finden Sie eine Lösung. Ist sie eindeutig? Finden Sie ein Zertifikat!

Beispiel zum Simplex-Verfahren (Klausur 2018)

Aufgabe: Gegeben ist das lineare Programm $x \geq 0,\ Ax + b \geq 0$, $u(x) = cx + d \to \max!$, kurz $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ wie in folgendem Tableau.

	x_1	x_2	v
y_1	-1	0	3
y_2	-1	-1	5
y_3	1	-2	4
u	$\alpha{=}2$	1	1

$\Longleftrightarrow$

	y_1	x_2	v
x_1	-1	0	3
y_2	1	-1	2
y_3	-1	-2	7
u	-2	1	7

(1) Führen Sie den letzten Basiswechsel zur optimalen Form aus.

(2) Bestimmen Sie eine zertifizierte Lösung (x, y) und das Maximum u. Prüfen Sie explizit jede der hierfür relevanten Un/Gleichungen.

(3) Zeichnen Sie zur Kontrolle die Erfüllungsmenge $P(A, b)$. Welche Teile der Lösung (2) können Sie daran ablesen?

(4) Wir ersetzen im ursprünglichen LP den Koeffizienten 2 durch $\alpha \in \mathbb{R}$. Nennen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das LP *unendlich viele* Lösungen hat.

(5) Wie verläuft der Simplex-Algorithmus in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$?

Beispiel zum Simplex-Verfahren (Klausur 2018)

Lösung: (1) Es genügt ein letzter Basiswechsel zur optimalen Form:

	y_1	x_2	v
x_1	-1	0	3
y_2	1	-1	2
y_3	-1	-2	7
u	-2	1	7

$\Longleftrightarrow$

	y_1	y_2	v
x_1	-1	0	3
x_2	1	-1	2
y_3	-3	2	3
u	-1	-1	9

(2) Der Punkt $x = (3, 2)^\intercal \geq 0$ erfüllt $Ax + b = (0, 0, 3)^\intercal \geq 0$, ist also primal zulässig. Der Punkt $y = (1, 1, 0) \geq 0$ erfüllt $yA + c = (0, 0) \leq 0$, ist also dual zulässig. Die zugehörige untere Schranke $u(x) = cx + d = 9$ und die obere Schranke $v(y) = yb + d = 9$ stimmen beide überein!

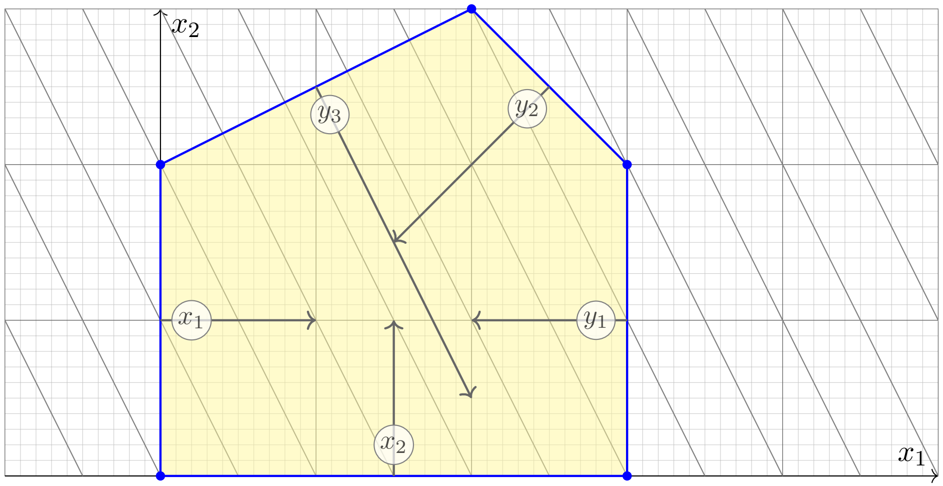
🙂 Somit ist (x, y) eine zertifizierte Lösung und $\max u = 9$.

Mit dem eigentlichen (primalen) Problem löst das Simplex-Verfahren zusätzlich und gratis auch das duale Problem. *Solve one, get one free!*

Dies nutzen wir dankend zur Zertifizierung, ganz ohne Mehraufwand. So prüfen Sie Ihre eigene Rechnung: Jeder Irrtum wird erkannt!

Beispiel zum Simplex-Verfahren (Klausur 2018)

(3) Die Erfüllungsmenge $P(A, b) = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ Ax + b \geq 0 \,\}$:



🙂 Mit nur zwei freien Variablen x_1, x_2 erhalten wir ein ebenes Problem. In diesem glücklichen Spezialfall können wir das LP graphisch lösen. Die duale Lösung y ist schwerer zu sehen, bestenfalls zu erahnen.

Beispiel zum Simplex-Verfahren (Klausur 2018)

(4) Der Skizze entnehmen wir $\alpha = 1$ und $\alpha = -1/2$. Weitere gibt es nicht.

🙂 Das können Sie graphisch leicht ablesen. Ebenso algebraisch, aber subtiler, indem Sie auf lineare Abhängigkeit prüfen. Sehen Sie wie?

(5a) Die Graphik erklärt sehr eindrücklich die Rechnung: Für $\alpha > 1$ führen die Basiswechsel $x_1 \leftrightarrow y_1$ und $x_2 \leftrightarrow y_2$ zur optimalen Form.

(5b) Für $-1/2 < \alpha < 1$ genügen die Basiswechsel $x_2 \leftrightarrow y_3$ und $x_1 \leftrightarrow y_2$.

(5c) Für $\alpha < -1/2$ genügt bereits der Basiswechsel $x_2 \leftrightarrow y_3$.

(5ab) Im Grenzfall $\alpha = 1$ sind beide Wege (a) und (b) möglich.

(5bc) Im Grenzfall $\alpha = -1/2$ sind beide Wege (b) und (c) möglich.

🙂 Führen Sie die expliziten Rechnungen als Übung aus! So erfahren Sie die Methode. Rechnen reinigt die Seele.

Kapitel E

Dynamische Spiele und Teilspielperfektion

Quidquid agis, prudenter agas et respice finem!
Was immer du tust, handele klug und bedenke das Ende!

Inhalt dieses Kapitels

Motivation und Überblick

In den vorigen Kapiteln haben wir **statische Spiele** untersucht. Die Normalform erlaubt eine elegante und einfache Beschreibung:

$$u : \prod_{i \in I} S_i \to \prod_{i \in I} R_i$$

Das entspricht Situationen, in denen die Akteure gleichzeitig handeln, oder zumindest in Unkenntnis des Handelns der anderen Akteure.

Für viele Spiele ist dieses spezielle Modell vollkommen angemessen, etwa Schere-Stein-Papier und viele der zuvor diskutierten Beispiele.

Für andere Spiele wiederum ist diese Beschreibung nicht realistisch: Spiele mit zeitlicher Struktur, in denen Spieler nacheinander ziehen und auf die vorigen Züge der Gegenspieler reagieren können / müssen.

Wir wenden uns nun dieser Erweiterung zu **dynamischen Spielen** zu. Ich beginne, wie immer, mit einführenden Beispielen. Diese sind sehr einfach, umreißen aber anschaulich Tragweite und Schwierigkeiten.

Motivation und Überblick

Es ist keineswegs offensichtlich, wie wir die vielgestaltigen Einzelfälle in geeigneter **Beschreibung** zusammenfassen und formalisieren können. Wir diskutieren dies anhand von zwei sehr ähnlichen Modellen:

1. Physikalische Vorbilder suggerieren ein dynamisches System unter dem Einfluss von Spieleraktionen und Zufallszügen.
2. Spielbäume führen zu dynamischen Spielen in extensiver Form. Diese Beschreibung ist in der Spieltheorie weit verbreitet.

Ein wichtiger Schritt ist die Verfeinerung von Nash–Gleichgewichten zu **teilspielperfekten Gleichgewichten**. Damit können wir viele Konfliktsituationen realistisch modellieren und wesentlich genauer analysieren.

Häufig haben Spieler nur **unvollständige Information**, und dies ist ein wichtiger Aspekt des Spiels. Ich werde hier bereits die ersten Begriffe erläutern, aber eine genauere Untersuchung auf später verschieben.

Für endliche Spiele mit vollständiger Information konstruieren wir Gleichgewichte durch **Rückwärtsinduktion** nach Ernst Zermelo.

Beispiel: Kuchen teilen

E101

Aufgabe: Zwei Kinder, Alice und Bob, teilen sich einen Schokokuchen. Damit es gerecht zugeht, gibt der Vater vor: Alice teilt, Bob wählt aus.

Formalisieren Sie dies als strategisches Spiel mit Strategiemengen $S_1 = \{1, 2, \dots, 999\,999\}$ für die Aufteilung $(1\,000\,000 - x, x)$ in mg und $S_2 = \{\text{wähle Min}, \text{wähle Max}\}$. Finden Sie alle Nash–Gleichgewichte!

Lösung: Wir schreiben die Auszahlungsmatrix explizit aus:

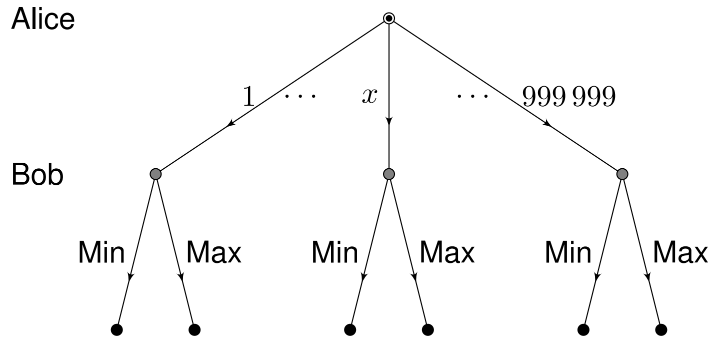
A \ B	wähle Min	wähle Max
$x < 500\,000$	$1\,000\,000 - x$ \ x	x \ $1\,000\,000 - x$
$x = 500\,000$	$500\,000$ \ $500\,000$	$500\,000$ \ $500\,000$
$x > 500\,000$	x \ $1\,000\,000 - x$	$1\,000\,000 - x$ \ x

Die Teilung „Halbe-Halbe“ ist hier das einzige Nash–Gleichgewicht, also das Strategiepaar (s_1, s_2) mit $s_1 = 500\,000$ und $s_2 =$ wähle Max.

Beispiel: Kuchen teilen

E102

Wir können die zeitliche Struktur durch einen Spielbaum darstellen:



Blätter $=$ terminale Zustände $\mapsto$ Auszahlung

Ein Strategiepaar (s^1, s^2) legt für jede Ecke den nächsten Zug fest. Jede Ecke e dieses Baumes definiert ein Teilspiel $u_e : S^1 \times S^2 \to \mathbb{R}^2$. Teilspielperfekt: Das Paar (s^1, s^2) ist ein Gleichgewicht für jede Ecke e. Das ermöglicht eine feinere Beschreibung, hier mit demselben Ergebnis.

Beispiel: die Erbschaft

E103

Aufgabe: Alice und Bob erben $1\,000\,000$€ und müssen teilen. Alice bietet $x \in S_1 := \{1, 2, \dots, 999\,999\}$ für Bob, somit $1\,000\,000 - x$ für sich. Bob fordert $y \in S_2 := \{1, 2, \dots, 999\,999\}$ für sich. Bei Einigung $(x \ge y)$ tritt die Aufteilung $(1\,000\,000 - x, x)$ in Kraft, andernfalls verfällt das Erbe.

(1) Formalisieren Sie dies als ein strategisches Spiel in Normalform. Finden Sie alle Gleichgewichte! Finden Sie alle Dominanzen. Was sind die Sicherheitsstrategien für Bob? für Alice?

Untersuchen Sie anschließend folgende dynamischen Varianten:
(2) Alice bietet zuerst, öffentlich und unwiderruflich / notariell.
(3) Bob fordert zuerst, öffentlich und unwiderruflich / notariell.

Lösung: (1) Die Auszahlung $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$u(x, y) = \begin{cases} (1\,000\,000 - x, x) & \text{falls } x \ge y, \\ (0, 0) & \text{falls } x < y. \end{cases}$$

Jedes Paar $(x, y) \in S_1 \times S_2$ mit $x = y$ ist ein Nash–Gleichgewicht. Im Falle $x > y$ kann Alice sich verbessern, im Falle $x < y$ beide.

Beispiel: die Erbschaft

E104
Erläuterung

(2) Das Modell aus (1) erlaubt weder zeitliche Struktur noch Festlegung. Angenommen, Alice hat sich auf ein Angebot $(1\,000\,000 - x, x)$ festgelegt. Dann ist es für Bob rational, dieses zu akzeptieren, egal wie gering.

(3) Angenommen, Bob hat sich auf eine Forderung $\ge y$ festgelegt. Dann ist es für Alice rational, genau diese zu erfüllen, egal wie hoch. Hier ist die Verhandlungsmacht von Bob größer als die von Alice!

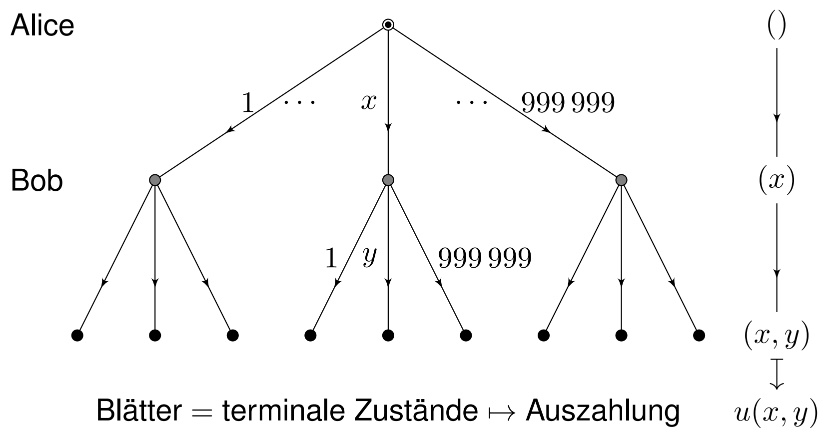
Wir gehen hier davon aus, dass Alice und Bob streng rational sind. Getreu dem Motto: „Wer den Euro nicht ehrt, ist das Erbe nicht wert.“

In realen Situationen werden beide verhandeln, appellieren und drohen. Liegen Angebot bzw. Forderung erst einmal fest, dann bleibt als einzige rationale Strategie nur noch, das zähneknirschend zu akzeptieren. Selbst ein kleiner Gewinn ist besser als gar kein Gewinn.

⚠ Die Analyse ergibt drei gänzlich unterschiedliche Ergebnisse. Die zeitliche Struktur ist hier wesentlich. Dies wollen wir nun ebenfalls in unseren Modellen kodieren und den Begriff des Nash–Gleichgewichts entsprechend verfeinern zu teilspielperfekten Gleichgewichten.

Beispiel: die Erbschaft

(2) Wir können die zeitliche Struktur durch einen Spielbaum darstellen:



Ein Strategiepaar (s^1, s^2) legt für jede Ecke den nächsten Zug fest.
Jede Ecke e dieses Baumes definiert ein Teilspiel $u_e : S^1 \times S^2 \to \mathbb{R}^2$.
Teilspielperfekt: Das Paar (s^1, s^2) ist ein Gleichgewicht für jede Ecke e.

Beispiel: die Erbschaft

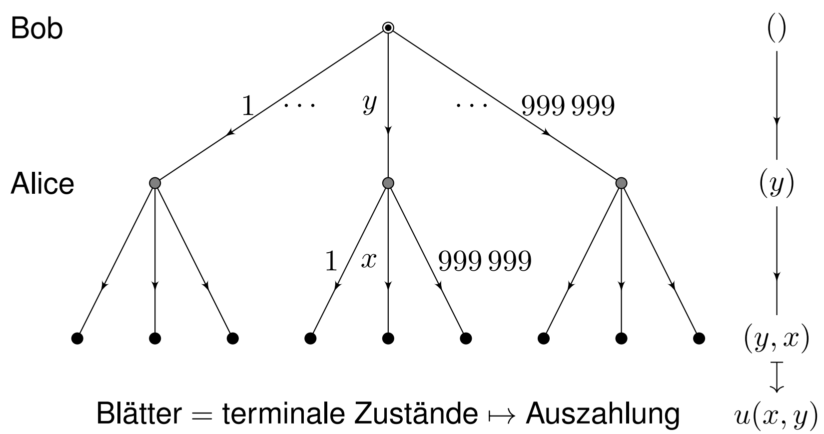
Alice hat im ersten Zug die Aktionsmenge $A^1_{()} = A^1 = \{1, \dots, 999\,999\}$.
Im zweiten Zug schaut sie nur zu, demnach gilt $A^1_{(x)} = \{*\}$ für alle x.
Bob schaut im ersten Zug nur zu, also $A^2_{()} = \{*\}$. Im zweiten Zug hat Bob in jedem Zustand x die Aktionsmenge $A^2_{(x)} = A^2 = \{1, \dots, 999\,999\}$.

Alice wählt $s^1_{()} \in A^1_{()}$ und anschließend notgedrungen $s^1_{(x)} = * \in A^1_{(x)}$.
Bob wählt notgedrungen $s^2_{()} = * \in A^2_{()}$ und anschließend $s^2_{(x)} \in A^2_{(x)}$.
Bobs Strategie ist demnach eine Abbildung $s^2 : A^1 \to A^2 : x \mapsto s^2_{(x)}$.
Das Paar (s^1, s^2) bestimmt den Spielverlauf und die Auszahlung.

1. Was sind die Nash–Gleichgewichte (s^1, s^2) für das Spiel $u_{()}$?
   Alice bietet den kleinsten Betrag x, den Bob noch akzeptiert:
   Für $x = s^1_{()}$ gilt $s^2_{(x)} \le x$, aber für alle $y < x$ gilt $s^2_{(y)} > y$.
2. Was sind die Nash–Gleichgewichte (s^1, s^2) für das Teilspiel $u_{(x)}$?
   Für den vorgegebenen Startzustand (x) muss $s^2_{(x)} \le x$ gelten.
3. Was sind die teilspielperfekten Gleichgewichte (s^1, s^2)?
   Es gilt $s^2_{(x)} \le x$ für alle x und somit $s^1_{()} = 1$.

Beispiel: die Erbschaft

(3) Wir können die zeitliche Struktur durch einen Spielbaum darstellen:



Ein Strategiepaar (s^1, s^2) legt für jede Ecke den nächsten Zug fest.
Jede Ecke e dieses Baumes definiert ein Teilspiel $u_e : S^1 \times S^2 \to \mathbb{R}^2$.
Teilspielperfekt: Das Paar (s^1, s^2) ist ein Gleichgewicht für jede Ecke e.

Beispiel: die Erbschaft

Aufgabe: Untersuchen Sie die drei Varianten des Erbschaftsspiels mit $S_1 = S_2 = \{0, 1, \dots, 1\,000\,000\}$. Die Randfälle sind etwas kniffliger.

Im Beispiel der Erbschaft ist es vorteilhaft, als erster am Zug zu sein: Der erste Spieler kann / muss sich festlegen und dabei frei entscheiden, der zweite kann dann nur noch reagieren und das Ergebnis akzeptieren. Hier ist es vorteilhaft voranzugehen und sich unwiderruflich festzulegen. Man nennt dies Selbstbindung, engl. *commitment* oder *burning bridges*.

Aufgabe: Untersuchen Sie weitere Spiele mit zeitlicher Struktur. Ist es immer vorteilhaft, als erster zu ziehen und sich festzulegen?

Lösung: Keineswegs! Bei *Schere-Stein-Papier* ist es extrem ungünstig, geradezu lächerlich, seine Strategie festzulegen und bekanntzugeben. Hingegen wäre es unproblematisch, wenn der erste Spieler seine Wahl festlegt (auslost), diese aber dem zweiten Spieler nicht bekannt gibt.

Aufgabe: Analysieren Sie die beiden vorigen Spielbäume mit der Variante, dass der zweite Spieler die Aktion des ersten nicht kennt. Anschaulich: Der Brief an den Notar bleibt zunächst geheim.

Beispiel: Investition und Rendite

Wir betrachten eine **Investition**, etwa ein Konto, Kredit, Fonds, o.ä.:

$$\text{Start } x_0, \quad \text{Dynamik } x_{t+1} = \begin{cases} (1+r_t^+)(x_t+a_t) & \text{falls } x_t+a_t \geq 0, \\ (1+r_t^-)(x_t+a_t) & \text{falls } x_t+a_t < 0. \end{cases}$$

Zustand: $x_t \in \mathbb{R}$ ist der Kontostand zu Beginn des Tages $t \in \mathbb{N}$.
Aktion: $a_t \in \mathbb{R}$ ist die Einzahlung / Abhebung im Laufe des Tages t.
Dynamik: Zinssatz $r_t^\pm \in \mathbb{R}$ für Guthaben bzw. für Schulden.
Allgemein **Differenzengleichung** mit Steuerung a:

$$x_{t+1} = x_t + f_t(x_t, a_t) \quad \overset{\text{Bsp}}{=} \quad x_t + r_t^\pm x_t + (1+r_t^\pm) a_t$$

Zeitkontinuierlich **Differentialgleichung** mit Steuerung a:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), a(t)) \quad \overset{\text{Bsp}}{=} \quad r_t^\pm x_t + a_t$$

Beispiel: Investition und Rendite

Ohne Spieler ist dies ein dynamisches System im klassischen Sinne.
Bei nur einem Spieler handelt es sich um ein Optimierungsproblem.
Bei mehreren Spielern ist dies die Grundidee der Differentialspiele.

Dieses Modell ist zwar noch allzu einfach, aber durchaus illustrativ.
Die Zinsrate $r_t^\pm$ kann konstant sein, oder variabel aber deterministisch (vertraglich oder gesetzlich festgelegt) oder aber zufällig (stochastisch).
Sie beeinflussen das System nur über ihren Steuerparameter a_t.
Sie kennen nur die bisherige Trajektorie, nicht die Zukunft.

An der Börse begegnen Sie einer naheliegenden Verallgemeinerung:
Sie verwalten Fonds $x^1, \dots, x^N$, also $x \in \mathbb{R}^N$. Die Dynamik ist wie zuvor.
Der Faktor $(1 + r_t)$ entspricht den (zufälligen) Kursschwankungen.
Die Ein- und Auszahlungen a_t entsprechen den An- und Verkäufen.
Eine Handelsstrategie gibt zu jedem Zustand x die nächste Aktion vor.

Für die Börse ist das Ein-Spieler-Modell sinnvoll, solange der Markt groß und jeder Spieler klein ist. Ein feineres Modell behandelt alle n Akteure.
Diese beeinflussen sich gegenseitig, wie bei n-Personen-Spielen üblich.

Kybernetik: Steuerung eines Systems

Der **Zustand** $x_t \in \mathbb{R}^N$ beschreibt das System zur Zeit $t \in \mathbb{Z}$. Darauf wirken zufällige Einflüsse ω_t und die Steuerparameter a_t^i der Spieler:

$$x_{t+1} = f_t(x_t, \omega_t, a_t^1, \dots, a_t^n)$$

Bei kontinuierlicher Zeit $t \in \mathbb{R}$ formulieren wir dies als **Differentialspiel**:

$$\dot{x}_t = f(t, x_t, \omega_t, a_t^1, \dots, a_t^n)$$

Sie wollen die Trajektorie in gewissen Grenzen halten oder möglichst schnell ein gewisses Ziel erreichen. Die Erreichung Ihres Ziel wird gemessen durch eine Nutzenfunktion $u : \{\text{Trajektorien}\} \to \mathbb{R}^n$,
im einfachsten Fall eine Auszahlung $u : \{\text{Endzustand}\} \to \mathbb{R}^n$.

Kybernetik: Steuerung eines Systems

Neben finanzmathematischen Anwendungen gibt auch
die Steuerung physikalische Systeme wichtige Beispiele:

Für $n = 1$ denke man (deterministisch oder stochastisch) an die zentrale **Steuerung** eines Autos, Schiffs, Flugzeugs, Raumschiffs, einer Drohne, oder einer Hausheizung, einer Industrieanlage, eines Kraftwerks, etc.

Bei mehreren Spielern ($n \geq 2$) denke man an n **autonome Fahrzeuge**:
Jedes wird von einem Spieler gesteuert, ihre Aktionen bestimmen den Gesamtzustand, dieser wirkt auf die einzelnen Akteure zurück.

Beim **autonomen Fahren** im engeren Sinne wird dies automatisiert, zum Beispiel durch mobile Roboter oder fahrerlose Transportsysteme, die sich weitgehend autonom verhalten und somit auch dezentral.
Damit haben wir eine typische Situation der Spieltheorie!

Wie formalisieren wir dynamische Spiele?

Wir suchen eine **einheitliche Beschreibung** (Schablone) für alle Fälle:

- Stochastische Prozesse, finanzmathematische Systeme, etc.
- Physikalische Prozesse, kybernetische Systeme, etc.
- Soziale Prozesse, ökonomisch-politische Systeme, etc.
- Kartenspiele, Brettspiele, Gesellschaftsspiele, etc.

Solch große Allgemeinheit erfordert das rechte Maß an **Abstraktion**. Wenn nicht *alle*, so wollen wir doch möglichst *viele* Probleme abbilden.

Zugleich wollen wir **Lösungskonzepte** präzise formulieren und kritisch erproben, hier insbesondere teilspielperfekte Gleichgewichte.

Ich spreche vorsichtig von *Schablone* oder *Vorlage* (engl. *template*). Sie soll zunächst ermöglichen, viele verschiedene Beispiele in einer gemeinsamen Sprech- und Sichtweise zu erfassen. Aufbauend wollen wir dann wiederkehrende Regeln als Sätze formulieren und beweisen.

Wie formalisieren wir dynamische Spiele?

Das ist das übliche **axiomatische Vorgehen** in der Mathematik: Wir wollen Beispiele und Einzelfälle möglichst effizient bündeln. Denkökonomie: Daten ändern sich, Methoden bleiben bestehen.

Sie sollen nicht nur *Beispiele* lernen, sondern zugleich *Methoden*! Zum Erfolg benötigen Sie meist beides: sowohl handfeste Beispiele als auch die zugrundeliegende Theorie, wie linke und rechte Hand!

Mathematik ist zugleich abstrakte **Theorie** und konkrete **Anwendung**. Sie erklärt und quantifiziert Zusammenhänge: Das ist ihr Nutzen! Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke!

Abstraktion ist die Kunst, Wesentliches von Unwesentlichem zu trennen. Abstraktion strukturiert und vereinfacht: Eine allgemeine Tatsache ist oft leichter zu verstehen und zu erklären als ihre zahlreichen Spezialfälle.

Wie formalisieren wir dynamische Spiele?

Eine **Spielanleitung** muss folgende Fragen beantworten:

- Was sind die möglichen Spielzustände?
- Welche sind terminal und was wird ausgezahlt?
- Wer spielt? Wer hat wann welche möglichen Aktionen?
- Konsequenzen: Wie geht das Spiel dann weiter?
- Informationsstruktur: Wer weiß wann was?

Das sind die **Mindestanforderungen** an jede Spielbeschreibung:

Sie muss vollständig sein, so dass wir das Spiel damit durchführen können, ohne jemals weitere Regeln erfragen oder erfinden zu müssen.

Sie muss vor Spielbeginn vorliegen, so dass jeder Spieler seine Ziele und Möglichkeiten kennt und möglichen Strategien analysieren kann.

Wie formalisieren wir dynamische Spiele?

Die Anleitung wünschen wir uns möglichst kurz und übersichtlich. Doch wie detailliert und formal muss sie ausgeführt werden? Einfaches Kriterium: Sie sollte vollkommen klar und eindeutig sein, so dass wir das Spiel auf einem Computer **programmieren** können.

Es bleiben uns dabei noch einige Freiheiten, wie wir das Spiel als Mechanismus **implementieren** und so die Anforderungen erfüllen. Jede Implementierung ist akzeptabel, solange sie das Pflichtenheft erfüllt und die dort erklärten Spielregeln treu umsetzt.

Ich werde die Formalisierung im Folgenden auf zwei Arten durchführen: Zunächst mit einem beliebigen Zustandsraum (kybernetische Form) und dann mit einem Spielbaum (extensive Form).

Die Sichtweise und Akzentsetzung ist in beiden Fällen etwas anders. Beide sind ähnlich und in gewissem Sinne äquivalent, wie wir sehen. Die Praxis wird Vor- und Nachteile beider Zugänge illustrieren.

Dynamische Spiele mit diskreter Zeit

(0) Ein zeitdiskretes **dynamisches System** (X, f) besteht aus einem **Zustandsraum** X und der **Dynamik** $f : X \to X$. Der Startpunkt $x_0 \in X$ und die Rekursion $x_{t+1} = f(x_t)$ führen zur Trajektorie $x : \mathbb{N} \to X : t \mapsto x_t$.

Dies ist der zeitliche Verlauf der Zustände, zunächst deterministisch ohne Zufallsaktionen und ohne Einflussnahme durch etwaige Spieler.

Interessant sind Fixpunkte, Grenzwerte, Genzzykel, Stabilität, etc.

Sonst ist es recht langweilig, es passiert kaum je überraschendes, Sie können es nicht beeinflussen, und es hört auch nie auf. (Lavalampe)

Zur Verfeinerung dieses Basismodells wünschen wir uns:

(1) **Terminale Zustände:** Wir nutzen eine partielle Abbildung $f : X \supset X^\circ \to X$ und zerlegen den Zustandsraum $X = X^\circ \sqcup \partial X$ in **Inneres** X° und **Rand** ∂X, genannt **aktive** und **terminale** Zustände.

Jede **Trajektorie** $x : \{0, 1, \dots, T\} \to X$ erfüllt $x_{t+1} = f(x_t)$ für $0 \le t < T$, sie ist **fortsetzbar** falls $x_T \in X^\circ$, andernfalls **maximal** für $x_T \in \partial X$.

Terminale Zustände führen schließlich zur Auszahlung $u : \partial X \to \mathbb{R}^I$. Das entspricht unserer alltäglichen Vorstellung eines **endlichen Spiels**.

Dynamische Spiele mit diskreter Zeit

(2) **Steuerung:** Sei I die Menge der Spieler. Wer spielt wann was?

Zu jedem aktiven Zustand $x \in X^\circ$ haben wir mögliche Spieleraktionen $A_x = \prod_{i \in I} A_x^i \ne \emptyset$ und die Abbildung $f_x : A_x \to X$ zur Fortsetzung. Zusammengefasst erhalten wir so die gesteuerte Dynamik:

$$f \;:\; \bigcup\nolimits_{x \in X^\circ} \{x\} \times A_x \to X \;:\; (x, a) \mapsto f_x(a)$$

Bei einelementiger Menge $A_x^i = \{*\}$ hat der Spieler i keinen Einfluss.

Eine **Strategie** für Spieler i ist ein Element $s^i \in S^i := \prod_{x \in X^\circ} A_x^i$, also eine Abbildung $s^i : X^\circ \to A^i := \bigcup_{x \in X^\circ} A_x^i$ mit $x \mapsto s_x^i \in A_x^i$.

Ein **Strategievektor** ist demnach $s \in S := \prod_{i \in I} S^i \cong \prod_{x \in X^\circ} A_x$.

Rekursion: Aus **Startzustand** $x_0 \in X$ und Strategievektor $s \in S$ folgt der **Spielverlauf** $x : \{0, 1, \dots, T\} \to X$ gemäß $x_{t+1} = f(x_t, s_{x_t})$.

Die Strategie $s^i \in S^i = \prod_{x \in X^\circ} A_x^i$ legt für jeden Spielstand $x \in X^\circ$ fest, wie Spieler i sich verhalten wird, also welche Aktion s_x^i er spielen wird. Der Spieler entscheidet sich also nicht spontan, sondern im Voraus. Vorteil: Aus $s = (s^i)_{i \in I}$ lässt sich der gesamte Spielverlauf berechnen.

Dynamische Spiele mit diskreter Zeit

(3) **Zufall:** Wie spielt der Zufall / die Natur / das Schicksal?

Wir haben Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega_x, \mathbf{P}_x)$ und die Dynamik

$$f \;:\; \bigcup\nolimits_{x \in X^\circ} \{x\} \times \Omega_x \times A_x \to X \;:\; (x, \omega, a) \mapsto f_x(\omega, a).$$

Bei einelementiger Menge $\Omega_x = \{*\}$ hat der Zufall keinen Einfluss. Wir betrachten den Zufall als zusätzlichen Spieler (Natur, Schicksal): Er folgt keiner Gewinnmaximierung, sondern der WVerteilung $\mathbf{P}_x$.

In jedem Zustand $x \in X^\circ$ erfolgt eine Ziehung $\omega_x \in \Omega_x$. Diese müssen nicht unabhängig sein, daher betrachten wir $(\Omega, \mathbf{P})$ und $p_x : \Omega \twoheadrightarrow \Omega_x$.

Rekursion: Aus **Startzustand** $x_0 \in X$, Zufallselement $\omega \in \Omega$ und Strategievektor $s \in S$ folgt der **Spielverlauf** $x : \{0, 1, \dots, T\} \to X$ gemäß $x_{t+1} = f(x_t, \omega_{x_t}, s_{x_t})$. Er ist maximal, falls $x_T \in \partial X$.

Kein Spieler, $I = \emptyset$: dynamisches System, evtl. stochastisch (Markov).
Ein Spieler, $I = \{*\}$: Kybernetik, Kontrolltheorie, evtl. stochastisch.
Mehrere Spieler, $|I| \ge 2$: dynamisches Spiel, evtl. stochastisch.

Dynamische Spiele mit diskreter Zeit

Zur Wiederholung: Die Daten $(X, \Omega, \mathbf{P}, p, I, A, f)$ definieren die Dynamik

$$f \;:\; \bigcup\nolimits_{x \in X^\circ} \{x\} \times \Omega_x \times A_x \to X \;:\; (x, \omega, a) \mapsto f_x(\omega, a).$$

Die Variable $x \in X^\circ$ beschreibt den aktuellen Zustand des Spiels. Darauf wirken zufällige Einflüsse $\omega_x \in \Omega_x$ gemäß der WVerteilung $\mathbf{P}$ und der von jedem Spieler $i \in I$ gewählte Steuerparameter $a_x^i \in A_x^i$. Hieraus ergibt sich der nächste Zustand $x' = f(x, \omega_x, a_x)$ und so fort.

Dies können wir iterieren. Hierzu benötigen wir neben dem Startzustand $x \in X^\circ$ auch das Zufallselement $\omega \in \Omega$ und den Strategievektor $s \in S$. Zusammenfassend erhalten wir die Dynamik

$$F \;:\; X^\circ \times \Omega \times S \to X \times \Omega \times S \;:\; (x, \omega, s) \mapsto (f(x, \omega_x, s_x), \omega, s).$$

In Analogie zu Differentialgleichungssystemen $\dot{x} = f(x)$ bzw. $f(x, \omega, s)$ parametrisieren die Einflüsse (ω, s) das Vektorfeld auf der rechten Seite. Wir betrachten hier zur Vereinfachung nur zeitdiskrete Systeme; alle Ideen übertragen sich auf kontinuierliche Systeme, aber aufwändiger.

Dynamische Spiele mit diskreter Zeit

(4) **Informationsstruktur:** Wer weiß wann was?
Den individuellen Kenntnisstand von Spieler i beschreiben wir durch eine Projektion $q^i : X^{\circ i} \twoheadrightarrow X^i : x \mapsto x^i$, genannt Auskunft (*query*).

Hier ist $X^{\circ i} := \{\, x \in X^\circ \mid |A^i_x| \ge 2 \,\}$ die Menge der i–aktiven Zustände. Zum Spielstand $x \in X^{\circ i}$ ist $q^i(x) = x^i \in X^i$ das Wissen von Spieler i: Zustände $x, y \in X^{\circ i}$ mit $q^i(x) = q^i(y)$ sind für ihn ununterscheidbar.

Dies definiert auf $X^{\circ i}$ eine Äquivalenzrelation $x \overset{i}{\sim} y$ durch $q^i(x) = q^i(y)$. Umgekehrt definiert jede Äquivalenzrelation $\overset{i}{\sim}$ auf $X^{\circ i}$ den Quotienten $q^i : X^{\circ i} \twoheadrightarrow X^i := X^{\circ i}/\overset{i}{\sim}$. Beide Sichtweisen sind gleichwertig.

Wir fordern dann $A^i_x = A^i_y$ für alle Zustände $x \overset{i}{\sim} y$ in $X^{\circ i}$, und ebenso

$$S^i := \Big\{\, s^i \in \textstyle\prod_{x \in X^\circ} A^i_x \;\Big|\; s^i_x = s^i_y \text{ falls } x \overset{i}{\sim} y \text{ in } X^{\circ i} \,\Big\}.$$

Spieler i kann seine Aktion $s^i_x \in A^i_x$ nur aus seiner Kenntnis x^i ableiten.

Im Falle $q^i = \mathrm{id}_{X^{\circ i}} : X^{\circ i} \to X^{\circ i}$ ist $\overset{i}{\sim}$ trivial, Spieler i hat vollständige Information, und seine Strategien unterliegen keiner Einschränkung.

Dynamische Spiele mit diskreter Zeit

Kennt jeder Spieler $i \in I$ jederzeit den Zustand $x \in X$ des Spiels, so sprechen wir von **vollständiger Information** (*perfect information*). Im Allgemeinen kennt Spieler i nur einen kleinen Auszug des gesamten Spielzustands; wir sprechen dann von **unvollständiger Information**.

Bei vielen Spielen macht gerade dieser Umstand den besonderen Reiz: Bei vielen Kartenspielen (Skat, Doppelkopf, Poker, etc.) kennt jeder nur seine eigene Hand, nicht aber die der anderen (Mit-/Gegen-)Spieler. Ebenso verhält es sich bei vielen Gesellschaftsspielen.

Auch für Anwendungen in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften ist die unvollständige Information häufig ein entscheidender Faktor. Jeder Spieler kennt nur einen Teil der Welt, möchte diese Information aber nicht teilen, sondern nach Möglichkeit zu seinem Vorteil nutzen.

Wegen der Wichtigkeit dieses Phänomens führe ich eine Beschreibung hier schon ein. Die genauere Untersuchung wird dadurch aber deutlich schwerer und erst in späteren Kapiteln wirklich in Angriff genommen.

Weitere Einschränkungen bezüglich Rationalität (im Spiel *Schach*) oder Erinnerungsvermögen (im Spiel *Memory*) werden hier nicht erörtert.

Dynamische Spiele mit diskreter Zeit

Die obigen Daten $(X, \Omega, \mathbf{P}, p, I, A, q, f)$ definieren die Dynamik

$$F \;:\; X^\circ \times \Omega \times S \to X \times \Omega \times S \;:\; (x, \omega, s) \mapsto (f(x, \omega_x, s_x), \omega, s).$$

(5) **Auszahlung:** Wer gewinnt am Ende was? Gegeben sei hierzu eine Auszahlung / Nutzenfunktion $u : \partial X \to \mathbb{R}^I$ auf terminalen Zuständen. Ist jede Trajektorie endlich, so können wir dies rekursiv fortsetzen zu

$$\tilde u \;:\; X \times \Omega \times S \to \mathbb{R}^I \;:\; (x, \omega, s) \mapsto \begin{cases} u(x) & \text{falls } x \in \partial X, \\ \tilde u(F(x, \omega, s)) & \text{falls } x \in X^\circ. \end{cases}$$

Durch Summation über $(\Omega, \mathbf{P})$ erhalten wir den erwarteten Gewinn:

$$u \;:\; X \times S \to \mathbb{R}^I \;:\; (x, s) \mapsto \mathbf{E}\big[\omega \mapsto \tilde u(x, \omega, s)\big]$$

Stillschweigend fordern wir absolute Summierbarkeit, etwa Ω endlich. Zu jedem Startzustand $x \in X$ erhalten wir ein Spiel in Normalform:

$$u_x \;:\; S = \textstyle\prod_{i \in I} S^i \to \mathbb{R}^I \;:\; s \mapsto u(x, s) = \mathbf{E}\big[\omega \mapsto \tilde u(x, \omega, s)\big]$$

Ebenso $\bar u : X \times \bar S \to \mathbb{R}^I$ für (global) gemischte Strategien $s^i \in \bar S^i = [S^i]$. Ebenso $\tilde u : X \times [S] \to \mathbb{R}^I$ für (global) korrelierte Strategien $s \in [S]$.

Dynamische Spiele mit diskreter Zeit

Definition E2A (dynamisches Spiel, kybernetische Form)

Ein **dynamisches Spiel** $\Gamma = (\,X,\ \Omega, \mathbf{P}, p,\ I, A, q,\ f, u\,)$ beinhaltet:

1. Den Zustandsraum $X = X^\circ \sqcup \partial X$ mit Innerem X° und Rand ∂X.
2. Den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbf{P})$ und zu jedem Zustand $x \in X^\circ$ eine Zufallsvariable $p_x : \Omega \twoheadrightarrow \Omega_x : \omega \mapsto \omega_x$, kurz $p : \Omega \to \prod_{x \in X^\circ} \Omega_x$.
3. Für jeden Spieler $i \in I$ Aktionsmengen $A^i_x \ne \emptyset$ und die Auskunft $q^i : X^{\circ i} \twoheadrightarrow X^i$, wobei $A^i_x = A^i_y$ für alle $x, y \in X^{\circ i}$ mit $q^i(x) = q^i(y)$.
4. Die gesteuerte Dynamik $f : \bigcup_{x \in X^\circ} \{x\} \times \Omega_x \times A_x \to X$. Hierbei ist $A_x = \prod_{i \in I} A^i_x$ die Menge der Aktionsvektoren im Zustand $x \in X^\circ$.
5. Die Auszahlung $u : \partial X \to \mathbb{R}^I$, fortgesetzt zu $\tilde u : X \times \Omega \times S \to \mathbb{R}^I$ und summiert zu $u : X \times S \to \mathbb{R}^I$. Hierfür fordern wir Endlichkeit.

Strategiemenge ist $S^i := \big\{\, s^i \in \prod_{x \in X^\circ} A^i_x \;\big|\; s^i_x = s^i_y \text{ falls } q^i(x) = q^i(y) \,\big\}$.

Ein Strategievektor $s \in S$ heißt **Nash–Gleichgewicht** bei Start in $x \in X$, wenn dies für das Spiel $u_x : S \to \mathbb{R}^I$ gilt. Gilt dies für jeden Start $x \in X$, so nennen wir s ein **teilspielperfektes Gleichgewicht**, kurz **SPE**.

Beispiel: drohen oder nachgeben?

	USA	EU
⓪ Start		
① USA drohen nicht.	5	9
② USA drohen mit Zöllen.		
③ Europa gibt nach.	6	7
④ Europa droht ebenfalls.		
⑤ USA lenken ein.	4	8
⑥ Es kommt zum Handelskrieg.	3	6

Die Zahlen rechts bewerten jeden der möglichen Ausgänge für die USA und die EU auf einer (fiktiven) Werteskala. Wir denken an eine geeignete Gewichtung aus wirtschaftlichem Ertrag und politischem Ansehen. Solche Zahlen sind schwer zu ermitteln und werden heftig debattiert.

Aufgabe: (1) Formalisieren Sie die Situation als ein dynamisches Spiel. Erklären Sie explizit und ausführlich alle benötigten Daten (X, I, A, f, u).
(2) Finden Sie alle Nash–Gleichgewichte. Welche sind teilspielperfekt?

Beispiel: drohen oder nachgeben?

Lösung: (1) Gegeben ist die Spielermenge $I = \{1 = \text{USA}, 2 = \text{EU}\}$. Als Zustandsmenge wählen wir $X = \{0,1,2,3,4,5,6\}$, terminal ist $\partial X = \{1,3,5,6\}$, mit Auszahlung $u : \partial X \to \mathbb{R}^2$ wie angegeben.

Die Aktionsmengen sind $A_0^1 = A_2^2 = A_4^1 = \{1 = \text{einlenken}, 2 = \text{drohen}\}$ sowie und $A_0^2 = A_2^1 = A_4^2 = \{0 = \text{abwarten}\}$. Die Dynamik ist wie oben festgelegt $f : \bigcup_{x \in X^\circ} \{x\} \times A_x \to X : (x;\, a^1, a^2) \mapsto x + a^1 + a^2$.

Die Strategiemenge für Spieler $i \in I$ ist $S^i = A_0^i \times A_2^i \times A_4^i$, kanonisch abkürzbar dank $S^1 \cong A_0^1 \times A_4^1 = \{1,2\} \times \{1,2\}$ und $S^2 \cong A_2^2 = \{1,2\}$
Dies definiert ein Spiel $u_x : S^1 \times S^2 \to \mathbb{R}^2$ zu jedem Start $x \in X$. .
Das strategische Spiel $u_0 : S^1 \times S^2 \to \mathbb{R}^2$ ist:

EU \ USA	$(1,0,1)$	$(1,0,2)$	$(2,0,1)$	$(2,0,2)$
$(0,1,0)$	9 / 5	9 / 5	7 / 6	7 / 6 NE
$(0,2,0)$	9 / 5 NE	9 / 5 NE	8 / 4	6 / 3

Beispiel: drohen oder nachgeben?

Das strategische Teilspiel $u_2 : S^1 \times S^2 \to \mathbb{R}^2$ ist:

EU \ USA	$(1,0,1)$	$(1,0,2)$	$(2,0,1)$	$(2,0,2)$
$(0,1,0)$	7 / 6	7 / 6 NE	7 / 6	7 / 6 NE
$(0,2,0)$	8 / 4 NE	6 / 3	8 / 4 NE	6 / 3

Das strategische Teilspiel $u_4 : S^1 \times S^2 \to \mathbb{R}^2$ ist:

EU \ USA	$(1,0,1)$	$(1,0,2)$	$(2,0,1)$	$(2,0,2)$
$(0,1,0)$	8 / 4 NE	6 / 3	8 / 4 NE	6 / 3
$(0,2,0)$	8 / 4 NE	6 / 3	8 / 4 NE	6 / 3

Beispiel: drohen oder nachgeben?

(2) Für das strategische Spiel u_x nutzen wir die Definition von (reinen) Nash–Gleichgewichten. Wir finden die markierten Gleichgewichte.

☹ Das strategische Spiel u_0 vergisst jegliche zeitliche Struktur: Wir vergleichen die Strategien nur noch bezüglich des Starts in 0.

☺ Als Verfeinerung haben wir die Teilspielperfektion eingeführt: Diese berücksichtigt die zeitliche Struktur auf entscheidende Weise.

(3) In unserem hier vorliegenden dynamischen Spiel (X, I, A, f, u) gibt es nur ein teilspielperfektes Gleichgewicht $(s^1, s^2) \in S^1 \times S^2$: Es besteht aus den Strategien $s^1 = (1,0,1)$ und $s^2 = (0,2,0)$.
Wir finden es durch die naheliegende Rückwärtsinduktion:

- Im Zustand 4 muss $s_4^1 = 1$ gelten: Die USA lenken ein.
- Im Zustand 2 muss $s_2^2 = 2$ gelten: Die EU droht.
- Im Zustand 0 muss $s_0^1 = 1$ gelten: Die USA drohen nicht.

☺ Das entspricht rationalem Verhalten wie in der Einführung erklärt.

☺ Diese einfache Überlegung illustriert den allgemeinen Satz E2D von Zermelo zur Rückwärtsinduktion, den wir untenstehend beweisen.

Warum lohnt sich diese pedantische Mühe?

E213 Erläuterung

Teilaufgabe (1) fragt nach einer expliziten **Ausformulierung** aller Daten. Das mag zunächst übertrieben pedantisch erscheinen, ist aber hilfreich. Es illustriert unsere Definition E2A eines Spiels $(X, \Omega, \mathbf{P}, p, I, A, q, f, u)$ in kybernetischer Form. Deterministisch genügen hierzu bereits die Daten (X, I, A, q, f, u), bei vollständiger Information nur (X, I, A, f, u). Das ist die **Spielanleitung** und definiert die Struktur des Spiels:

- Was sind die möglichen Spielzustände? $X = X^\circ \sqcup \partial X$.
- Wer spielt? I. Was sind die möglichen Aktionen? A_x^i.
- Was sind ihre Konsequenzen? $f : \bigcup_{x \in X^\circ} \{x\} \times A_x \to X$.
- Was wird schließlich ausgezahlt? $u : \partial X \to \mathbb{R}^I$.

Erst damit können wir das Spiel untersuchen, Strategien betrachten und von (teilspielperfekten) Gleichgewichten überhaupt erst sprechen!

Wir alle haben als Kinder Spiele gespielt. Zu jedem neuen, uns noch unbekannten Spiel mussten wir erst einmal die Anleitung durchlesen oder uns von einer bereits kundigen Person geduldig erklären lassen. Warum ist das meist länglich und mühsam? Weil alle Daten des Spiels erklärt werden müssen! Klarheit und Präzision haben ihren Preis.

Warum lohnt sich diese pedantische Mühe?

E214 Erläuterung

Für menschliche Leser können wir die Spielstruktur graphisch darstellen, etwa durch einen Spielbaum, wie in unserem obigen Beispiel gesehen. Das gibt eine grobe Idee und muss noch weiter präzisiert werden; genau hierzu dient die formale Beschreiben wie oben erklärt.

Bei der Formulierung fragen wir uns: Ist die Beschreibung eindeutig? Können Sie damit das Spiel auf einem Computer programmieren? Manche vertreten die Überzeugung: Man versteht Mathematik erst dann wirklich, wenn man sie auch auf einem Computer implementieren kann. Das ist ein sehr strenger Maßstab, aber dieser Test hat seine Vorzüge.

Erst wenn das Spiel Γ festgelegt ist, fragen wir nach Strategien s^i. Es ist wichtig, beide Begriffe fein säuberlich auseinanderzuhalten.

- Das **Spiel** Γ besteht aus der vorgegebenen, formalen Struktur.
- Eine **Strategie** s^i ist ein Handlungsplan für jeden Zustand $x \in X^\circ$.

Diese Definition von Strategie ist sehr umfassend und mag redundant erscheinen. Sie ist technisch notwendig und praktisch gerechtfertigt: Die **Durchführung** des Spiels Γ berechnet sich zu jedem Start $x \in X$ aus dem Strategievektor $s = (s^i)_{i \in I}$ und ggf. dem Zufallselement $\omega \in \Omega$.

Warum lohnt sich diese pedantische Mühe?

E215 Erläuterung

Über die Definition einer Strategie als Element $s^i \in \prod_{x \in X^\circ} A_x^i$ wird häufig gestritten. Auch hierzu ist das obige Beispiel bereits hilfreich!

Warum sollte der Spieler $i \in I$ irgendeine Aktion $s_x^i \in A_x^i$ planen für einen Spielstand $x \in X^\circ$, der nie erreicht wird? Ist das nicht absurd? Nein! Wir ahnen bereits, wozu dies gut ist. Ich versuche drei Antworten:

Mentale Planung: Manche Zustände werden nicht erreicht, gerade weil der Spieler diese Zweige mental durchgespielt hat — und dann verwirft.

Technische Vereinfachung: Wir wollen in jedem Zustand $x \in X^\circ$ starten können. Hierzu benötigen wir die gewählte Aktion $s_x^i \in A_x^i$.

Automatisierung: Wir verfolgen den Anspruch der Programmierbarkeit. Das Spiel wird von einem Master geleitet. Er fragt jeweils: „Wir sind im Spielstand $x \in X^\circ$. Spieler i, welche Aktion $s_x^i \in A_x^i$ wählst du hierzu?“ Darauf muss jeder Spieler antworten. Zwei Sichtweisen sind möglich:
Lazy Evaluation: Die Frage wird erst beantwortet, wenn sie sich stellt. Hierbei sind Master und Spieler „online“. Alternativ gelingt es „offline“:
Eager Evaluation: Die Frage wird vorsorglich für alle x beantwortet. Der Spieler gibt dem Master seine Daten und wird nicht weiter gefragt.

Warum lohnt sich diese pedantische Mühe?

E216 Erläuterung

☺ Mit diesen Daten konnten wir das vorgelegte Spiel analysieren. Das war mühsam aber lehrreich. Das Ergebnis ist überzeugend.

☺ Das teilspielperfekte Gleichgewicht entspricht rationalem Verhalten:
$\mathscr{R}_0$: Jeder Spieler maximiert sein Ergebnis (wie angegeben).
$\mathscr{R}_1$: Vor einem Handelskrieg im 3. Zug lenken die USA ein.
$\mathscr{R}_2$: Die EU weiß dies, also wird sie im 2. Zug ebenfalls drohen.
$\mathscr{R}_3$: Die USA wissen dies, also werden sie im 1. Zug nicht drohen.

⚠ Alle Voraussetzungen sind tatsächlich nötig für unsere Analyse!

$\mathscr{R}_1$: Sind die USA irrational, so könnten sie sich im 3. Zug für einen Handelskrieg entscheiden, obwohl dies zu ihrem Nachteil wäre. Das kann an einer falschen Einschätzung der Situation liegen, anderen Bewertungen, oder allgemein an mangelnder Rationalität.

$\mathscr{R}_2$: Im 2. Zug muss die EU daher die Rationalität der USA einschätzen. Gegen einen Wahnsinnigen wäre es tatsächlich besser einzulenken!

$\mathscr{R}_3$: Im 1. Zug hätten die USA also Interesse daran, für wahnsinnig gehalten zu werden: Das entspricht einem Bluff. Nur dann wäre es rational, mit einer ersten Drohung die Eskalation einzuleiten.

Was sind Teilspiele?

Die vorangegangene Definition E2A erklärt, was wir allgemein unter einem **dynamischen Spiel** $\Gamma = (X, \Omega, \mathbf{P}, p, I, A, q, f, u)$ verstehen.
Insbesondere definiert Γ die **Strategiemenge** $S = \prod_{i \in I} S^i$ gemäß

$$S^i := \left\{\, s^i \in \prod_{x \in X^\circ} A^i_x \;\middle|\; s^i_x = s^i_y \text{ falls } x, y \in X^{\circ i} \text{ und } q^i(x) = q^i(y) \,\right\}$$

Jeder Startzustand $x \in X$ führt zu einer Auszahlung $u_x : S \to \mathbb{R}^I$.
Damit definieren wir die **teilspielperfekten Gleichgewichte** von Γ:

$$\mathrm{SPE}(\Gamma) = \mathrm{SPE}(\Gamma, S) := \bigcap\nolimits_{x \in X^\circ} \mathrm{NE}\big(u_x : S \to \mathbb{R}^I\big)$$

Im Spielverlauf hat kein Spieler Anlass, seine Strategie zu wechseln. Dieser Begriff ist das erste Ziel dieser aufwändigen Formalisierung.

Bislang haben wir noch nicht erklärt, was **Teilspiele** von Γ sein sollen. Das ist für die obige Formulierung zunächst auch nicht notwendig. Für die weitere Untersuchung ist dieser Begriff jedoch nützlich, daher führe ich alles nötige nun aus. Die Idee ist denkbar einfach: Wir schränken jedes Datum auf eine geeignete Teilmenge ein.

Was sind Teilspiele?

Definition E2B (Teilspiele eines dynamischen Spiels)

Gegeben sei ein dynamisches Spiel $\Gamma = (X, \Omega, \mathbf{P}, p, I, A, q, f, u)$.
Die folgenden drei Daten (X', Ω', A') definieren ein **Teilspiel** von Γ:

1. Eine Teilmenge $X' \subseteq X$. Wir setzen $X'^\circ = X' \cap X^\circ$ als Inneres und $\partial X' = X' \cap \partial X$ als Rand sowie $u' = u|_{\partial X'}$ als Auszahlung.
2. Eine Teilmenge $\Omega' \subseteq \Omega$ mit $\mathbf{P}(\Omega') > 0$. Wir setzen $\mathbf{P}' = \mathbf{P}_{\Omega'}$ als bedingte Wkt und schränken $p_x : \Omega \twoheadrightarrow \Omega_x$ ein zu $p'_x : \Omega' \twoheadrightarrow \Omega'_x$.
3. Eine nicht-leere Teilmenge $A'^i_x \subseteq A^i_x$ für jedes $x \in X'^\circ$ und $i \in I$. Wir schränken f ein zu $f' : \bigcup_{x \in X'^\circ} \{x\} \times \Omega'_x \times A'_x \to X'$; hierzu fordern wir $f(\bigcup_{x \in X'^\circ} \{x\} \times \Omega'_x \times A'_x) \subset X'$.
4. Wir schränken die Auskunft $q^i : X^{\circ i} \twoheadrightarrow X^i$ ein zu $q'^i : X'^{\circ i} \twoheadrightarrow X'^i$. Wir fordern $A'^i_x = A'^i_y$ für alle $x, y \in X'^{\circ i}$ mit $q^i(x) = q^i(y)$.

Die so definierten Daten definieren dann selbst ein dynamisches Spiel $\Gamma' = \Gamma|_{(X', \Omega', A')} := (X', \Omega', \mathbf{P}', p', I, A', q', f', u')$, abgekürzt $\Gamma' \le \Gamma$.

Was sind Teilspiele?

Wir schränken das Spiel Γ genau so ein, dass Γ' selbst ein Spiel ist. Die Idee ist recht natürlich, ihre Ausformulierung naturgemäß länglich.

Im Falle $X' = X$ nennen wir das Teilspiel $\Gamma' \le \Gamma$ **weit**. Die Zustände des Teilspiels Γ' sind dieselben wie zuvor in Γ, eingeschränkt werden höchstens die Zufallszüge $\Omega' \subseteq \Omega$ und die Spieleraktionen $A'^i_x \subseteq A^i_x$.

Im Falle $A'_x = A_x$ für alle $x \in X'$ nennen wir das Teilspiel $\Gamma' \le \Gamma$ **voll**. Dank $A'^i_x = A^i_x$ kann jeder Spieler in Γ' genauso agieren wir zuvor in Γ. Andernfalls schränken wir auf eine echte Teilmenge $A'^i_x \subsetneq A^i_x$ ein.

Im Falle $\Omega' = \Omega$ nennen wir das Teilspiel $\Gamma' \le \Gamma$ **unbedingt**. Das bedeutet, der Zufall spielt in Γ' genauso wie zuvor in Γ. Andernfalls schränken wir auf eine echte Teilmenge $\Omega' \subsetneq \Omega$ ein. Wird $(\Omega, \mathbf{P})$ durch einen Zufallsgenerator realisiert, so wiederholen wir die Ziehungen so lange, bis schließlich ein Ergebnis $\omega \in \Omega'$ vorliegt.

Konvention: Wenn allgemein von Teilspielen die Rede ist, ohne weitere Präzisierung, dann sind meist **volle unbedingte Teilspiele** gemeint, das heißt, nur die Zustände werden beim Teilspiel $\Gamma' \le \Gamma$ eingeschränkt. Wir schließen uns im Folgenden diesem üblichen Sprachgebrauch an.

Was sind Teilspiele?

Definition E2C (Teilmenge als volles unbedingtes Teilspiel)

Gegeben sei ein dynamisches Spiel $\Gamma = (X, \Omega, \mathbf{P}, p, I, A, q, f, u)$.

Eine Teilmenge $X' \subseteq X$ heißt **(volles unbedingtes) Teilspiel** von Γ, kurz $X' \le \Gamma$, wenn $f(\bigcup_{x \in X'^\circ} \{x\} \times \Omega_x \times A_x) \subset X'$ gilt. Das bedeutet, zu jedem $x \in X'$ liegen alle gemäß Γ möglichen Folgezustände in X'.

Das Teilspiel $X' \le \Gamma$ nennen wir **saturiert**, wenn für alle $x, y \in X^{\circ i}$ mit $q^i(x) = q^i(y)$ gilt: Aus $x \in X'$ folgt $y \in X'$. Das heißt, Spieler i weiß im Teilspiel nicht mehr als zuvor. Dies fordern wir für jeden Spieler i.

Ist $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von Teilspielen $X_\lambda \le \Gamma$, indiziert durch $\Lambda \ne \emptyset$, dann ist auch ihr Durchschnitt $X' = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ ein Teilspiel, also $X' \le \Gamma$.
Jeder Zustand $x \in X$ **erzeugt** ein kleinstes Teilspiel $\Gamma_x \le \Gamma$, nämlich:

$$\Gamma_x := \bigcap \left\{\, X' \;\middle|\; x \in X' \le \Gamma \,\right\}$$

Konkret besteht dieses Teilspiel aus dem Startzustand x, all seinen Folgezuständen, all deren Folgezuständen usw. Das ist die Intuition hinter den oben definierten **teilspielperfekten Gleichgewichten**.

Rückwärtsinduktion und Filtrierungen

E221

Das Spiel $\Gamma = (X, \Omega, \mathbf{P}, p, I, A, q, f, u)$ definiert die Dynamik

$$F : X^\circ \times \Omega \times S \to X \times \Omega \times S : (x, \omega, s) \mapsto (f(x, \omega_x, s_x), \omega, s).$$

Wir fordern, dass jede Trajektorie endliche Länge besitzt:

$$X \times \Omega \times S \quad \stackrel{!}{=} \quad \bigcup\nolimits_{n\in\mathbb{N}} F^{-n}(\partial X \times \Omega \times S)$$

🙂 Das bedeutet Endlichkeit für jedes $x \in X$ und $(\omega, s) \in \Omega \times S$: Damit definieren wir die Auszahlung $\tilde{u} : X \times \Omega \times S \to \mathbb{R}^I$ wie oben.

Für eine **Filtrierung** $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verlangen wir stärker

$$\partial X = X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X = \bigcup\nolimits_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

$$\text{mit} \quad F\big(X_n^\circ \times \Omega \times S\big) \quad \subseteq \quad X_{n-1} \times \Omega \times S.$$

🙂 Insbesondere sind damit $X_0 \le X_1 \le X_2 \le \dots \le \Gamma$ Teilspiele.

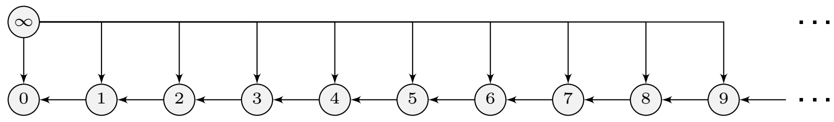
🙂 Die Ausschöpfung $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ bedeutet Endlichkeit für jedes x, und zwar uniform über $\Omega \times S$: Bei Start im Zustand $x \in X_n$ landen wir in höchstens n Schritten im Rand ∂X, egal bei welchem Spielverlauf.

Rückwärtsinduktion und Filtrierungen

E222 Erläuterung

Aufgabe: (1) Gibt es dynamische Spiele ohne unendliche Trajektorien, aber mit beliebig langen Trajektorien? und ohne Filtrierung $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

(2) Angenommen, unser Spiel Γ erlaubt keine unendlichen Trajektorien, und für jeden Zustand $x \in X^\circ$ ist die Menge $\Omega_x \times A_x$ der Züge endlich. Dann erlaubt das Spiel Γ eine Filtrierung $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



Lösung: (1) Wie in der Skizze sei der Zustandsraum $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Wir wählen $\Omega = \mathbb{N}$ mit irgendeiner WVerteilung $\mathbf{P}$ und zunächst $I = \emptyset$. Der Zustand 0 sei terminal. Wir setzen $f(\infty, \omega) = \omega$ für $\omega \in \Omega$ sowie $f(n, \omega) = n - 1$ für $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$. Jede Trajektorie hat endliche Länge. Die Länge kann jedoch beliebig groß werden, ist also unbeschränkt. Jede Filtrierung $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt $X_n \subset \{0, 1, \dots, n\}$, also $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \subsetneq X$. Die Ausschöpfung gelingt erst im nächsten Schritt „unendlich plus eins“.

⚠ Allgemein benötigen wir transfinite Induktion über Ordinalzahlen.

Rückwärtsinduktion und Filtrierungen

E223 Erläuterung

(2) Wir konstruieren die **kanonische Filtrierung** $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$Y_0 := \partial X \qquad \text{für } n = 0 \text{ und dann für } n = 1, 2, 3, \dots \text{ rekursiv}$$

$$Y_n := Y_{n-1} \cup \big\{\, x \in X^\circ \;\big|\; \forall \omega \in \Omega_x \; \forall a \in A_x : f(x, \omega, a) \in Y_{n-1} \,\big\}.$$

Nach Konstruktion gilt $\partial X = Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \dots \subseteq X$ und

$$F(Y_n^\circ \times \Omega \times S) \subseteq Y_{n-1} \times \Omega \times S.$$

Wir setzen $Y := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ und beweisen die Ausschöpfung $X = Y$. Indirekter Beweis: Angenommen, es gäbe einen Zustand $x \in X \smallsetminus Y$.

Da wir $\Omega_x \times A_x$ als endlich voraussetzen, hat der Zustand x nur endliche viele Folgezustände, das heißt $f(\{x\} \times \Omega_x \times A_x) = \{x_1, \dots, x_\ell\}$. Gälte hierbei $\{x_1, \dots, x_\ell\} \subseteq Y$, also $x_k \in Y_{n_k}$ für jedes $k = 1, \dots, \ell$, dann folgte $\{x_1, \dots, x_\ell\} \subseteq Y_n$ für $n = \max\{n_1, \dots, n_\ell\}$, also $x \in Y_{n+1}$. Da wir $x \in X \smallsetminus Y$ annehmen, gibt es einen Nachfolger $x' \in X \smallsetminus Y$.

Wiederholung dieses Arguments liefert eine unendliche Trajektorie $x, x', x'', \dots$. Das war jedoch ausgeschlossen. Also muss $Y = X$ gelten.

⚠ Ist $\Omega_x \times A_x$ unendlich, so existieren Gegenbeispiele wie das obige.

Rückwärtsinduktion und Filtrierungen

E224 Erläuterung

🙂 Die kanonische Filtrierung $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wächst am schnellsten:

Aufgabe: Für jede Filtrierung $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $X_n \subseteq Y_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Wir führen Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 0$ gilt $X_0 = Y_0 = \partial X$. Wir zeigen nun den Induktionsschritt: Aus $X_{n-1} \subseteq Y_{n-1}$ folgt $X_n \subseteq Y_n$.

Nach Voraussetzung gilt $F(X_n^\circ \times \Omega \times S) \subseteq X_{n-1} \times \Omega \times S$. Für jedes Element $x \in X_n$ gilt demnach $f(\{x\} \times \Omega_x \times A_x) \subseteq X_{n-1} \subseteq Y_{n-1}$, also $x \in Y_n$ nach Definition der Menge Y_n. Das beweist $X_n \subseteq Y_n$.

Bemerkung: Beim Schritt von Y_{n-1} nach Y_n werden im Allgemeinen mehrere Elemente dazugewonnen. Wir können die Filtrierung strecken, indem wir diese schrittweise hinzufügen, im Extremfall jedes einzeln.

Bemerkung: Es gibt auch Filtrierungen, die beliebig langsam wachsen, da wir Stagnation $X_{n-1} = X_n$ nicht verbieten. Sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wachsend und surjektiv, etwa $\varphi(n) = \lfloor \ln(n+1) \rfloor$. Dann ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $X_n = Y_{\varphi(n)}$ eine Filtrierung mit immer selteneren Zuwächsen. Noch viel langsamer wachsen $\varphi \circ \varphi$ oder $\varphi \circ \varphi \circ \varphi$ oder… Langsamer geht immer.

Rekursive Konstruktion von Gleichgewichten

Was immer du tust, handele klug und bedenke das Ende!
Die langen Vorbereitungen führen endlich zu einem schönen Satz:

Satz E2D (Rückwärtsinduktion nach Ernst Zermelo 1913)

Sei $\Gamma = (X, \Omega, \mathbf{P}, p, I, A, f, u)$ ein dynamisches Spiel wie in E2A mit vollständiger Information und gegebener Filtrierung $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(1) In jedem Zustand $x \in X^\circ$ sei ein einziger Spieler $j = j(x)$ am Zug, also $\mathrm{pr}^j : A_x \xrightarrow{\sim} A_x^j$ bijektiv, und seine Aktionsmenge A_x^j sei endlich. Dann existiert ein teilspielperfektes (reines) Gleichgewicht $s \in S$.

(2) In jedem Zustand $x \in X^\circ$ sei die Aktionsmenge A_x endlich. Dann existiert ein teilspielperfektes (lokal) gemischtes Gleichgewicht $s \in \bar{S}$. Ausführlich bedeutet das $s \in \bar{S} = \prod_{x\in X^\circ} \bar{A}_x$ mit $\bar{A}_x = \prod_{i\in I}[A_x^i]$.

Zusatz: Jedes teilspielperfekte Gleichgewicht $s^n \in \prod_{x\in X_n^\circ} \bar{A}_x$ auf X_n erlaubt eine teilspielperfekte Fortsetzung $s^{n+1} \in \prod_{x\in X_{n+1}^\circ} \bar{A}_x$ auf X_{n+1}.

Hierbei kann es mehrere Fortsetzungen geben. Durch die Rekursion können wir jedes teilspielperfekte Gleichgewicht von Γ konstruieren.

Rekursive Konstruktion von Gleichgewichten

Beweis: Wir beweisen zunächst den Zusatz zur Rekursion.

Gegeben sei s^n, ein teilspielperfektes Gleichgewicht auf $X_n \subseteq X$.
Der Index $n \in \mathbb{N}$ ist hier kein Spieler, sondern die Rekursionsstufe.

Wir betrachten $x \in X_{n+1} \smallsetminus X_n$. Alle Folgezustände von x liegen in X_n.
Dies verdanken wir unserer Forderung $F(X_{n+1}^\circ \times \Omega \times S) \subseteq X_n \times \Omega \times S$.

Wir untersuchen das Spiel $v_x : A_x \to \mathbb{R}^I : a_x \mapsto u_x((x \mapsto a_x) \cup s^n)$.
Zur Berechnung von $u_x(s)$ genügen diese Daten $(x \mapsto a_x) \cup s^n \subseteq s$.

(1) Nach Voraussetzung ist $A_x \cong A_x^j$ endlich.
Wir wählen eine Aktion $s_x \in A_x$ so, dass $v_x^j(s_x)$ maximal ist.

(2) Nach Voraussetzung ist A_x endlich. Wir wählen ein
Nash–Gleichgewicht $s_x \in \bar{A}_x = \prod_{i\in I}[A_x^i]$ für das Spiel $\bar{v}_x$.

Auf diese Weise erhalten wir alle teilspielperfekten Gleichgewichte:
Zu $s^0 = \emptyset$ konstruieren wir rekursiv Fortsetzungen $s^0 \subseteq s^1 \subseteq s^2 \subseteq \dots$
und erhalten das teilspielperfekte Gleichgewicht $s = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} s^n$ auf X.
Hierzu nutzen wir schließlich die Voraussetzung $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

Rekursive Konstruktion von Gleichgewichten

Aufgabe: Ist die Konstruktion in (1) bzw. in (2) ein Algorithmus?

Lösung: Schritt (1) ist konstruktiv. Manchmal existieren mehrere Maximierer, wir wählen dann willkürlich einen aus. Verfolgen wir systematisch alle Wahlen, so erhalten wir alle Gleichgewichte!

Schritt (2) ist leider (noch) nicht konstruktiv. Für endliche reelle Spiele $u : \prod_{i\in I} S_i \to \mathbb{R}^I$ benötigen wir (vorläufig) ein Orakel $u \mapsto s_u \in \mathrm{NE}(\bar{u})$.
Ein Nash–Gleichgewicht zu prüfen ist leicht, eins zu finden ist schwer.
Oft hilft iterierte Löschung von strikt / schwach dominierten Strategien.

Die Rekursion wird in der dynamischen Programmierung verwendet.

Die Existenz einer Filtrierung $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ über der Indexmenge $(\mathbb{N}, <)$ haben wir hier zur technischen Vereinfachung eingeführt. Es genügt, eine Filtrierung $(X_n)_{n\in N}$ über einer wohlgeordneten Menge $(N, <)$.
Dies kann notwendig werden, wenn Ω_x unendlich ist, wie oben erklärt.

Aufgabe: (1) Warum existiert immer eine Filtrierung $(X_n)_{n\in N}$ von X?
(2) Formulieren und beweisen Sie Satz E2D für diesen allgemeinen Fall.

Rekursive Konstruktion von Gleichgewichten

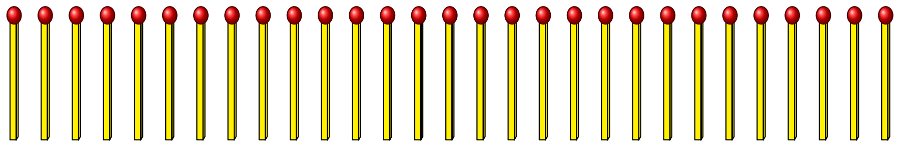
Aufgabe: Für das Schachspiel gilt genau eine von drei Alternativen:
(a) Weiß kann einen Gewinn erzwingen. (b) Schwarz kann einen Gewinn erzwingen. (c) Jeder von beiden kann mindestens ein Remis erzwingen.
Was bedeutet das genau? Genügen hierzu Nash–Gleichgewichte?
Verrät Ihnen diese Formulierung, welche der drei Alternativen zutrifft?
Wie können Sie die richtige Alternative finden, zumindest im Prinzip?

Ernst Zermelo ist heutigen Studierenden der Mathematik bekannt durch seine Arbeiten zur Mengenlehre, speziell die Zermelo–Fraenkel–Axiome.

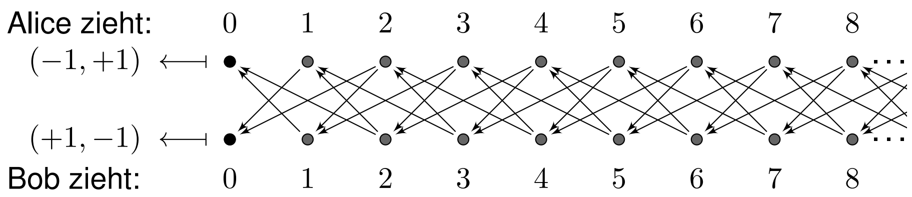
Er war zudem ein begeisterter Schachspieler, und dies führte zu zwei mathematischen Arbeiten. Die erste davon *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels* (1913) war sein Vortrag auf dem 5. Internationalen Mathematikerkongress 1912 in Cambridge.
Die Mengenlehre war und ist hierzu ein bequemer formaler Rahmen!

Zermelos Rekursion wurde für die Spieltheorie wiederentdeckt durch Harold Kuhn: *Extensive Games and the Problem of Information* (1953).
Daher heißt der obige Satz E2D und das Konstruktionsverfahren in der Literatur nach Zermelo oder Zermelo–Kuhn oder auch nur Kuhn.

Das Nim-Spiel



Auf dem Tisch liegen anfangs $n \in \mathbb{N}$ Streichhölzer / Münzen / Tokens.
Die Spieler ziehen abwechselnd, jeder entfernt ein oder zwei Hölzer.
Standard-Variante: Es verliert, wer als erster nicht mehr ziehen kann.
Misère-Variante: Es gewinnt, wer als erster nicht mehr ziehen kann.



Aufgabe: (1) Formalisieren Sie dies als ein dynamisches Spiel Γ.
Deterministisch und mit vollständiger Information $\Gamma = (X, I, A, f, u)$.
(2) Konstruieren Sie rekursiv alle teilspielperfekten Gleichgewichte.

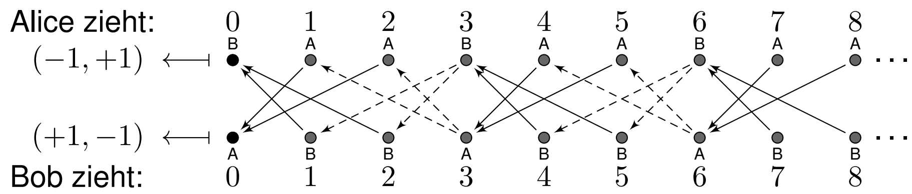
Das Nim-Spiel

Lösung: (1) Die Spielermenge ist hier $I = \{1 = \text{Alice}, 2 = \text{Bob}\}$.
Im Zustand (n, i) liegen noch n Hölzer, und Spieler i ist am Zug.
Als Zustandsraum wählen wir $X = \mathbb{N} \times I$, terminal ist $\partial X = \{0\} \times I$
mit Auszahlung $u : \partial X \to \mathbb{R}^I$ wie oben. Gemäß den Zugregeln gilt

$$\begin{aligned} A^1_{(n,1)} &= A^2_{(n,2)} = \{1, 2\} && \text{für } n \geq 2, \\ A^1_{(1,1)} &= A^2_{(1,2)} = \{1\} && \text{für } n = 1, \\ A^1_{(n,2)} &= A^2_{(n,1)} = \{0\} && \text{für } n \geq 1. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir $f(\,n, i;\ a^1, a^2\,) = (\,n - a^1 - a^2,\ i + 1 \bmod 2\,)$.

(2) Die kanonische Filtrierung ist $X_n = \{0, 1, \dots, n\} \times I$. Rekursion:



Das Nim-Spiel

Das hier verwendete Modell (1) ist klein aber fein, klar und einfach:
In diesem Spiel $\Gamma = (X, I, A, f, u)$ ist der Zustandsraum kein Baum!
Es gibt noch nicht einmal einen ausgezeichneten Startzustand.

Dieses Beispiel betont die Sichtweise als dynamisches System:
Alle Zustände $x \in X$ des Spieles Γ sind zunächst gleichberechtigt.
Sträker strukturierte Spielbäume sind erlaubt aber nicht zwingend.

Die in (2) verwendete Filtrierung ist naheliegend, es gibt viele weitere.
Mit jeder können wir wunderbar die Rückwärtsinduktion durchführen!

Als Ergebnis finden wir eine einfache und schöne Paritätsregel:
Gilt $3 \nmid n$, dann hat der ziehende Spieler eine Gewinnstrategie.
Gilt $3 \mid n$, dann hat der Gegenspieler eine Gewinnstrategie.

Wenn Sie diese Regel erst einmal kennen, dann können Sie sie
auch leicht unabhängig beweisen durch (Vorwärts-)Induktion.
Gefunden haben wir sie durch Zermelos rekursiven Algorithmus.

Diese Rekursion lässt sich auf alle Spiele anwenden, vorausgesetzt
die Spieler ziehen jeweils einzeln und haben vollständige Information.

Das Nim-Spiel

Aufgabe: (3) Erzeugen Sie das Teilspiel Γ_x zum Zustand $x = (n, i)$.
(4) Finden Sie alle Teilspiele $X' \leq \Gamma$ und (5) alle Filtrierungen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
(6) Formulieren Sie „Nim mit zufälligem Start“ als Oberspiel $\Gamma' \geq \Gamma$.
(7) Warum erlaubt Γ' keine Filtrierung $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ indiziert mit $\mathbb{N}$?

Aufgabe: Was genau bedeutet die Aussage „Alice / Bob hat eine Gewinnstrategie“? Was bedeutet dabei „optimale“ Spielweise?
Was passiert, wenn ein Spieler gelegentlich „Fehler“ macht?
Genügen für diese Untersuchung bereits Nash–Gleichgewichte?

Aufgabe: Analysieren Sie das Kinderspiel *Tic-Tac-Toe*. Wie groß ist der Spielbaum? Was bedeutet hier „optimale“ Spielweise? Gewinnt Spieler 1 (Kreuze) oder Spieler 2 (Kreise) oder endet es unentschieden?

Aufgabe: Analysieren Sie das Spiel *Strandkiosk* aus der Einleitung.
Wie groß ist der Spielbaum? Was bedeutet hier „optimale“ Spielweise?
Welcher der drei Spieler kann sich welchen Marktanteil sichern?

Kompakt und stetig genügen nicht.

Der Satz von Zermelo zur rekursiven Konstruktion von Gleichgewichten ist einfach und elegant, zudem naheliegend und leicht zu beweisen.

Daher liegt es auf der Hand, nach Verallgemeinerungen zu fragen. Können wir die Voraussetzungen noch weiter abschwächen?

Im einfachsten Fall ist in jedem Zustand $x \in X$ nur ein Spieler $j = j(x)$ am Zug, also $\mathrm{pr}^j : A_x \xrightarrow{\sim} A_x^j$ bijektiv. Die entscheidende Voraussetzung ist dann die Endlichkeit der Aktionsmenge A_x^j. Das stellt sicher, dass im Zustand x ein Maximierer $s_x^j \in A_x^j$ für die Auszahlung v_x^j existiert.

Auf den ersten Blick würde man daher vermuten, Zermelos rekursives Verfahren gelingt ebenso, wenn alle Aktionsmengen A_x kompakt sind, und die Auszahlung u stetig von den Aktionen abhängt.

Das folgende Beispiel ist einfach aber überraschend: Es zeigt eindrücklich, dass diese Vermutung falsch ist!

Die Rekursion führt nämlich dazu, dass v_x^j im Allgemeinen nicht stetig ist und auch kein Maximum annehmen muss.

Kompakt und stetig genügen nicht.

Ein Beispiel: Alice wählt $s_1 \in S_1 = [-1,1]$, Bob wählt $s_2 \in S_2 = [-1,1]$, Auszahlungen sind $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (s_1, s_2) \mapsto (\ s_1 - s_2,\ s_1 \cdot s_2\ )$. Das sind kompakte Mengen und stetige Funktionen. Sogar bilinear!

Aufgabe: (1) Finden Sie alle Nash–Gleichgewichte (s_1, s_2) des Spiels u.
(2) Alice spielt zuerst, öffentlich, dann Bob. Finden Sie alle SPE!
(3) Lässt sich rekursiv jedes SPE fortsetzen?

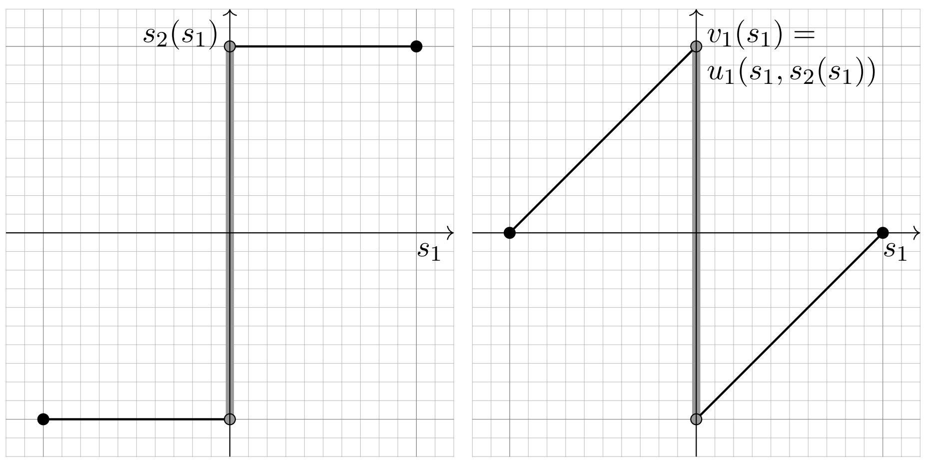
Lösung: (1) Zunächst gilt $s_1 = 1$, dann $s_2 = 1$, also Auszahlung $(0,1)$.
(2) Bob kennt Alice's Zug s_1 und reagiert rational / optimiert seine Wahl

$$s_2 \ :\ S_1 \to S_2 \ :\ s_1 \mapsto \begin{cases} -1 & \text{für } s_1 < 0, \\ +1 & \text{für } s_1 > 0, \\ c & \text{für } s_1 = 0, \end{cases}$$

mit $c \in [-1,1]$. Im Falle $c \in \,]-1,1]$ hat Alice keine beste Strategie. Nur im Falle $c = -1$ hat Alice eine beste Strategie, nämlich $s_1 = 0$.

(3) Nein, in diesem Spiel lässt sich nicht jedes teilspielperfekte Gleichgewicht per Rückwärtsinduktion fortsetzen, wie (2) zeigt.

Kompakt und stetig genügen nicht.



Die Aktionsmengen $S_1 = S_2 = [-1,1]$ sind hier kompakt und darauf die Auszahlungen $u_1 : (s_1, s_2) \mapsto s_1 - s_2$ und $u_2 : (s_1, s_2) \mapsto s_1 \cdot s_2$ stetig. Die Rückwärtsinduktion führt jedoch zu Unstetigkeiten.

Kompakt und stetig genügen nicht.

Moment mal, alles hier ist bilinear in den Strategien $s_1, s_2 \in [-1,1]$. Das kennen wir doch von Bimatrixspielen. Geht das hier ebenso?

Aufgabe: Schreiben Sie $u : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^2 : (s_1, s_2) \mapsto (\ s_1 - s_2,\ s_1 \cdot s_2\ )$ (geeignet affin umparametrisiert) als ein Bimatrix-Spiel!

Lösung: Wir setzen $s_1 = 2p - 1$ und $s_2 = 2q - 1$ mit $p, q \in [0,1]$.

A \ B	0	1
0	0 ; 1	-2 ; -1
1	2 ; -1	0 ; 1

$$\begin{aligned} u_1(p,q) &= 0(1-p)(1-q) + 2p(1-q) - 2(1-p)q + 0pq \\ &= 2p - 2q = s_1 - s_2 \\ u_2(p,q) &= 1(1-p)(1-q) - 1p(1-q) - 1(1-p)q + 1pq \\ &= 4pq - 2p - 2q + 1 = s_1 \cdot s_2 \end{aligned}$$

Trajektorien und Spielbäume

Those who cannot remember the past are condemned to repeat it.
(George Santayana, 1863–1952)

Der **Zustandsraum** war bisher beliebig. Das war bequem und flexibel. Wir betrachten nun speziell **Spielbäume**. Das ist bequem und konkret. Idee: Wir notieren im aktuellen Zustand den bisherigen Spielverlauf. Vorteil: Wir erlauben und bewerten auch unendliche Trajektorien.

Beispiel: Beim Schach ist der Zustand genau genommen nicht nur die Stellung der Figuren auf dem Schachbrett, sondern auch das nebenher geführte Protokoll aller bisherigen Züge (z.B. in algebraischer Notation). Nur so lassen sich manche Regeln überhaupt erst formulieren, etwa: Die Partie endet remis, wenn dreimal dieselbe Stellung erreicht wird, oder 50 Züge lang kein Stein geschlagen und kein Bauer bewegt wird.

Die simple Idee eines Protokolls lässt sich auf jedes Spiel übertragen: Wir kodieren den Spielverlauf (bisherige Zustände, Historie, Trajektorie) als endliche Folge, also ein Wort über einem geeigneten Alphabet.

Trajektorien und Spielbäume

Sei $\mathcal{A} \neq \emptyset$ eine Menge von Aktionen, wir betrachten dies als **Alphabet**. Ein **Wort** der Länge n ist ein n–Tupel $w = (w_0, w_1, \dots, w_{n-1})$ mit $w_i \in \mathcal{A}$.

$$\mathcal{A}^n = \{\, w : \{0, 1, \dots, n-1\} \to \mathcal{A} \,\} \;\cong\; \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A}$$

Wir haben die Verknüpfung $* : \mathcal{A}^m \times \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^{m+n} : (u, v) \mapsto w = uv$ durch Aneinanderhängen (Konkatenation) endlicher Wörter:

$$\underbrace{(u_0, \dots, u_{m-1})}_{= u \in \mathcal{A}^m} * \underbrace{(v_0, \dots, v_{n-1})}_{= v \in \mathcal{A}^n} = \underbrace{(u_0, \dots, u_{m-1}, v_0, \dots, v_{n-1})}_{= uv =: w \in \mathcal{A}^{m+n}}$$

Ausgeschrieben heißt das $w_i = u_i$ für $i < m$ und $w_i = v_{i-m}$ für $i \geq m$. Wir lesen Buchstaben als Wörter vermöge $\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^1 : a \mapsto (\{0\} \mapsto a)$. Die Verknüpfung $*$ ist assoziativ: $(u * v) * w = u * (v * w)$. Das leere Wort $e \in \mathcal{A}^0 = \{\emptyset\}$ ist neutral: $e * u = u * e = u$. Somit erhalten wir das **freie Monoid** $(\mathcal{A}^*, *, e)$ über $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{<\infty} := \bigsqcup\nolimits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^n, \qquad * : \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^* : (u, v) \mapsto w = uv$$

Ebenso definieren wir unendliche Wörter $\mathcal{A}^\infty := \mathcal{A}^\mathbb{N} = \{\, w : \mathbb{N} \to \mathcal{A} \,\}$ und die Verknüpfung $* : \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^\mathbb{N} \to \mathcal{A}^\mathbb{N} : (u, v) \mapsto w = uv$ wie oben.

Trajektorien und Spielbäume

Wir betrachten die natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ in von Neumanns Modell:

$$0 = \{\,\}, \quad 1 = \{0\}, \quad 2 = \{0, 1\}, \quad \dots, \quad n = \{0, 1, \dots, n-1\}, \quad \dots$$

Somit ist $\mathcal{A}^n$ tatsächlich die Menge aller Abbildungen $w : n \to \mathcal{A}$. Das einzige Wort der Länge 0 ist demnach das leere Wort $e : \emptyset \to \mathcal{A}$

Die Menge $\mathcal{A}^\mathbb{N} = \{\, w : \mathbb{N} \to \mathcal{A} : k \mapsto w(k) \,\}$ besteht entsprechend aus allen unendlichen Wörten, üblicherweise heißen sie Folgen $(w(k))_{k \in \mathbb{N}}$. Hierauf opriert das Monoid $(\mathcal{A}^*, *, e)$ durch Konkatenation von links.

Für $u \in A^m$ und $w \in A^{\leq\infty}$ bedeutet die Inklusion $u \subseteq w$: Es gilt $w = uv$ mit Startsegment $u = w|_m$ und eindeutiger Fortsetzung durch $v \in A^{\leq\infty}$.

Beispiele: Der beliebte euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ beruht auf der Menge aller n–Tupel $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ reeller Zahlen $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$. Die übliche Indizierung $0, 1, \dots, n-1$ in der Informatik und $1, 2, \dots, n$ in der Mathematik sind äquivalent durch die kanonische Umnummerierung. Den Folgenraum $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ kennen Sie prominent aus der Analysis. Die Räume $\mathbb{R}^\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{C}^\mathbb{Z}$ bestehen aus beidseitig unendlichen Folgen, dies kennen Sie zum Beispiel von Fourier–Reihen.

Trajektorien und Spielbäume

Die Menge aller (endlichen oder unendlichen) Folgen über $\mathcal{A}$ ist

$$\mathcal{A}^{\leq\infty} := \mathcal{A}^0 \sqcup \mathcal{A}^1 \sqcup \mathcal{A}^2 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{A}^\mathbb{N} = \mathcal{A}^* \sqcup \mathcal{A}^\mathbb{N}.$$

Die **Spielverläufe** sind hierin eine Teilmenge $X \subseteq \mathcal{A}^{\leq\infty}$, zerlegt in

$$X = X_0 \sqcup X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots \sqcup X_\infty \quad \text{mit} \quad X_n = X \cap \mathcal{A}^n.$$

Wir nennen X **baumförmig** (engl. *arborescent*), wenn gilt:

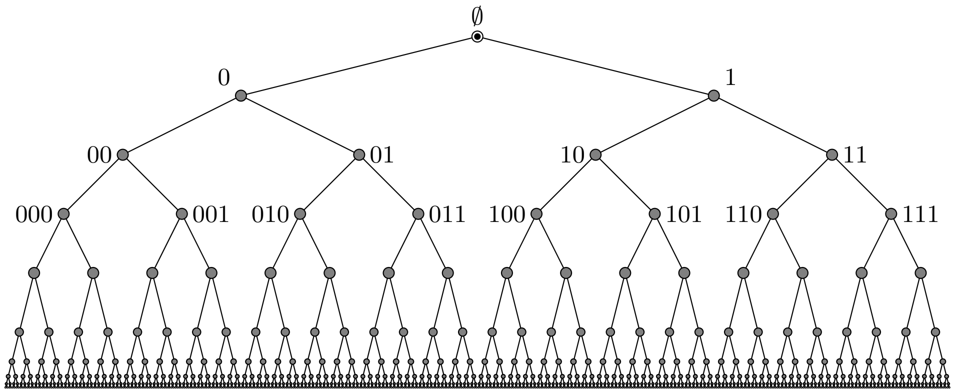
1. Als Start haben wir $X_\ell = \{\alpha\}$ und zuvor $X_0 = \dots = X_{\ell-1} = \emptyset$.
2. Für jede endliche Folge $x \in X_n$ und $\ell \leq m \leq n$ gilt $x|_m \in X_m$.
3. Für jede unendliche Folge $x : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ gilt $x \in X_\infty$ genau dann, wenn $x|_m \in X_m$ für alle $\ell \leq m < \infty$ gilt. Wir schreiben $x = \lim x|_m$.

Wir zerlegen $X = X^\circ \sqcup \partial X$ mit $\partial X = X_\infty \cup \{\, x \in X_{<\infty} \mid x\mathcal{A} \cap X = \emptyset \,\}$.

Jedes $x \in X$ heißt **Trajektorie**. Sie ist **terminal**, falls sie unendlich ist, $x \in X_\infty$, oder endlich aber nicht fortsetzbar, $x \in X_{<\infty}$ und $x\mathcal{A} \cap X = \emptyset$. Andernfalls ist sie endlich und fortsetzbar, also $x \in \mathcal{A}^*$ und $x\mathcal{A} \cap X \neq \emptyset$.

Der vollständige binäre Baum

E305

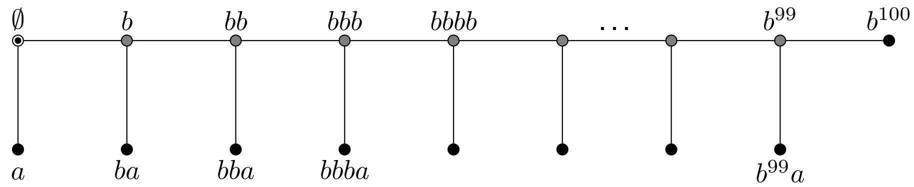


Der **vollständige binäre Baum** besteht aus allen Wörten $\{0,1\}^{\le\infty}$. Das Alphabet ist $\mathcal{A}=\{0,1\}$. Innere Knoten sind alle endlichen Wörter $x\in X^\circ=\mathcal{A}^*$. Die Kante $x\to x*a$ entspricht der Fortsetzung um den Buchstaben $a\in\mathcal{A}$. Der Rand $\partial X=\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ sind alle unendlichen Pfade. Das leere Wort $\emptyset$ dient hier als Startzustand / Wurzel des Baumes.

🙂 Diese Notation vereint algebraische und geometrische Darstellung.

Der Hundertfüßler

E306



Aufgabe: Sei speziell $L=100$ oder allgemein $L\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Formalisieren Sie diesen Baum $X\subset\{a,b\}^{\le\infty}$ der Länge L. Welche Zustände sind aktiv X°, welche sind terminal ∂X?

Lösung: Für $L\in\mathbb{N}$ haben wir gemäß Skizze

$$X=\{\,b^n \mid n\in\mathbb{N}_{\le L}\,\}\cup\{\,b^n a \mid n\in\mathbb{N}_{<L}\,\}.$$

Aktive Zustände / innere Knoten sind hier $X^\circ=\{\,b^n \mid n\in\mathbb{N}_{<L}\,\}$. Terminale Zustände / Blätter sind entsprechend $\partial X=X\smallsetminus X^\circ$. Im Fall $L=\infty$ kommt die konstante Folge $b^\infty=bbb\ldots\in\partial X$ hinzu. Dies ist kein endlicher Knoten des Baumes, dient aber als Endzustand.

Graphische Darstellung von Spielbäumen

E307

Man muss ein Spiel auch lesen können!
Wer lesen kann, ist klar im Vorteil.

- Ω Startzustand / Wurzel, Zufallszug; Spieler Ω, N, Z oder leer.
- $[p]$ die Wahrscheinlichkeit $p\in[0,1]$ für diesen Zufallszug.
- i aktiver Zustand / innerer Knoten $x\in X^\circ$; Spieler $i\in I$ zieht.
- a mögliche Aktion / Zug $a\in A_x^i$ für den hier aktiven Spieler i.
- u terminaler Zustand / Blatt $x\in\partial X$ mit Auszahlung $u=u(x)\in\mathbb{R}^I$.
- - - - - ununterscheidbare Zustände für den ziehenden Spieler i.
- i alternative Schreibweise für diese Äquivalenzklasse.

Der Startzustand $\alpha\in X$ des Spiels (falls definiert) heißt **Wurzel**. Aktive Zustände $x\in X^\circ$ nennt man abkürzend auch **Knoten**. Endliche terminale Zustände $x\in X_{<\infty}\cap\partial X$ heißen **Blätter**. Unendliche terminale Zustände $x\in X_\infty$ heißen auch **Enden**.

Graphische Darstellung von Spielbäumen

E308
Erläuterung

Angenommen, im Zustand $x\in X^\circ$ ist Spieler $j\in I$ allein am Zug, also $\mathrm{pr}^j : A_x \xrightarrow{\sim} A_x^j$. In der Graphik notieren wir dann j am Knoten x und die möglichen Aktionen $a\in A_x^i$ an den zugehörigen ausgehenden Kanten. Ist eine Spielermenge $J\subseteq I$ am Zug, also $\mathrm{pr}^J : A_x \xrightarrow{\sim} A_x^J=\prod_{j\in J} A_x^j$, so notieren wir entsprechend J am Knoten und A_x^J an den Kanten. Diese Beschriftung entspricht einer Bijektion $f_x : A_x \xrightarrow{\sim} x\mathcal{A}\cap X$.

In der Literatur ist die Bijektion $A_x \xrightarrow{\sim} xA_x : a\mapsto xa$ üblich. Das heißt: Die gesamte Aktion $a\in A_x$ wird in der Trajektorie $x\mapsto xa$ vermerkt.

Eine Surjektion $f_x : A_x \twoheadrightarrow x\mathcal{A}\cap X$ würde genügen. Anschaulich gesagt: Nur das als relevant betrachtete Ergebnis der Aktionen wird vermerkt. Äquivalente Aktionen entsprechen dann derselben Kante im Spielbaum.

Beispiel: Bei einer Abstimmung bedeutet die Bijektion $f_x : A_x \xrightarrow{\sim} x*A_x$, dass die Stimme jedes Spielers protokolliert wird. Hingegen protokolliert die Surjektion $A_x \twoheadrightarrow x*\{\mathrm{Ja},\mathrm{Nein}\}$ nur das Ergebnis. Die Möglichkeit solcher Zusammenfassungen ist flexibler und erlaubt kleinere Bäume.

Graphische Darstellung von Spielbäumen

Beispiel: Eine geheime Ja/Nein-Abstimmung von drei Spielern:

Im ersten Fall wird gleichzeitig abgestimmt und nur das Endergebnis gespeichert. Im zweiten Fall werden einzelnen Stimmabgaben gespeichert aber nicht preisgegeben. Im dritten Fall wird nacheinander abgestimmt, aber ohne Information über die vorigen Stimmabgaben.

🙂 Es ist wie beim Datenschutz: Welche Daten werden gespeichert? Welche werden an die Spieler weitergegeben? Es gibt viele Varianten.

Beispiel: Wurf einer Münze. Pfadregel für bedingte Wkten.

Graphische Darstellung von Spielbäumen

Ein Spiel Γ in extensiver Form ist eine vollständige Beschreibung. Das ist mühsam, dient aber dazu, alle Unklarheiten zu beseitigen.

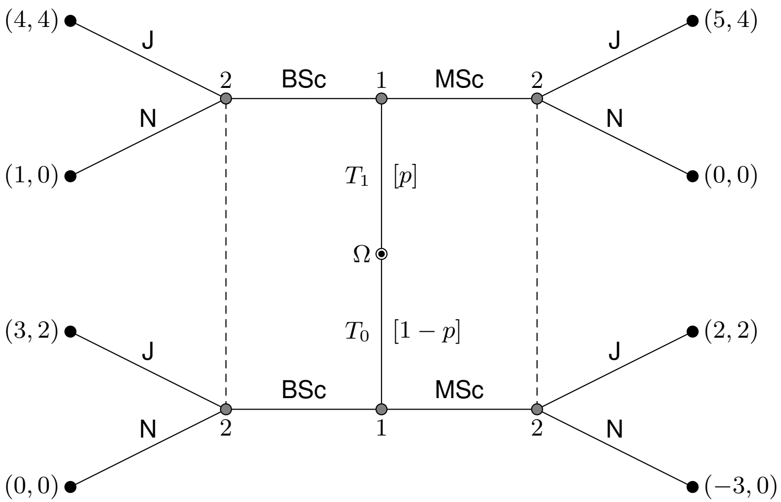
In den allermeisten praktischen Anwendungen wird die Beschreibung nicht formal und vollständig ausgeführt. Selbst graphische Darstellung durch Spielbäume wird naturgemäß nur für kleine Illustrationen genutzt.

Meist wird eine informelle Beschreibung in zusammenfassenden Worten gegeben. Wann ist eine solche Beschreibung brauchbar? Das Kriterium ist einfach: Die informelle Beschreibung muss genug Information liefern, um die zugehörige extensive Form daraus zu konstruieren.

Um es ganz konkret zu machen, fragen Sie sich ganz einfach: Können Sie das Spiel aufgrund der gegebenen Daten zweifelsfrei implementieren, etwa auf einem Computer programmieren?

Ist die extensive Form aus den gegebenen Informationen noch nicht klar, so ist die Beschreibung unvollständig und das Modell ist nicht definiert.

Spiel mit Signalen



Spiel mit Signalen

Beispiel: Alice, eine Personalchefin, muss entscheiden, ob Sie Bob, einen Mathematiker, einstellt. Sie sieht nicht seine wahren Fähigkeiten, T_0 gut oder T_1 sehr gut, sondern nur seinen Abschluss BSc oder MSc.

Beide Fälle sind möglich mit den angegebenen Wahrscheinlichkeiten. Diese Parameter entsprechen Alice's Annahmen oder Erfahrungen.

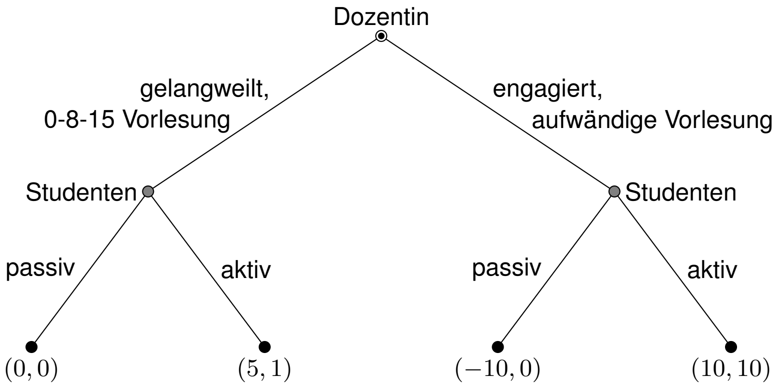
Die Nutzenfunktion / Auszahlungen sind jeweils wie angegeben:
Für den eigentlichen Job ist der Abschluss hier unerheblich,
Bobs wahre Fähigkeiten hingegen zahlen sich positiv aus.

Alice muss allein auf Grundlage von Bobs Signal „BSc“ oder „MSc“ entscheiden. (Weitere Möglichkeiten zu genaueren Informationen wie Bewerbungsgespräche, Assessment Center, Probezeit, etc. lassen wir hier außer Acht.) Bob weiß das. Welche Strategien sind hier rational? In welchen Situationen lohnt es sich zu bluffen?

Dieses Beispiel soll zunächst die Ideen und Schreibweisen illustrieren. Auch für solche Situationen wollen wir Lösungskonzepte formulieren. Eine genauere Analyse verschieben wir notgedrungen auf später.

Auch die universitäre Lehre ist ein Spiel.

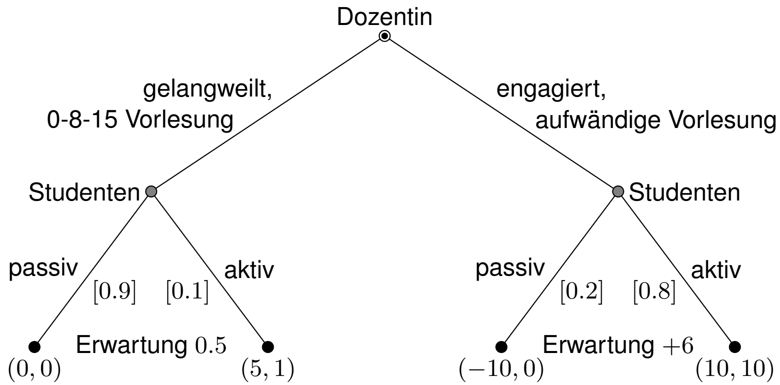
E313



Eine Dozentin muss sich entscheiden, eine langweilige 0-8-15-Vorlesung oder eine engagierte aufwändige Vorlesung zu halten. Die Studenten müssen sich entscheiden, passiv mitzutraben oder aktiv mitzuarbeiten. Die Zufriedenheit u_1 und der Lernerfolg u_2 sind dann entsprechend. (Die gewählten Zahlen sind etwas willkürlich und diskussionswürdig.)

Das Dilemma der Lehre: optimistisch

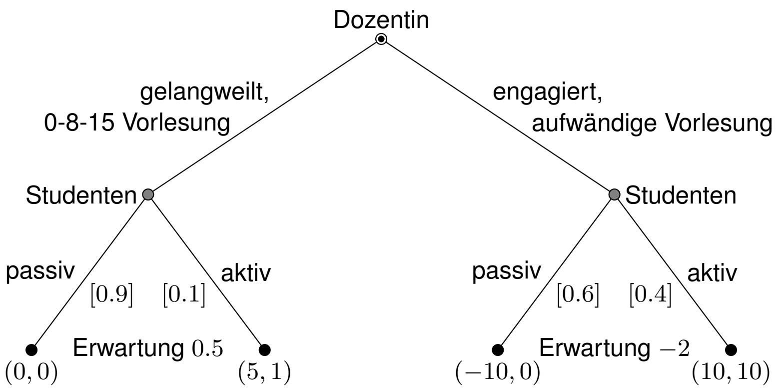
E314



Die Dozentin geht in Vorleistung und muss ihre Vorlesung vorbereiten. Eine junge naive Dozentin glaubt an die gezeigten Wahrscheinlichkeiten. (Die gewählten Zahlen sind etwas willkürlich und diskussionswürdig.) Sie entscheidet sich daraufhin für eine engagierte aufwändige Vorlesung. Die Wirklichkeit sieht dann allzu oft ganz anders aus…

Das Dilemma der Lehre: pessimistisch

E315



Die Dozentin geht in Vorleistung und muss ihre Vorlesung vorbereiten. Eine erfahrene Dozentin kennt die obigen realen Wahrscheinlichkeiten. (Die gewählten Zahlen sind etwas willkürlich und diskussionswürdig.) Sie entscheidet sich folgerichtig für eine langweilige 0-8-15-Vorlesung. Ist sie frustriert und gelangweilt? Ja. Wer ist schuld? Urteilen Sie selbst!

Das Dilemma der universitären Lehre

E316

Quid rides? Mutato nomine de te fabula narratur.
[Was lachst du? Mit anderem Namen handelt die Geschichte von dir.]
Horaz, Sermones I. 1. 69.

Das ist eine Anwendung der Spieltheorie auf eine relevante Situation: nämlich unsere! Die aktuelle Zwischenbilanz ist eher ernüchternd:

Wir, das Spieltheorie-Team, investieren jede Woche viel Zeit, Energie und Mühe in die Vorlesungen und Übungen. Einige Studierende nutzen dies und gehen mit und arbeiten fleißig. Über dieses Engagement und den sichtbaren Lernerfolg freuen wir uns. Das war unsere Hoffnung.

Aber eine zu große Zahl der physisch Anwesenden schaut nur passiv zu und ignoriert all unsere Bemühungen und ihre eigene Verantwortung. Das ist für uns persönlich enttäuschend und sehr frustrierend.

Wenn Sie diese Klage verstehen können, dann sind Sie vermutlich nicht betroffen, also nichts für ungut. Wenn Sie dies nicht verstehen können, dann sind Sie vermutlich gemeint, aber ignorieren all meine Appelle. Fazit: Was ich hier schreibe, sage oder tue hat keinerlei Einfluss.

Dynamische Spiele in extensiver Form

Definition E3A (dynamisches Spiel, extensive Form)

Ein **dynamisches Spiel** $\Gamma = (\ X,\ \Omega, \mathbf{P}, p,\ I, A, q,\ f, u\ )$ in (strikt) **extensiver Form** beinhaltet folgende Daten:

1. Den Zustandsraum $X = X^\circ \sqcup \partial X$ in Baumform, $X \subseteq \mathcal{A}^{\le\infty}$, und die Auszahlung $u : \partial X \to \mathbb{R}^I$ auf terminalen Zuständen.
2. Den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbf{P})$ und zu jedem Zustand $x \in X^\circ$ eine Zufallsvariable $p_x : \Omega \twoheadrightarrow \Omega_x : \omega \mapsto \omega_x$, kurz $p : \Omega \to \prod_{x \in X^\circ} \Omega_x$.
3. Für jeden Spieler $i \in I$ die Aktionsmengen $A_x^i \ne \emptyset$ und auf den i–aktiven Zuständen $X^{\circ i} := \{\ x \in X^\circ \mid |A_x^i| \ge 2\ \}$ die Auskunft $q^i : X^{\circ i} \twoheadrightarrow X^i$, wobei $A_x^i = A_y^i$ für alle $x, y \in X^{\circ i}$ mit $q^i(x) = q^i(y)$.
4. Die Dynamik des Spiels als Bijektion $f_x : \Omega_x \times A_x \xrightarrow{\sim} x\mathcal{A} \cap X$. Kanonisch ist die Aneinanderhängung $f_x : (\omega, a) \mapsto x * (\omega, a)$. Hier ist $A_x = \prod_{i \in I} A_x^i$ die Menge der möglichen Aktionsvektoren.

Schwach extensiv genügt eine Surjektion $f_x : \Omega_x \times A_x \twoheadrightarrow x\mathcal{A} \cap X$. Bei vollständiger Information genügen die Daten $(X, \Omega, \mathbf{P}, p, I, A, f, u)$, deterministisch nur (X, I, A, q, f, u) oder sogar nur (X, I, A, f, u).

Dynamische Spiele in extensiver Form

In jedem Zustand $x \in X^\circ$ erfolgt eine Ziehung $\omega_x \in \Omega_x$. Diese müssen nicht unabhängig sein, daher betrachten wir $(\Omega, \mathbf{P})$ und $p_x : \Omega \twoheadrightarrow \Omega_x$. Im Zustand $x \in X^\circ$ hat der Spieler $i \in X$ die Aktionsmenge $A_x^i \ne \emptyset$.

Die Dynamik $f_x : \Omega_x \times A_x \to x\mathcal{A} \cap X$ setzt den Spielverlauf fort, indem an die bisherige Trajektorie der nächste Schritt angehängt wird.

In der Literatur ist die Bijektion $f_x : (\omega, a) \mapsto x * (\omega, a)$ üblich. Das heißt: Die gesamte Aktion (ω, a) wird in der Trajektorie $x \mapsto x * (\omega, a)$ vermerkt.

Eine Surjektion $f_x : \Omega_x \times A_x \twoheadrightarrow x\mathcal{A} \cap X$ würde genügen. Anschaulich: Nur das als relevant betrachtete Ergebnis der Aktionen wird vermerkt. Äquivalente Aktionen entsprechen dann derselben Kante im Spielbaum. Diese Zusammenfassung ist flexibler und erlaubt kleinere Bäume. Deshalb führen wir dies hier als schwach extensive Spiele ein.

Um auch unvollständige Information zu erfassen, beschreiben wir die Auskunft für Spieler i durch eine Projektion $q^i : X^{\circ i} \twoheadrightarrow X^i : x \mapsto x^i$. Hier ist $X^{\circ i} = \{\ x \in X^\circ \mid |A_x^i| \ge 2\ \}$ die Menge der i–aktiven Zustände. Spieler i kann seine Aktion nur aus seiner Information x^i ableiten.

Dynamische Spiele in extensiver Form

Definition E3B (Strategien und Spielverlauf)

Das Spiel Γ definiert die **Strategiemenge** $S := \prod_{i \in I} S^i$ gemäß

$$S^i := \Big\{\ s^i \in \prod\nolimits_{x \in X^\circ} A_x^i \ \Big|\ s_x^i = s_y^i \text{ falls } x, y \in X^{\circ i} \text{ und } q^i(x) = q^i(y)\ \Big\}$$

Aus Startzustand $x_m \in X_m$, Zufallselement $\omega \in \Omega$ und Strategievektor $s \in S$ folgt der **Spielverlauf** rekursiv gemäß $x_{t+1} = f(x_t, \omega_{x_t}, s_{x_t})$ und

$$\lim\ :\ X \times \Omega \times S \to \partial X\ :\ \lim(x_m, \omega, s) := \bigcup\nolimits_{t \ge m} x_t.$$

Auch im Spezialfall einer endlichen Trajektorie $x_m, x_{m+1}, \dots, x_n$ mit terminalem Zustand $x_n \in \partial X$ haben wir $\lim(x_m, \omega, s) = \bigcup_{t \ge m} x_t = x_n$.

🙂 Eine Strategie $s^i \in S^i$ für Spieler $i \in I$ ist ein Handlungsplan, also eine Aktion $s_x^i \in A_x^i$ für jeden aktiven Zustand $x \in X^\circ$ des Spiels. Die Spieler entscheiden sich also nicht spontan, sondern im Voraus. Vorteil: Damit lassen sich Spielverlauf und Auszahlung berechnen.

Dynamische Spiele in extensiver Form

Definition E3C (teilspielperfekte Gleichgewichte)

Die Auszahlung $u : \partial X \to \mathbb{R}^I$ setzen wir fort und summieren über $(\Omega, \mathbf{P})$:

$$\begin{aligned} \tilde{u}\ &:\ X \times \Omega \times S \to \mathbb{R}^I\ :\ (x, \omega, s) \mapsto u(\lim(x, \omega, s)) \\ u\ &:\ X \times S \to \mathbb{R}^I\ :\ \qquad (x, s) \mapsto \mathbf{E}\big[\omega \mapsto \tilde{u}(x, \omega, s)\big] \end{aligned}$$

Stillschweigend fordern wir absolute Summierbarkeit, etwa Ω endlich. Zu jedem Startzustand $x \in X$ erhalten wir ein Spiel in Normalform:

$$u_x\ :\ S = \prod\nolimits_{i \in I} S^i \to \mathbb{R}^I\ :\ s \mapsto u(x, s) = \mathbf{E}\big[\omega \mapsto u(x, \omega, s)\big]$$

Damit definieren wir die **teilspielperfekten Gleichgewichte** von Γ:

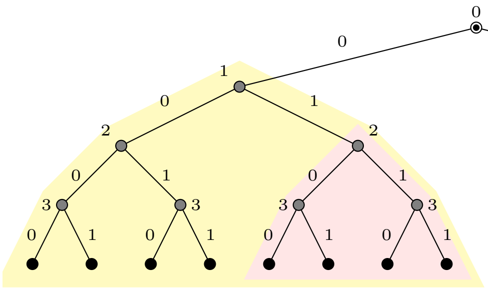
$$\mathrm{SPE}(\Gamma) = \mathrm{SPE}(\Gamma, S) := \bigcap\nolimits_{x \in X^\circ} \mathrm{NE}\big(u_x : S \to \mathbb{R}^I\big)$$

Ebenso gemischt: global $s^i \in \bar{S}^i = [S^i]$ oder lokal $s^i \in \tilde{S}^i = \prod_{x \in X^\circ} [A_x^i]$. Damit definieren wir die Gleichgewichte $\mathrm{SPE}(\Gamma, \bar{S})$ und $\mathrm{SPE}(\Gamma, \tilde{S})$.

⚠ Bei unvollständiger Information müssen wir dies noch verfeinern!

Illustration zu Teilspielen

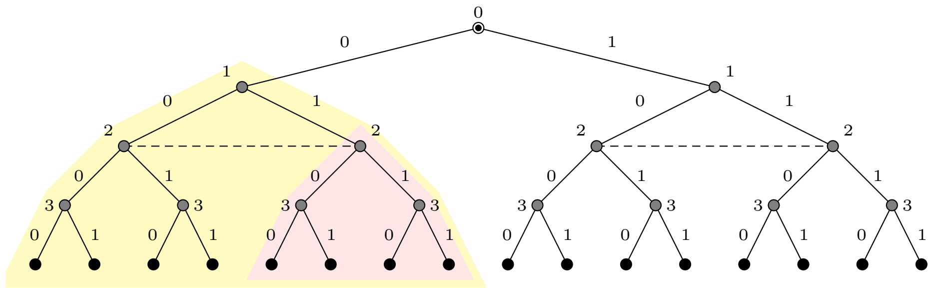
Das Teilspiel Γ_x besteht aus $x \in X$ und all seinen Folgezuständen:



Zustände von Γ_x sind demnach alle Worte x', die mit x beginnen.
Diese Teilmenge von $\mathcal{A}^{\le\infty}$ ist selbst baumförmig, wie man nachprüft.
Aus den Daten $\Gamma = (X, \Omega, \mathbf{P}, p, I, A, q, f, u)$ erhalten wir alle Daten des Teilspiels $\Gamma_x = (X', \Omega, \mathbf{P}, p', I, A', q', f', u')$ durch Einschränkung.

Illustration zu Teilspielen

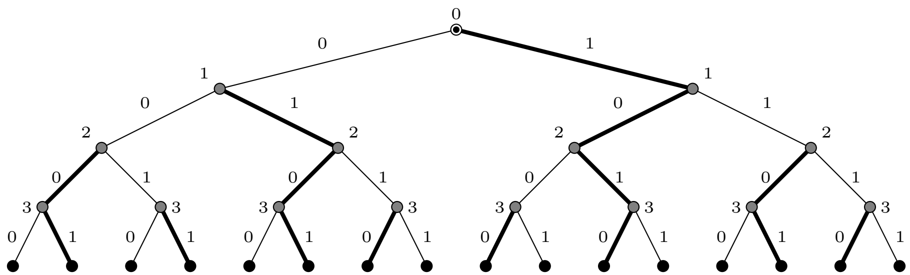
Teilspiele sollten saturiert sein, also keine Informationsmengen zerlegen:



Das heißt, kein Spieler $i \in I$ weiß im Teilspiel Γ_x mehr als zuvor in Γ.
Bei vollständiger Information ist dies überhaupt keine Einschränkung.
Bei unvollständiger Information ist diese Einschränkung meist zu streng.
Hierzu entwickeln wir später bessere Lösungskonzepte.

Strategievektoren und Spielverlauf

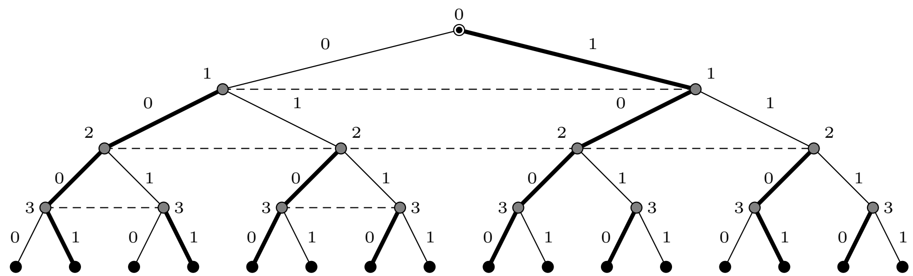
Der Strategievektor $s \in S$ und ggf. $\omega \in \Omega$ bestimmen den Spielverlauf:



Dies gilt nicht nur bei Beginn im Startzustand / der Wurzel $x = \alpha$, sondern bei Beginn in jedem beliebigen Zustand $x \in X$ des Baumes!
Erinnerung: Eine Strategie $s^i \in S^i$ für Spieler i ist ein Handlungsplan, also eine Aktion $s^i_x \in A^i_x$ für jeden aktiven Zustand $x \in X^\circ$ des Spiels.

Strategievektoren und Spielverlauf

Für ununterscheidbare Zustände sind die Aktionen strikt gekoppelt:

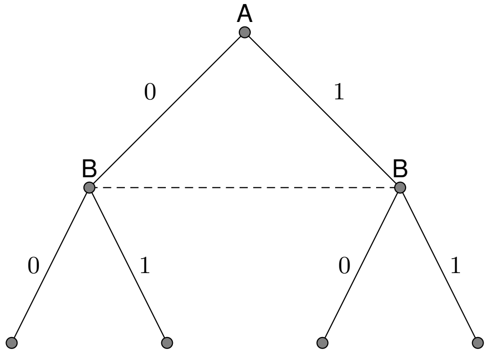


Spieler i kann seine Aktion $s^i_x \in A^i_x$ nur aus seiner Kenntnis x^i ableiten.
Sind also $x, y \in X^{\circ i}$ für i ununterscheidbar, so muss $s^i_x = s^i_y$ gelten.
Genau dies ist der Sinn der Informationsstruktur und der Auskunft q^i:
Strategien von Spieler i nutzen nur seine beschränkte Kenntnis.

Unvollständige Information

E325

Beispiel: Bob hat den Zug von Alice nicht gesehen:



Alltagbeispiel: „Ich habe nicht zugehört. Was hat sie eben gesagt?“

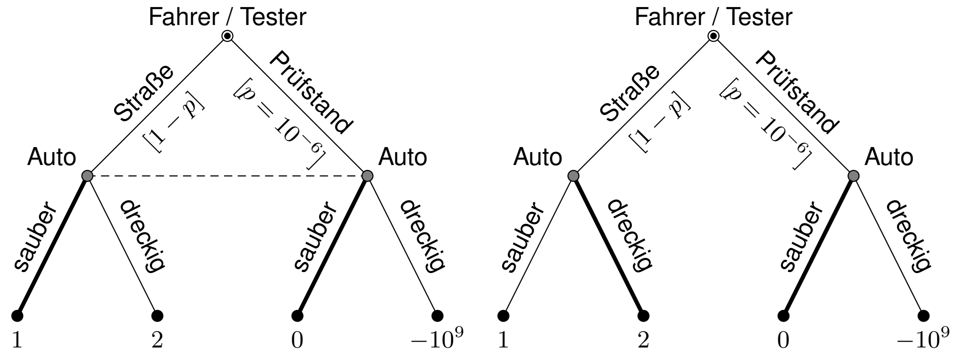
Im Allgemeinen kennt Spieler i nur einen kleinen Auszug des gesamten Spielzustands; wir sprechen dann von **unvollständiger Information**.

Das geschieht zum Beispiel dann, wenn ein Spieler verdeckt zieht. Die anderen Spieler sind dann über seinen Zug im Ungewissen.

Unvollständige Information

E326

Beispiel: Schadstoffmessung und Abgasskandal *Dieselgate*:



Kennt jeder Spieler $i \in I$ jederzeit den Zustand $x \in X$ des Spiels, so sprechen wir von **vollständiger Information** (*perfect information*).

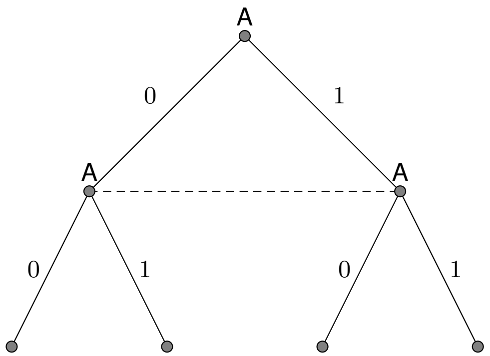
Diese Maximalforderung ist in vielen Anwendungen zuviel verlangt: Häufig ist **unvollständige Information** wesentlich für das Spiel.

Beim aktuellen Abgasskandal war die Autoelektronik allzu intelligent, so dass sie die Spielregeln leicht umgehen und manipulieren konnte.

Unvollständige Erinnerung

E327

Beispiel: Alice hat ihren eigenen Zug vergessen:



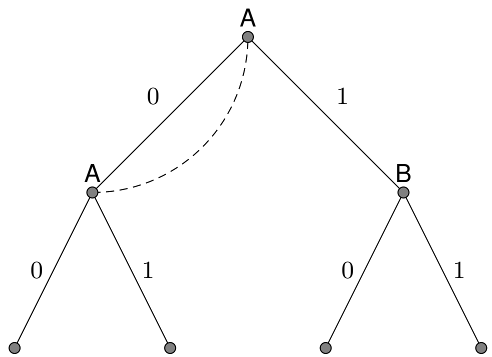
Das scheint auf den ersten Blick verrückt, kommt aber tatsächlich vor.

Alltagsbeispiele: „Habe ich vorhin das Bügeleisen ausgeschaltet?“ oder: „Eben hatte ich noch mein Handy, wo habe ich es hingelegt?“

Unvollständige Erinnerung

E328

Beispiel: Alice hat vergessen, ob sie bereits gezogen hat:



Das scheint auf den ersten Blick verrückt, kommt aber tatsächlich vor.

Alltagsbeispiele: „Habe ich schon vollständige Erinnerung erklärt?“ oder extremer: „War ich schon in der Mensa oder noch nicht?“

Vollständige Erinnerung

Minimalforderung ist meist **vollständige Erinnerung** (*perfect recall*): Der Spieler $i \in I$ erinnert sich jederzeit an seine bisherigen Aktionen.

(Der Film *Total recall* von 1990 mit Arnold Schwarzenegger beruht auf der Kurzgeschichte „We Can Remember It for You Wholesale“ von Philip K. Dick und handelt von wahren und falschen Erinnerungen.)

Formal: Ein **Spielverlauf** oder **Historie** $h : \alpha \to x$ ist eine Folge

$$h = (\ x_0, \omega_0, a_0;\ x_1, \omega_1, a_1;\ \dots;\ x_{n-1}, \omega_{n-1}, a_{n-1}\ )$$

von Zuständen $x_t \in X$ von $x_0 = \alpha$ nach $x_n = x$ sowie Zufallselementen $\omega_t \in \Omega_{x_t}$ und Aktionen $a_t \in A_{x_t}$, wobei $x_{t+1} = f(x_t, \omega_t, a_t)$ für $0 \le t < n$. Für Spieler $i \in I$ ist die **persönliche Historie** $h^i : \alpha^i \to x^i$ die Folge

$$h^i = (\ x_0^i, a_0^i;\ x_1^i, a_1^i;\ \dots;\ x_{n-1}^i, a_{n-1}^i\ ).$$

Hierbei ist $x_t^i = q^i(x_t)$ seine Auskunft / Kenntnis zum Spielstand x_t und $a_t^i \in A_{x_t}^i$ seine Aktion. Paare (x_t^i, a_t^i) mit $A_{x_t}^i = \{a_t^i\}$ werden gelöscht.

Vollständige Erinnerung

Diese Formulierung ist wohlüberlegt: Knoten, an denen Spieler i nichts zu entscheiden hat, treten in seiner persönlichen Historie h^i nicht auf.

Die Länge n der Historie $h : \alpha \to x$ von $\alpha \in X_\ell$ in $x \in X_m$ ist die Anzahl der durchlaufenen Knoten, also die Höhendifferenz $n = m - \ell$ im Baum.

Durch die Löschung der für ihn inaktiven Knoten kann Spieler i allein aus $h^i : \alpha^i \to x^i$ nicht die Zahl der durchlaufenen Knoten rekonstruieren. Insbesondere hat er somit keinen Zugriff auf die Systemzeit m.

Beispiel: In Anwendungen kann es vorkommen, dass Spieler i an einer Phase des Spiels nicht beteiligt ist, etwa separaten Verhandlungen der anderen Spieler. Dann sollte h^i aus dieser Phase keine Information an Spieler i übertragen, selbst nicht die Länge der Verhandlungen.

Das Grundprinzip ist immer dasselbe und ganz einfach: Die Abbildung q^i kodiert die gesamte Information, die Spieler i zur Verfügung steht. Sie sollte insbesondere kompatibel sein mit der persönlichen Historie h^i. Genau diese Forderung führt uns nun zur vollständigen Erinnerung.

Vollständige Erinnerung

Definition E3D (vollständige Erinnerung)

Sei $\Gamma = (X, \Omega, \mathbf{P}, p, I, A, q, f, u)$ ein dynamisches Spiel.

Ein Spieler $i \in I$ hat **vollständige Information**, wenn seine Auskunft $q^i : X^{\circ i} \twoheadrightarrow X^i$ injektiv ist. Jede Äquivalenzklasse ist dann einpunktig. Kanonisch gelingt dies vermöge der identischen Abbildung $q^i = \mathrm{id}_{X^{\circ i}}$. In diesem Falle kann die explizite Angabe von q^i weggelassen werden.

Spieler i hat **vollständige Erinnerung**, wenn für je zwei $x, \tilde{x} \in X^{\circ i}$ und Historien $h : \alpha \to x$ und $\tilde{h} : \alpha \to \tilde{x}$ gilt: Aus $h^i \ne \tilde{h}^i$ folgt $q^i(x) \ne q^i(\tilde{x})$. Gilt dies für alle $i \in I$, so ist Γ ein Spiel mit **vollständiger Erinnerung**.

Sind die persönlichen Historien h^i und $\tilde{h}^i$ verschieden, so kann Spieler i die Zustände x und $\tilde{x}$ unterscheiden allein anhand der Auskunft q^i.

Bei unvollständiger Erinnerung hätten wir die paradoxe Situation, dass Spieler i seine Kenntnis $q^i(x)$ über den aktuellen Zustand x verfeinert, wenn er zusätzlich die Historie h^i seiner bisherigen Aktionen nutzt.

Vollständige Erinnerung

Information ist ein wertvolles Gut, und dies gilt auch in der Spieltheorie. Im Sinne einer Koalition liegt es nahe, Teilmengen $J \subseteq I$ zu betrachten.

Beispiel: Beim Skatspiel gilt: Selbst wenn sich die beiden Gegenspieler illegalerweise absprechen, haben sie nicht vollständige Information über den Spielzustand: Aus ihren $10 + 10$ Karten leiten sie die verbleibenden 12 der insgesamt 32 Karten ab, kennen aber noch nicht zweifelsfrei die Aufteilung dieser Karten: 2 im Skat und 10 auf der Hand des Spielers. Dasselbe gilt, wenn ein Gegenspieler dem Spieler in die Karten schaut.

Analog formulieren wir für $J \subseteq I$ gemeinsam vollständige Erinnerung. Wir definieren die gemeinsame Historie h^J für $J \subseteq I$ genauso wie die persönliche Historie h^i für einen einzelnen Spieler $i \in I$. Die Koalition J hat gemeinsam vollständige Erinnerung, wenn für je zwei Historien $h : \alpha \to x$ und $\tilde{h} : \alpha \to \tilde{x}$ gilt: Aus $h^J \ne \tilde{h}^J$ folgt $q^J(x) \ne q^J(\tilde{x})$.

Wir werden meist für jeden Spieler $i \in I$ vollständige Erinnerung fordern. Hieraus folgt gemeinsam vollständige Erinnerung für alle $J \subseteq I$, $J \ne \emptyset$.

Kapitel F

Wiederholte Spiele und Nashs Folk Theorem

Mögen die Spiele beginnen!
Mögen sie sich wiederholen!

Inhalt dieses Kapitels

Motivation und Überblick

Wiederholte Spiele dienen zur Untersuchung langfristiger Interaktion: Hierbei beurteilen Spieler ihre gegenwärtigen Aktionen nicht nur nach dem sofortigen einmaligen Gewinn, also nach ihrem kurzfristigen Vorteil, sondern auch ihre Auswirkung auf zukünftiges Verhalten der Mitspieler. Dazu müssen sie kurz- gegen langfristige Konsequenzen abwägen.

Das Ziel unserer Untersuchung ist nun, mögliche Verhaltensweisen mathematisch präzise zu beschreiben und spieltheoretisch zu erklären:

- Lohnt sich kurzfristiger Egoismus oder langfristige Kooperation?
- Welche Vereinbarungen sind lukrativ und selbststabilisierend?
- Wie müssen Zurechtweisungen auf Abweichungen reagieren?
- Wann / wie funktioniert Abschreckung durch Strafandrohung?

Viele Strategien sind uns aus dem Alltag intuitiv vertraut und werden hier mathematisch erklärt und quantifiziert. Zur Untersuchung nutzen wir geeignete spieltheoretische Werkzeuge: Eine Vereinbarung ist nur dann rational glaubwürdig, wenn sie ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist.

Motivation und Überblick

Wir beginnen mit dem Gefangendilemma als wiederholtes Spiel. Dieses einfache Modell analysieren wir ausführlich und detailliert. Die dabei gemachten Beobachtungen sind recht allgemein gültig und führen uns zu Nashs Folk Theorem: Wir erarbeiten uns eine vereinfachte aber quantitativ präzisierte Version aus dieser berühmten Satzfamilie.

Mögliche Anwendungen und Analogien sind überaus vielfältig:

- Langfristige Verträge, etwa Arbeits- oder Kooperationsverträge.
- Teamarbeit, soziale Bindungen, Konventionen und Sanktionen.
- Familiäre Bindungen, etwa Ehe und Kindererziehung.

Der letzte Punkt löst oft Verwunderung und manchmal Ablehung aus: „Hier geht es um Gefühl, nicht um Kalkül!“ Sind hier Rationalität und mathematische Analyse nicht fehl am Platze? Geht es nicht vielmehr um wahre Liebe, Zuneigung, Verantwortung, Verlässlichkeit, usw.? Ja, auch, und gerade diese Emotionen und Normen sind interessant! Sie sind nicht zufällig, sondern Ergebnis einer Evolution: biologisch, sozial und individuell. Die Spieltheorie bietet mögliche Erklärungen.

Wiederholte Spiele

Sprichwörter bündeln Erfahrungen, besonders auch spieltheoretische. Die folgenden wollen wir mathematisch erklären und nachrechnen.

Fool me once, shame on you!
Fool me twice, shame on me!

[Betrügst du mich einmal, Schande über dich!
Betrügst du mich zweimal, Schande über mich!]

On peut tromper une fois mille personnes,
mais on ne peut pas tromper mille fois une personne.

[Du kannst tausend Menschen einmal betrügen,
aber nicht einen Menschen tausendmal.]

Bei wiederholter Interaktion besteht die Möglichkeit der Kooperation aber auch des Betrugs. Zusammenarbeit ist nur dann langfristig stabil, wenn Kooperation ausreichend belohnt, Betrug dagegen bestraft wird. Diese qualitative Erkenntnis wollen wir nun quantitativ ausarbeiten.

Wiederholte Spiele

Diese Weisheit wurde in vielen Varianten formuliert und wiederentdeckt. Bei der gegenwärtigen politischen Entwicklung möchte ich hinzufügen: Gegen *fake news* und *alternative facts* hilft nur die Aufklärung!

You can fool all the people some of the time
and some of the people all the time,
but you cannot fool all the people all the time.

Diese englische Version wird Abraham Lincoln zugeschrieben, wohl zu Unrecht, siehe `quoteinvestigator.com/2013/12/11/cannot-fool/`. Aus dem Artikel „Dieu" der *Encyclopédie* von Diderot und d'Alembert, `enccre.academie-sciences.fr/encyclopedie/article/v4-2500-0/`:

On peut tromper quelques hommes,
ou les tromper tous dans certains lieux et en certains temps,
mais non pas tous les hommes dans tous les lieux et dans tous les siècles.

Diesen Erfahrungssätzen nun mathematisch auf den Grund gehen.

Wiederholte Spiele

In vielen Spielen setzt sich der Egoismus der Spieler durch. Das ist rational erklärbar durch individuelle Gewinnmaximierung. Genau auf dieser Grundannahme beruht die klassische Spieltheorie. Hierzu kennen und nutzen wir Gleichgewichte als Lösungskonzept.

In vielen Situationen spielen die Spieler jedoch nicht nur einmal, sondern wiederholt gegeneinander, idealisiert gar unendlich oft. In solchen Fällen kann sich das Verhalten grundsätzlich ändern: Kooperation wird lukrativ, da jeder auf den anderen angewiesen ist.

Wir können und wollen fragen, wie Kooperation überhaupt entsteht. Hierzu dienen die folgenden Beispiele und Übungen: Wir untersuchen hier Kooperation und Betrug, Treue und Verrat unter dem Mikroskop. Das gipfelt in Nashs Folk Theorem als erstem allgemeinen Ergebnis.

Diese Satzfamilie benennt explizit archetypische Strategien, die ein vorgegebenes Verhalten erzeugen, meist ein gewünschtes Verhalten zum allseitigen Vorteil. Dies interpretieren wir oft als „soziale Norm". Die Struktur und Funktionsweise dieser Normen ist faszinierend.

Wiederholte Spiele

Wichtig für die Zusammenarbeit sind Hoffnung und Gedächtnis: Alle Spieler benötigen ausreichend Hoffnung, noch lange zu spielen, und genug Gedächtnis, um sich an vergangenes Verhalten zu erinnern, um gegenseitig Kooperation belohnen und Betrug bestrafen zu können.

Diese Möglichkeit besteht zum Beispiel nicht, wenn die Gegenspieler jedesmal neu zugelost werden und ihre Identität nicht erkennbar ist. Dann ist eine zukünftige Kooperation oder Bestrafung unmöglich, und es geht nur noch um den einmaligen sofortigen Vorteil.

Wir untersuchen daher Situationen, in denen eine feste Spielermenge I mehrere Spiele hintereinander spielt. Die Aktionen der vorherigen Zügen sind bekannt, daraufhin wählt jeder Spieler seinen aktuell nächsten Zug. So können die Spieler drohen oder locken, belohnen oder bestrafen.

Die Menge $\mathrm{SPE}(\Gamma)$ aller teilspielperfekten Gleichgewichte ist oft riesig, daher bestehen hier phantastisch viele Möglichkeiten. Das bedeutet andererseits, dass meist keine eindeutige Vorhersage ableitbar ist. Es geht uns vorrangig darum, zu konstruieren, was möglich ist.

Das Gefangenendilemma, unendlich wiederholt

Wir iterieren das Spiel $g:\{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit diskontierter Auszahlung:

A \ B	0	1
0	0 0	-1 2
1	2 -1	1 1

Zu $N \in \mathbb{N}$ und $\delta \in \,]0,1[$ sei die Auszahlung gegeben durch

$$u : \{00, 01, 10, 11\}^N \to \mathbb{R}^2,$$

$$u(x) = \frac{1-\delta}{1-\delta^N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta^n g(x_n)$$

Aufgabe: (0) Formalisieren Sie dies als Spiel Γ in extensiver Form. Wie würden Sie $g:\{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\mathrm{NE}(g) = \{00\}$ parametrisieren? Was erhalten Sie im Grenzfall $\delta \nearrow 1$? Was erhalten Sie für $N \nearrow \infty$?

(1) Für $N \in \mathbb{N}$: Finden Sie alle $s \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$ und Auszahlungen $u(s)$.

(2) Für $N = \infty$: Gibt es ein $s \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$ mit Auszahlung $u(s) = (1,1)$? Genügt es, dass jeder Spieler sich nur an den letzten Zug erinnert? Was passiert, wenn beide Spieler keinerlei Gedächtnis haben? Was passiert, wenn nur ein Spieler sich erinnert?

Das Gefangenendilemma, unendlich wiederholt

Lösung: (0) Allgemeines Gefangenendilemma, affin normiert:

A \ B	0	1
0	0 0	β_2 α_1
1	α_2 β_1	1 1

mit Konstanten
$\alpha_1 > 1 > 0 > \beta_1$
$\alpha_2 > 1 > 0 > \beta_2$

Wir definieren das iterierte Spiel $\Gamma = (X, I, A, f, u)$ extensiv wie folgt: Spielermenge $I = \{1 = \mathrm{Alice}, 2 = \mathrm{Bob}\}$, Alphabet $\mathcal{A} = \{00, 01, 10, 11\}$, Zustände $X = \mathcal{A}^{\le N}$, aktiv $X^\circ = \mathcal{A}^{<N}$, Aktionen $A = A^1 \times A^2 = \{0,1\}^2$. Die Fortsetzung ist kanonisch, also $f : X^\circ \times A \to X : f(x,a) = x * a$. Strategiemengen sind demnach $S^i = \{\, s^i : X^\circ \to A^i \,\}$ für $i \in I$. Auszahlung $u^i : \partial X \to \mathbb{R} : u^i(x) = \frac{1-\delta_i}{1-\delta_i^N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta_i^n g^i(x_n)$. Grenzwerte:

Für $\delta_i \nearrow 1$ wird $u^i(x)$ zum arithmetischen Mittel $u^i(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g^i(x_n)$, für $N \nearrow \infty$ zur geometrischen Reihe $u^i(x) = (1-\delta_i) \sum_{n=0}^{\infty} \delta_i^n g^i(x_n)$.

Das Gefangenendilemma, unendlich wiederholt

(1) Wir untersuchen zuerst endliche Wiederholungen, also $N \in \mathbb{N}$. Wir suchen alle teilspielperfekten Gleichgewichte $(s^1, s^2) \in S^1 \times S^2$. Diese konstruieren wir durch Rückwärtsinduktion (Zermelo, Satz E2D):

Für $x \in X_{N-1}$ ist $(s^1_x, s^2_x) = (0,0)$ das einzige Gleichgewicht: Für jeden Spieler $i \in I$ ist die Strategie $s^i_x = 0$ strikt dominant. Das gilt induktiv für alle $x \in \mathcal{A}^n$ und $n = N-1, N-2, \dots, 2, 1, 0$.

Das einzige teilspielperfekte Gleichgewicht $(s^1, s^2) \in S^1 \times S^2$ besteht aus den konstanten Abbildungen $s^i : X^\circ \to A^i : x \mapsto 0$.

🙂 Satz F1C erklärt dieses Ergebnis allgemein per Rückwärtsinduktion: Haben die extensiven Spiele $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ keine unendlichen Trajektorien und jeweils nur ein teilspielperfektes Gleichgewicht, $\mathrm{SPE}(\Gamma_n) = \{s_n\}$, so auch ihre Verkettung, denn $\mathrm{SPE}(\Gamma_1 * \dots * \Gamma_N) = \{s_1 * \dots * s_N\}$.

⚠ Für unendliche Wiederholungen gilt dieses Argument nicht! Tatsächlich finden wir hier eine Vielzahl neuer Gleichgewichte. Hierzu ist die folgende Konstruktion (2) ein erster Schritt.

Das Gefangenendilemma, unendlich wiederholt

(2) Wir betrachten die **Grim-Trigger-Strategie** $s^i : X^\circ \to A^i$ für $i \in I$: Beide Spieler kooperieren solange keiner abweicht, danach nie mehr.

$$s^i : \left\{ \begin{aligned} \emptyset &\mapsto 1 \\ v * 00 &\mapsto 0 \\ v * 01 &\mapsto 0 \\ v * 10 &\mapsto 0 \\ v * 11 &\mapsto 1 \end{aligned} \right\} = \begin{cases} x \mapsto 1 & \text{für } x \in X_0 = \{\emptyset\}, \\ x \mapsto \min\{x^1_{n-1}, x^2_{n-1}\} & \text{für } x \in X_n,\ 0 < n < \infty. \end{cases}$$

Ab Zustand $x = v * w$ mit $w \in \{00, 01, 10\}$ ist der Verlauf $00\,00\,00\dots$. Keiner der beiden Spieler kann sich aus eigener Kraft verbessern.

Ab Zustand $x = v * 11$ ist der Verlauf $11\,11\,11\dots$. Weicht Spieler i ab, so erhöht er seine Auszahlung auf $\alpha_i > 1$, danach sinkt sie auf $0 < 1$.

Ausführlich: Sei $\tilde{s}^i \in S^i$ eine Strategie mit $\tilde{s}^i_x \ne s^i_x = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} u^i_x(\tilde{s}^i; s^{-i}) - u^i_x(s^i; s^{-i}) &\le (1-\delta_i)\big[\delta_i^n \alpha_i - \textstyle\sum_{k=n}^{\infty} \delta_i^k 1\big] \\ &= \delta_i^n \big[(1-\delta_i)\alpha_i - 1\big]. \end{aligned}$$

Das ist negativ für $\delta_i > 1 - 1/\alpha_i$. Hier lohnt sich Kooperation!

Iteriertes Gefangenendilemma und Grim Trigger

Satz F1A (iteriertes Gefangenendilemma und Grim Trigger)

Wir iterieren das Gefangenendilemma $g:\{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch

A \ B	0	1
0	A: 0, B: 0	A: α_1, B: β_2
1	A: β_1, B: α_2	A: 1, B: 1

mit Konstanten $\alpha_i > 1 > 0 > \beta_i$, und diskontierten Auszahlungen

$$u : \{00, 01, 10, 11\}^N \to \mathbb{R}^2,$$

$$u^i(x) = \frac{1-\delta_i}{1-\delta_i^N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta_i^n g^i(x_n).$$

(1) Im endlichen Fall $N < \infty$ gibt es nur ein einziges Gleichgewicht $(s^1, s^2) \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$, und dieses führt zur Auszahlung $u(s^1, s^2) = (0, 0)$.

(2) Für $N = \infty$ und $\delta_i \ge 1 - 1/\alpha_i$ ist zudem die Grim-Trigger-Strategie ein Gleichgewicht $(s^1, s^2) \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$ mit Auszahlung $u(s^1, s^2) = (1, 1)$.

Die Spieler kooperieren in (1) nie, aber in (2) im gesamten Spielverlauf.

Zusatz: Fall (2) gilt allgemein, sobald sich beide Spieler mindestens an den letzten Zug erinnern können, andernfalls gilt Fall (1).

Iteriertes Gefangenendilemma und Grim Trigger

In (2) wiederholen wir unendlich oft, sehr lange wie in (1) genügt nicht! Nun wenden Sie ein, dass unendliche Wiederholung unrealistisch ist. Realistischer sind wiederholte Spiele mit einer gewissen Abbruchwkt.

Es lohnt sich, über die Bedeutung dieser Formel nachzudenken. Die Diskontierung können wir auf drei Arten interpretieren:

1. Erstens als Wertverlust der Auszahlung, zum Beispiel Inflation: Geld morgen ist weniger wert als Geld heute. Der Wertverlust in Form des Faktors $\delta \in \,]0,1[$ ist hierbei für alle Spieler gleich.
2. Zweitens als individuelle Geduld: Warten verringert den Nutzen, auch hier ist Geld morgen weniger wert als Geld heute, diesmal aber für jeden Spieler $i \in I$ individuell diskontiert mit $\delta_i \in \,]0,1[$.
3. Drittens, eine Abbruchwkt $\varepsilon > 0$ ist wesentlich realistischer. Dies führt zur selben Formel mit dem Faktor $\delta = 1 - \varepsilon$.

Unser Modell ist wie immer beschämend simpel, aber es illustriert wohl das Prinzip. Es zeigt insbesondere ein Phänomen, dass Sie aus Ihrer Alltagserfahrung vermutlich kennen: Kooperation braucht Geduld!

Iteriertes Gefangenendilemma und Grim Trigger

Anschaulich besagt (2): Kooperation lohnt sich! Zwar kann jeder Spieler seinen Gegenspieler jederzeit betrügen, aber das gelingt ihm nur einmal.

Fool me once, shame on you! Fool me twice, shame on me!

Der kurzfristige Gewinn, den der Betrüger davon trägt, wird sofort und dauerhaft bestraft. Insgesamt lohnt sich der Betrug nicht; hierzu muss nur die Geduld δ_i groß genug sein, nämlich $\delta_i \le 1 - 1/\alpha_i$. Andernfalls, für $\delta_i < 1 - 1/\alpha_i$, obsiegt der kurzfristige Vorteil, kurz gesagt: die Gier.

Der Vorteil eines präzisen Modells ist: Wir können jetzt alles ausrechnen! Insbesondere können wir die Parameter $\alpha_i, \beta_i, \delta_i$ untersuchen und so den kritischen Wert $\delta_i = 1 - 1/\alpha_i$ finden. Das ist anschaulich plausibel:

Für $\delta_i \nearrow 1$ sind jetzige und zukünftige Spiele nahezu gleichgewichtet. Der Spieler ist geduldig, daher lohnt sich die langfristige Kooperation.

Für $\delta_i \searrow 0$ sind zukünftige Spiele nahezu wertlos. Der Spieler ist ungeduldig, daher lohnt sich die kurzfristige Gewinnmitnahme.

Was passiert, wenn ein Spieler geduldig ist aber der andere ungeduldig? Die Rechnung gibt Auskunft: Das Gleichgewicht kommt nicht zustande.

Iteriertes Gefangenendilemma und Grim Trigger

Aufgabe: Formalisieren Sie das Modell eines wiederholten Spiels mit einer (konstanten) Abbruchwkt $\varepsilon > 0$ nach jeder Runde. Erklären Sie die Formel $u(x) = (1-\delta) \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n g(x_n)$ für die erwartete Auszahlung.

Skizze: Spielbäume explizit auszuschreiben ist länglich aber lehrreich. Versuchen Sie es! Die Wkt, in die n–te Runde zu gelangen, ist $(1-\delta)\delta^n$. Die erwartete Auszahlung ist daher genau die obige Diskontierung.

Eine ausführliche Diskussion wiederholter Spiele finden Sie in M.J. Osborne, A. Rubinstein: *A Course in Game Theory*, Kapitel 8 „Repeated Games“. Dort werden neben der diskontierten Auszahlung weitere Bewertungen der Spielverläufe $x, y \in \partial X = \mathcal{A}^\infty$ diskutiert, etwa

$$\text{Summen:} \quad x \succ y \quad \Longleftrightarrow \quad \liminf \sum_{n=0}^{N-1} [g(x_n) - g(y_n)] > 0,$$

$$\text{Mittelwerte:} \quad x \succ y \quad \Longleftrightarrow \quad \liminf \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [g(x_n) - g(y_n)] > 0.$$

Diese Kriterien sind ebenso natürlich, manchmal sogar einfacher. Die Verwendung von $\liminf$ bzw. $\limsup$ statt des Grenzwertes $\lim$ ist nötig, da der erhoffte Grenzwert $\lim$ im Allgemeinen nicht existiert.

Neue Spiele aus alten: Hintereinanderausführung

F113

Definition F1B (Verkettung von Spielen und Strategien)

(0) Sei $\Gamma = (X, \Omega, \mathbf{P}, p, I, A, q, f, u)$ ein extensives Spiel. Für jeden Spieler $i \in I$ definieren wir die **Norm** $|\Gamma|^i := \sup_{x \in \partial X} |u^i(x)| \in [0, \infty]$. Zu $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir die **Skalierung** $\alpha\Gamma := (X, \Omega, \mathbf{P}, p, I, A, q, f, \alpha u)$ ebenso **affine Transformation** $\alpha\Gamma + \beta$, auch spielerweise mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^I$.

(1) Zu extensiven Spielen $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ sei $\Gamma = \prod_{n=1}^N \Gamma_n = \Gamma_1 * \dots * \Gamma_N$ ihre Hintereinanderausführung mit Auszahlung $u = u_1 + \dots + u_N$.

(2) Zu jeder Folge $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ extensiver Spiele mit $\sum_{n=0}^\infty |\Gamma_n|^i < \infty$ für jeden Spieler $i \in I$ definieren wir ebenso ihre Hintereinanderausführung

$$\Gamma = \prod_{n=0}^\infty \Gamma_n = \Gamma_0 * \Gamma_1 * \Gamma_2 * \dots .$$

Diskontiert erhalten wir $\Gamma_\delta = (1 - \delta) \prod_{n=0}^\infty \delta^n \Gamma_n$ falls $\sum_{n=0}^\infty \delta_i^n |\Gamma_n|^i < \infty$.

(3) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei S_n die Strategiemenge zu Γ_n, ebenso S zu Γ. Die Verkettung $\prod_{n=0}^\infty S_n \to S : (s_0, s_1, s_2, \dots) \mapsto s_0 * s_1 * s_2 * \dots$ von Strategien betrachtet jeweils ohne Erinnerung nur das aktuelle Spiel.

Neue Spiele aus alten: Hintereinanderausführung

F114 Erläuterung

Aufgabe: Schreiben Sie alle Daten von Γ und S möglichst explizit aus.

Skizze: Wir setzen alle Spiele über derselben Spielermenge I voraus. Es genügt, gleich Folgen $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ extensiver Spiele zu diskutieren. Jedes Spiel Γ_n starte mit dem leeren Wort $\emptyset$ als Wurzel. Dann gilt:

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{n=0}^\infty \Big[\prod_{m<n} \partial X_{m,<\infty} \Big] * X_n \\ &= X_0 \;\cup\; \partial X_{0,<\infty} * X_1 \;\cup\; \partial X_{0,<\infty} * \partial X_{1,<\infty} * X_2 \;\cup\; \dots \end{aligned}$$

Hierbei besteht $\partial X_{m,<\infty}$ aus den endlichen maximalen Trajektorien. An unendliche Trajektorien können / wollen wir nichts weiter anfügen. Anders gesagt, an jedes Blatt von X_0 heften wir eine Kopie von X_1. An jedes Blatt dieses neuen Baumes heften wir eine Kopie von X_2 usw. Es ist dann klar, wie wir die Daten der einzelnen Spiele Γ_n lokal auf diesen neuen Baum X übertragen. Dies definiert das Spiel Γ.

Spielbäume explizit auszuschreiben ist länglich aber lehrreich. Versuchen Sie es! Hier hilft die Vorbereitung des vorigen Kapitels.

Neue Spiele aus alten: Hintereinanderausführung

F115

Satz F1C (Gleichgewichte bei Hintereinanderausführung)

(1) Für extensive Spiele $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N$ ohne unendliche Trajektorien gilt

$$\mathrm{SPE}(\Gamma_1 * \Gamma_2 * \dots * \Gamma_N) \supseteq \mathrm{SPE}(\Gamma_1) * \mathrm{SPE}(\Gamma_2) * \dots * \mathrm{SPE}(\Gamma_N).$$

(a) Haben $\Gamma_2, \dots, \Gamma_N$ jeweils nur ein teilspielperfektes Gleichgewicht, so gilt Gleichheit. (b) Andernfalls kann die Inklusion „$\supseteq$“ strikt sein.

(2) Für extensive Spiele $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots$ ohne unendliche Trajektorien gilt

$$\mathrm{SPE}(\Gamma_0 * \Gamma_1 * \dots) \supseteq \mathrm{SPE}(\Gamma_0) * \mathrm{SPE}(\Gamma_1) * \dots .$$

(a) Selbst wenn jedes Spiel Γ_n nur ein einziges teilspielperfektes Gleichgewicht hat, so kann dennoch die Inklusion „$\supseteq$“ strikt sein.

⚠ Dieser Satz ist nur ein erster Schritt und noch nicht ausschöpfend. Die Menge $\mathrm{SPE}(\Gamma)$ aller teilspielperfekten Gleichgewichte ist oft riesig!

Aufgabe: Beweisen Sie diesen Satz (1) durch Rückwärtsinduktion E2D und entsprechend (2) mit dem Prinzip F1D der einmaligen Abweichung.

Neue Spiele aus alten: Hintereinanderausführung

F116 Erläuterung

Skizze: (1) Wir müssen klären, warum zu je zwei Gleichgewichten $s_1 \in \mathrm{SPE}(\Gamma_1)$ und $s_2 \in \mathrm{SPE}(\Gamma_2)$ stets $s_1 * s_2 \in \mathrm{SPE}(\Gamma_1 * \Gamma_2)$ gilt.

Auf jeder Kopie $x * \Gamma_2$ von Γ_2 nutzen wir denselben Strategievektor s_2. Jeder Randpunkt $x \in \partial X_1$ ist ein Blatt, die Auszahlung ist $u_1(x) + u_2(s_2)$. Auf ganz Γ_1 erhalten wir die additive Konstante $u_2(s_2)$. Somit führt der Strategievektor s_1 auf Γ_1 zu einem Gleichgewicht des Spiels Γ.

(1a) Sei $s \in \mathrm{SPE}(\Gamma_1 * \Gamma_2)$. Auf jeder Kopie $x * \Gamma_2$ von Γ_2 ist s ein Gleichgewicht, dank der Eindeutigkeit $\mathrm{SPE}(\Gamma_2) = \{s_2\}$ ist dies s_2. Jeder Randpunkt $x \in \partial X_1$ ist ein Blatt, die Auszahlung ist $u_1(x) + u_2(s_2)$. Somit ist s auf Γ_1 ein Gleichgewicht des Spiels $\Gamma_1 + \mathrm{const} \cong \Gamma_1$. Demnach gilt $s = s_1 * s_2$ für ein $s_1 \in \mathrm{SPE}(\Gamma_1)$. Damit erhalten wir $\mathrm{SPE}(\Gamma_1 * \Gamma_2) = \{\, s_1 * s_2 \mid s_1 \in \mathrm{SPE}(\Gamma_1) \,\} = \mathrm{SPE}(\Gamma_1) * \mathrm{SPE}(\Gamma_2)$.

(1b) Gegenbeispiele hierzu finden Sie in den Übungen.

(2) Der allgemeine Fall folgt demselben Argument wie (1), diesmal allerdings mit dem Prinzip F1D der einmaligen Abweichung.

(2a) Das Gefangenendilemma ist ein frappierendes Gegenbeispiel. Weitere Gegenbeispiele hierzu finden Sie in den Übungen.

Das Prinzip der einmaligen Abweichung

🙂 Das folgende Kriterium heißt *Prinzip der einmaligen Abweichung*, engl. *one-time-deviation principle*. Es erlaubt einen einfachen Test, ob mit $s = (s^i)_{i \in I} \in S$ ein teilspielperfektes Gleichgewicht vorliegt.

Satz F1D (Prinzip der einmaligen Abweichung)

Sei $\Gamma = (X, \Omega, \mathbf{P}, p, I, A, f, u)$ ein dynamisches Spiel in extensiver Form (mit vollständiger Information, um unsaturierte Teilspiele zu vermeiden).

Das Spiel habe (a) keine unendlichen Trajektorien, also $X_\infty = \emptyset$, oder allgemeiner: (b) Jede Auszahlung $u^i : \partial X \to \mathbb{R}$ sei stetig.

Die Strategiemenge sei $S = \prod_{i \in I} S^i$ mit Auszahlung $u : X \times S \to \mathbb{R}^I$. Sei $s = (s^i)_{i \in I} \in S$ ein Strategievektor. Dann sind äquivalent:

1. *Der Strategievektor s ist ein teilspielperfektes Gleichgewicht.*
2. *Es gilt $u_x^i(\tilde{s}^i; s^{-i}) \le u_x^i(s^i; s^{-i})$ für jeden Zustand $x \in X^\circ$ und jeden Spieler $i \in I$ und jede Alternative $\tilde{s}^i \in S^i$.*
3. *Es gilt $u_x^i(\hat{s}^i; s^{-i}) \le u_x^i(s^i; s^{-i})$ für jeden Zustand $x \in X^\circ$ und jeden Spieler $i \in I$ und jede Alternative $\hat{s}^i \in S^i$, die nur in x abweicht.*

Das Prinzip der einmaligen Abweichung

Stetigkeit von $u^i : \partial X \to \mathbb{R}$ bedeutet $\varepsilon_n \to 0$ für $n \to \infty$, wobei

$$\varepsilon_n := \sup\{\, |u^i(x) - u^i(y)| \mid x, y \in X_\infty,\ x|_n = y|_n \,\}.$$

Typisches Beispiel ist eine diskontierte Summe oder allgemein eine Reihe $u^i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^i g^i(x_n)$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n^i| < \infty$ und $\sup|g| < \infty$.

Beweis: Die Äquivalenz „(1) ⇔ (2)“ wiederholt die Definition E3C; dies dient hier zur Erinnerung und betont die Vereinfachung (3).
Die Implikation „(2) ⇒ (3)“ ist trivial, als rein formale Spezialisierung.
Wir zeigen umgekehrt „¬ (2) ⇒ ¬ (3)“, zunächst im endlichen Fall (a).

Angenommen, es gibt $\tilde{s}^i \in S^i$ und $x \in X^\circ$ mit $u_x^i(\tilde{s}^i; s^{-i}) > u_x^i(s^i; s^{-i})$.
Gibt es einen Folgezustand $y = f(x, \omega_x, \tilde{s}_x)$ mit $u_y^i(\tilde{s}^i; s^{-i}) > u_y^i(s^i; s^{-i})$, so ersetzen wir x durch y. Dank (a) ist dies nur endlich oft möglich.
Wir finden schließlich einen Zustand $x \in X^\circ$ mit $u_x^i(\tilde{s}^i; s^{-i}) > u_x^i(s^i; s^{-i})$, aber für alle Folgezustände $y = f(x, \omega_x, \tilde{s}_x)$ gilt $u_y^i(\tilde{s}^i; s^{-i}) \le u_y^i(s^i; s^{-i})$.
Wir setzen $\hat{s}_x^i = \tilde{s}_x^i$ und $\hat{s}_y^i = s_y^i$ für alle $y \in X^\circ \smallsetminus \{x\}$.
Dann gilt $u_x^i(\hat{s}^i; s^{-i}) \ge u_x^i(\tilde{s}^i; s^{-i}) > u_x^i(s^i; s^{-i})$.

Das Prinzip der einmaligen Abweichung

Nun der unendliche Fall (b): Angenommen, es gibt eine alternative Strategie $\bar{s}^i \in S^i$ und $x \in X^\circ$ mit $u_x^i(\bar{s}^i; s^{-i}) \ge u_x^i(s^i; s^{-i}) + 2\varepsilon$ und $\varepsilon > 0$.
Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $\tilde{s}^i$ durch $\tilde{s}^i = \bar{s}^i$ auf $X_{\le n}^\circ$ und $\tilde{s}^i = s^i$ auf $X_{>n}^\circ$.
Dank der vorausgesetzten Stetigkeit von u^i existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $|u_x^i(\tilde{s}^i; s^{-i}) - u_x^i(\bar{s}^i; s^{-i})| \le \varepsilon$ gilt. Das bedeutet

$$u_x^i(\tilde{s}^i; s^{-i}) \ge u_x^i(s^i; s^{-i}) + \varepsilon > u_x^i(s^i; s^{-i}).$$

Nun gehen wir genauso wie im Fall (a) vor:

Wir haben $\tilde{s}^i \in S^i$ und $x \in X^\circ$ mit $u_x^i(\tilde{s}^i; s^{-i}) > u_x^i(s^i; s^{-i})$.
Gibt es einen Folgezustand $y = f(x, \omega_x, \tilde{s}_x)$ mit $u_y^i(\tilde{s}^i; s^{-i}) > u_y^i(s^i; s^{-i})$, so ersetzen wir x durch y. Dies ist nur endlich oft möglich, denn dank obiger Konstruktion gilt $\tilde{s}^i = s^i$ auf $X_{>n}$.
Wir finden schließlich einen Zustand $x \in X^\circ$ mit $u_x^i(\tilde{s}^i; s^{-i}) > u_x^i(s^i; s^{-i})$, aber für alle Folgezustände $y = f(x, \omega_x, \tilde{s}_x)$ gilt $u_y^i(\tilde{s}^i; s^{-i}) \le u_y^i(s^i; s^{-i})$.
Wir setzen $\hat{s}_x^i = \tilde{s}_x^i$ und $\hat{s}_y^i = s_y^i$ für alle $y \in X^\circ \smallsetminus \{x\}$.
Dann gilt $u_x^i(\hat{s}^i; s^{-i}) \ge u_x^i(\tilde{s}^i; s^{-i}) > u_x^i(s^i; s^{-i})$.

Das Prinzip der einmaligen Abweichung

🙂 Das Prinzip F1D dient zur **Prüfung**, ob ein vorgelegter Strategievektor $s = (s^i)_{i \in I} \in S$ ein Gleichgewicht ist oder nicht.
Wenn irgendein Spieler $i \in I$ seine Strategie s^i verbessern kann, dann kann er dies bereits durch Änderung einer einzigen Aktion s_x^i.

Sprichwörtlich: Selbst die längste Reise beginnt mit dem ersten Schritt!
Dieses einfache Kriterium strukturiert die Untersuchung von Strategien: Es beschert uns den simplen Algorithmus, systematisch jede einzelne Abweichung durchzugehen und auf Verbesserung zu prüfen.

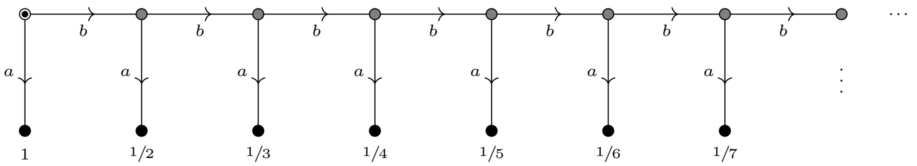
🙂 Das Prinzip F1D ähnelt formal der Rückwärtsinduktion E2D.
Diese dient zur **Konstruktion** aller Gleichgewichte; das ist stärker!
Im endlichen Falle sind die beiden Sätze E2D und F1D äquivalent: Dann haben wir einen Anfang, nämliche die terminalen Zustände.

Hier haben wir nichts dergleichen und müssen uns anders behelfen.
Dank Stetigkeit von u^i ist $X_{>n}$ für großes n aber so gut wie terminal, zumindest bis auf ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$, und genau so fädeln wir den Beweis ein: Es ist eine Art Rückwärtsinduktion, geeignet angepasst.

Gegen/Beispiele zur einmaligen Abweichung

Für endliche Spiele entspricht das Prinzip der einmaligen Abweichung (F1D) der Rückwärtsinduktion aus dem Satz von Zermelo (E2D).
Für unendliche Spiele ist die Stetigkeit der Auszahlung wesentlich!

Aufgabe: Zur Illustration betrachten wir Spiele mit nur einem Spieler.
Wir wählen einen besonders einfachen unendlichen Spielbaum:



(0) Formalisieren Sie das Spiel Γ_λ mit $u(b^\infty) = \lambda$ in extensiver Form.

(1) Finden Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte $s \in \mathrm{SPE}(\Gamma_\lambda)$.

(2) Finden Sie alle s, die maximal sind bezüglich einmaliger Abweichung.

(3) Für welche Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt das Prinzip der einmaligen Abweichung?

(4) Was gilt bei Aufspaltung in Klone mit identischer Nutzenfunktion?
(Abfolge von *future selves*, analog zu Schellings Egonomics C425)

Gegen/Beispiele zur einmaligen Abweichung

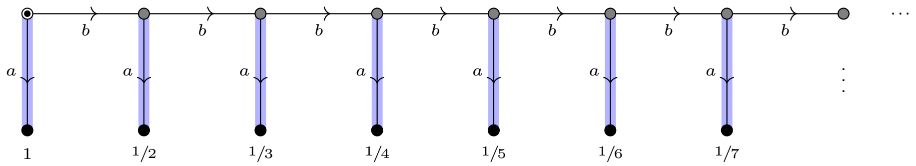
Lösung: (0) Gemäß der Skizze haben wir den Spielbaum

$$X = \{\, b^n, b^n a \mid n \in \mathbb{N} \,\} \cup \{\, b^\infty = bbbbb\ldots \,\}.$$

Aktive Zustände / innere Knoten sind demnach $X^\circ = \{\, b^n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$,
als terminale Zustände / Blätter bleiben $\partial X = \{\, b^n a \mid n \in \mathbb{N} \,\} \cup \{b^\infty\}$.
Auszahlungen sind gegeben durch $u(b^n a) = 1/(n+1)$ und $u(b^\infty) = \lambda$.

(1) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ unterscheiden wir die beiden Fälle $\lambda \le 0$ und $\lambda > 0$:

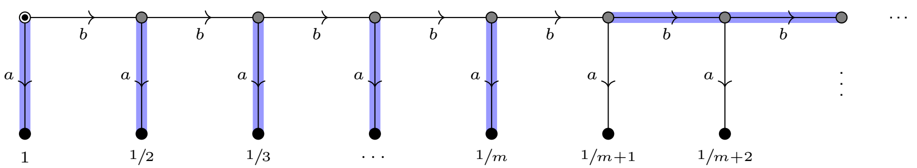
(1a) Für $\lambda \le 0$ finden wir genau ein teilspielperfektes Gleichgewicht s_∞, nämlich $s_\infty(b^n) = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Graphisch stellen wir dies so dar:



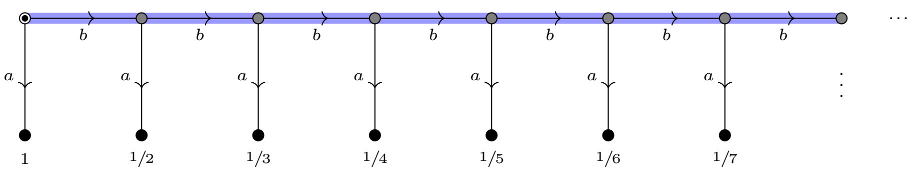
🙂 Diese Strategie s_∞ ist teilspielperfekt, also $s_\infty \in \mathrm{SPE}(\Gamma_\lambda)$, und zudem die einzige teilspielperfekte, also $\mathrm{SPE}(\Gamma_\lambda) = \{s_\infty\}$.

Gegen/Beispiele zur einmaligen Abweichung

(1b) Für $\frac{1}{m+1} < \lambda < \frac{1}{m}$ mit $m \in \mathbb{N}$ finden wir das teilspielperfekte Gleichgewicht s_m mit $s_m(b^n) = a$ für $n < m$ und $s_m(b^n) = b$ für $n \ge m$.



Speziell für $\lambda > 1$ haben wir $m = 0$ und $s_0(b^n) = b$ für alle $n \in \mathbb{N}$:



🙂 Damit ist die Lösungsmenge $\mathrm{SPE}(\Gamma_\lambda) = \{s_m\}$ ausgeschöpft.
Im Sonderfall $\lambda = \frac{1}{m+1}$ mit $m \in \mathbb{N}$ gibt es genau zwei Gleichgewichte, denn $s(b^m) \in \{a, b\}$ ist beliebig. Das bedeutet $\mathrm{SPE}(\Gamma_\lambda) = \{s_m, s_{m+1}\}$.
🙂 Dasselbe gilt statt ${}^1/_{n+1} \searrow 0$ für jede strikt fallende Folge $\lambda_n \searrow \lambda_\infty$.

Gegen/Beispiele zur einmaligen Abweichung

(2) Jedes $s \in \mathrm{SPE}(\Gamma_\lambda)$ ist maximal bezüglich beliebigen Abweichungen. Unabhängig vom Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Strategie s_∞ immer maximal bezüglich einmaliger Abweichung, sogar bzgl. endlicher Abweichung. Für $\lambda \le 0$ ist die Strategie s_∞ teilspielperfekt, für $\lambda > 0$ hingegen nicht!

(3) Wir kennen für das Spiel Γ_λ alle Gleichgewichte: Das Prinzip der einmaligen Abweichung gilt hier nur für $\lambda \le 0$. Es gilt nicht für $\lambda > 0$. Nochmal zur Betonung: Teilspielperfekt sind nur s_m und evtl. s_{m+1}, den Test der einmaligen Abweichung passiert zudem auch s_∞.

(4) Statt einem einzigen Spieler können wir uns ebenso unendlich viele Klone vorstellen, je einen Klon für jeden inneren Knoten b^n, $n \in \mathbb{N}$: Klon n trifft nur seine eigene lokale Entscheidung $s(b^n) \in \{a, b\}$.
Alle Klone haben dieselbe Nutzenfunktion u wie zuvor definiert.

Teilspielperfekt bedeutet nun maximal bezüglich einmaliger Abweichung: Da jeder Klon nur einmal zieht, optimiert er nur diesen einen Zug.

Für $\lambda \le 0$ ist das Klon-Modell (4) äquivalent zum Ein-Spieler-Modell (0).
Für $\lambda > 0$ hingegen gibt es in (4) ein zusätzliches Gleichgewicht!

Eine Hand wäscht die andere.

Wir iterieren unendlich oft das folgende Spiel $g:\{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$:

A \ B	0	1
0	0, 0	α, β
1	β, α	1, 1

mit Konstanten $\alpha > 1 > \delta > 0 > \beta$ und der diskontierten Auszahlung

$$u : \{00, 01, 10, 11\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^2,$$

$$u(x) = (1-\delta)\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n g(x_n)$$

Aufgabe: Es gelte $\alpha + \beta > 2$, zum Beispiel $\alpha = 5$ und $\beta = -1$.
Die Strategie, niemals zu kooperieren, erreicht die Auszahlung $(0, 0)$.
Die raffiniertere Grim-Trigger-Strategie erreicht die Auszahlung $(1, 1)$.
Gibt es Gleichgewichte $(s^1, s^2) \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$ mit höherer Auszahlung?

Sie spüren hier ganz konkret die beiden Schwierigkeiten: Wie er/finden wir aussichtsreiche Kandidaten? Wie prüfen wir danach, ob ein Kandidat ein Gleichgewicht ist? Im endlichen Fall hilft Rückwärtsinduktion (E2D), hier jedoch nicht! Das macht die Konstruktion knifflig… und spannend. Die Prüfung gelingt mit dem Prinzip F1D der einmaligen Abweichung.

Eine Hand wäscht die andere.

Auch diese spieltheoretische Situation gibt es als Gleichnis bzw. als Märchen in vielen Variationen. Hier ist meine Fassung, universell / interreligiös zumindest für monotheistische Religionen:

Ein Suchender wünschte sich, Himmel und Hölle kennen zu lernen. Gott gewährte ihm diesen Wunsch und zeigte ihm zunächst die Hölle.

Die Menschen saßen an einem langen Tisch, vor sich dampfende Suppenschüsseln, doch jeder hatte einen meterlangen Löffel an sein Handgelenk gekettet, so dass es ihm unmöglich war, sich den Löffel zum Munde zu führen. So verschütteten sie die Suppe, stießen die Schüsseln um, es herrschte entsetzliches Chaos, und sie mussten hungern.

Anschließend zeigte Gott dem Suchenden den Himmel.

Auch dort saßen die Menschen an einem langen Tisch, ebenso mit dampfenden Suppenschüsseln und den gleichen meterlangen Löffeln. Doch statt das Unmögliche zu versuchen, speisten sie sich gegenseitig. So wurden sie alle satt, und es herrschte Harmonie und Frieden.

Das also war der Unterschied zwischen Himmel und Hölle.

Eine Hand wäscht die andere.

Stellen wir uns vor, beide Spieler verabreden ein Strategiepaar. Damit diese Verabredung stabil ist, sollte sie ein Gleichgewicht sein! Wie können die Spieler die ersehnte himmlische Harmonie erreichen?

L'enfer, c'est les autres.
[Die Hölle, das sind die anderen.]
Jean-Paul Sartre (1905-1980), *Huis Clos*

Nach kurzem Nachdenken ist anschaulich klar, was sie tun *können*: Die Spieler *können* sich abwechseln, um im Mittel davon zu profitieren.

Mit dieser Idee beginnt die interessante mathematische Ausarbeitung: Wir benötigen zuerst eine explizite Beschreibung des Strategiepaars. Es genügt nicht, grob zu verabreden „Die Spieler wechseln sich ab“; eine Strategie muss erklären, wie in jedem Zustand zu handeln ist! Auch die Sanktionen bei Abweichungen müssen festgelegt werden. Die Verabredung muss also vollständig, präzise, narrensicher sein.

Anschließend können wir prüfen, ob eine Gleichgewicht vorliegt. Das bedeutet wie immer, kein Spieler hat einen Vorteil davon, von seiner Strategie abzuweichen, egal in welchem Zustand.

Eine Hand wäscht die andere.

Aufgabe: Untersuchen Sie folgende Strategiepaare $s^1, s^2 : X^\circ \to \{0,1\}$. Für welche Parameter $\alpha > 1 > \delta > 0 > \beta$ sind dies Gleichgewichte?

(1) $\left\{\begin{array}{r} \emptyset \mapsto 01 \\ v*00 \mapsto 00 \\ v*01 \mapsto 10 \\ v*10 \mapsto 01 \\ v*11 \mapsto 11 \end{array}\right\}$ (3) $\left\{\begin{array}{r} \emptyset \mapsto 01 \\ 01 \mapsto 10 \\ v*01\,10 \mapsto 01 \\ v*10\,01 \mapsto 10 \\ \text{sonstige} \mapsto 00 \end{array}\right\}$ (4) $\left\{\begin{array}{r} (01\,10)^n \mapsto 01 \\ (01\,10)^n 01 \mapsto 10 \\ \text{sonstige} \mapsto 00 \end{array}\right\}$

(2) $\left\{\begin{array}{r} \emptyset \mapsto 01 \\ v*00 \mapsto 00 \\ v*01 \mapsto 10 \\ v*10 \mapsto 01 \\ v*11 \mapsto 00 \end{array}\right\}$ (3') $\left\{\begin{array}{r} \emptyset \mapsto 10 \\ 10 \mapsto 01 \\ v*10\,01 \mapsto 10 \\ v*01\,10 \mapsto 01 \\ \text{sonstige} \mapsto 00 \end{array}\right\}$ (4') $\left\{\begin{array}{r} (10\,01)^n \mapsto 10 \\ (10\,01)^n 10 \mapsto 01 \\ \text{sonstige} \mapsto 00 \end{array}\right\}$

Die Strategiepaare 3,3',4,4' nennen wir *Eine Hand wäscht die andere* oder *Kratzt du meinen Rücken, kratz' ich deinen*, jeweils mit minimaler Kontrolle (der letzten zwei Züge) und maximaler Kontrolle (alle Züge). Die Symmetrie zwischen den Spielern muss hierzu gebrochen werden. Abhilfe schafft ein anfänglicher Münzwurf, also eine korrelierte Strategie!

Eine Hand wäscht die andere.

Lösung: Wir nutzen hier das Prinzip F1D der einmaligen Abweichung!
Alle Voraussetzungen sind erfüllt, insbesondere die Stetigkeit von u^i.

(1) Diese Strategie heißt traditionell *Tit for tat*, also *Wie du mir so ich dir*.
Nur für den Start wird die Symmetrie gebrochen, etwa durch Münzwurf.

(1a) Verlauf ohne/mit Abweichung und zugehörige Auszahlung:

$$\begin{aligned}
01\,10\,01\,10\,01\,10\,01\,10\ldots &\mapsto (1-\delta)\sum_{k=0}^{\infty}\delta^{2k}(\alpha+\delta\beta,\beta+\delta\alpha)\\
&= \tfrac{1}{1+\delta}(\alpha+\delta\beta,\beta+\delta\alpha)\\
\underline{1}1\,11\,11\,11\,11\,11\,11\,11\ldots &\mapsto (1-\delta)\sum_{n=0}^{\infty}\delta^{n}(1,1) = (1,1)\\
0\underline{0}\,00\,00\,00\,00\,00\,00\,00\ldots &\mapsto (1-\delta)\sum_{n=0}^{\infty}\delta^{n}(0,0) = (0,0)
\end{aligned}$$

Hieraus folgen die Bedingungen $\alpha+\delta\beta\ge 1+\delta$ und $\beta+\delta\alpha\ge 0$.

(1b) Verlauf ohne/mit Abweichung in jedem Teilspiel ab $x=v*00$:

$$\begin{aligned}
\ldots 00\,|\,00\,00\,00\,00\,00\,00\,00\,00\ldots &\mapsto (0,0)\\
\ldots 00\,|\,\underline{1}0\,01\,10\,01\,10\,01\,10\,01\ldots &\mapsto \tfrac{\delta^n}{1+\delta}(\beta+\delta\alpha,\alpha+\delta\beta)\\
\ldots 00\,|\,0\underline{1}\,10\,01\,10\,01\,10\,01\,10\ldots &\mapsto \tfrac{\delta^n}{1+\delta}(\alpha+\delta\beta,\beta+\delta\alpha)
\end{aligned}$$

Hieraus folgt zweimal die Bedingung $0\ge\beta+\delta\alpha$, mit (1a) Gleichheit.

Eine Hand wäscht die andere.

(1c) Verlauf ohne/mit Abweichung in jedem Teilspiel ab $x=v*11$:

$$\begin{aligned}
\ldots 11\,|\,11\,11\,11\,11\,11\,11\,11\,11\ldots &\mapsto \delta^n(1,1)\\
\ldots 11\,|\,\underline{0}1\,10\,01\,10\,01\,10\,01\,10\ldots &\mapsto \tfrac{\delta^n}{1+\delta}(\alpha+\delta\beta,\beta+\delta\alpha)\\
\ldots 11\,|\,\underline{1}0\,01\,10\,01\,10\,01\,10\,01\ldots &\mapsto \tfrac{\delta^n}{1+\delta}(\beta+\delta\alpha,\alpha+\delta\beta)
\end{aligned}$$

Hieraus folgt zweimal die Bedingung $1+\delta\ge\alpha+\delta\beta$, mit (1a) Gleichheit.

(1d) Verlauf ohne/mit Abweichung in jedem Teilspiel ab $x=v*01$:

$$\begin{aligned}
\ldots 01\,|\,10\,01\,10\,01\,10\,01\,10\,01\ldots &\mapsto \tfrac{\delta^n}{1+\delta}(\beta+\delta\alpha,\alpha+\delta\beta)\\
\ldots 01\,|\,\underline{0}0\,00\,00\,00\,00\,00\,00\,00\ldots &\mapsto (0,0)\\
\ldots 01\,|\,1\underline{1}\,11\,11\,11\,11\,11\,11\,11\ldots &\mapsto \delta^n(1,1)
\end{aligned}$$

Hieraus folgen die Bedingungen $\beta+\delta\alpha\ge 0$ und $\alpha+\delta\beta\ge 1+\delta$, wie (1a).

(1e) Für jedes Teilspiel ab $x=v*10$ finden wir dasselbe, siehe (1a).

Aus $\beta+\delta\alpha=0$ und $\alpha+\delta\beta=1+\delta$ folgt $\delta=-\beta/\alpha$ und $\alpha+\beta=1$.
Dies ist auch hinreichend: Wir kehren alles um und nutzen Satz F1D.

☹ Diese Bedingung ist leider eine extrem starke Einschränkung.

Eine Hand wäscht die andere.

(2) Wir modifizieren die Strategie (1) von $11\mapsto 11$ zu $11\mapsto 00$.

(2a) Verlauf ohne/mit Abweichung und zugehörige Auszahlung:

$$\begin{aligned}
01\,10\,01\,10\,01\,10\,01\,10\ldots &\mapsto (1-\delta)\sum_{k=0}^{\infty}\delta^{2k}(\alpha+\delta\beta,\beta+\delta\alpha)\\
&= \tfrac{1}{1+\delta}(\alpha+\delta\beta,\beta+\delta\alpha)\\
\underline{1}1\,00\,00\,00\,00\,00\,00\,00\ldots &\mapsto (1-\delta)(1,1)\\
0\underline{0}\,00\,00\,00\,00\,00\,00\,00\ldots &\mapsto (1-\delta)(0,0)
\end{aligned}$$

Hieraus folgen die Bedingungen $\alpha+\delta\beta\ge 1-\delta^2$ und $\beta+\delta\alpha\ge 0$.

(2b) Verlauf ohne/mit Abweichung in jedem Teilspiel ab $x=v*aa$:

$$\begin{aligned}
\ldots aa\,|\,00\,00\,00\,00\,00\,00\,00\,00\ldots &\mapsto (0,0)\\
\ldots aa\,|\,\underline{1}0\,01\,10\,01\,10\,01\,10\,01\ldots &\mapsto \tfrac{\delta^n}{1+\delta}(\beta+\delta\alpha,\alpha+\delta\beta)\\
\ldots aa\,|\,0\underline{1}\,10\,01\,10\,01\,10\,01\,10\ldots &\mapsto \tfrac{\delta^n}{1+\delta}(\alpha+\delta\beta,\beta+\delta\alpha)
\end{aligned}$$

Hieraus folgt zweimal die Bedingung $0\ge\beta+\delta\alpha$, somit Gleichheit.

☺ Zusammenfassung gemeinsamer Verläufe ist bequem und effizient.

Eine Hand wäscht die andere.

(2c) Verlauf ohne/mit Abweichung in jedem Teilspiel ab $x=v*01$:

$$\begin{aligned}
\ldots 01\,|\,10\,01\,10\,01\,10\,01\,10\,01\ldots &\mapsto \tfrac{\delta^n}{1+\delta}(\beta+\delta\alpha,\alpha+\delta\beta)\\
\ldots 01\,|\,\underline{0}0\,00\,00\,00\,00\,00\,00\,00\ldots &\mapsto (1-\delta)\delta^n(0,0)\\
\ldots 01\,|\,1\underline{1}\,00\,00\,00\,00\,00\,00\,00\ldots &\mapsto (1-\delta)\delta^n(1,1)
\end{aligned}$$

Hieraus folgen die Bedingungen $\beta+\delta\alpha\ge 0$ und $\alpha+\delta\beta\ge 1-\delta^2$.

(2d) Für jedes Teilspiel ab $x=v*10$ finden wir dasselbe, siehe (2a).

☺ Zusammenfassung gemeinsamer Verläufe ist bequem und effizient.

Wir setzen $\alpha>1>\delta>0>\beta$ voraus, wie in der Aufgabe angegeben.
Ist das Strategiepaar s teilspielperfekt, dann sind die Bedingungen
$\beta+\delta\alpha=0$ und $\alpha+\delta\beta\ge 1-\delta^2$ notwendig, wie oben ausgerechnet.
Demnach muss $\delta=-\beta/\alpha$ und $\alpha+\beta>0$ gelten. Diese Bedingungen
sind auch hinreichend: Wir kehren alles um und nutzen Satz F1D.

☺ Die Parameter $\alpha>1$ und $\beta<0$ mit $\alpha+\beta>0$ sind frei wählbar.

☹ Der Diskontfaktor $\delta=-\beta/\alpha$ muss leider genau justiert werden!

Eine Hand wäscht die andere.

(3) Wir unterscheiden die drei Fälle und zerlegen $X^\circ = Z_1 \sqcup Z_2 \sqcup Z_3$ in $Z_1 = \{\emptyset\} \cup X^\circ * \{01\,10\}$ und $Z_2 = \{01\} \cup X^\circ * \{10\,01\}$ und den Rest Z_3. Verlauf ab $x \in X^\circ$ ohne/mit Abweichung und zugehörige Auszahlung:

$$\begin{array}{lll}
\ldots 01\,10 \,|\, 01\,10\,01\,10\,01\,10 \ldots & \mapsto (1-\delta)\sum_{k=n}^{\infty} \delta^{2k} & (\alpha+\delta\beta, \beta+\delta\alpha) \\
\ldots 01\,10 \,|\, \underline{1}1\,00\,00\,00\,00\,00 \ldots & \mapsto (1-\delta)\delta^{2n} & (1,1) \\
\ldots 01\,10 \,|\, 0\underline{0}\,00\,00\,00\,00\,00 \ldots & \mapsto (1-\delta)\delta^{2n} & (0,0) \\
\ldots 10\,01 \,|\, 10\,01\,10\,01\,10\,01 \ldots & \mapsto (1-\delta)\sum_{k=n}^{\infty} \delta^{2k+1} & (\beta+\delta\alpha, \alpha+\delta\beta) \\
\ldots 10\,01 \,|\, \underline{0}0\,00\,00\,00\,00\,00 \ldots & \mapsto (1-\delta)\delta^{2n+1} & (0,0) \\
\ldots 10\,01 \,|\, 1\underline{1}\,00\,00\,00\,00\,00 \ldots & \mapsto (1-\delta)\delta^{2n+1} & (1,1) \\
\text{sonstige} \,|\, 00\,00\,00\,00\,00\,00 \ldots & \mapsto (1-\delta)\delta^{n} & (0,0) \\
\text{sonstige} \,|\, \underline{1}0\,00\,00\,00\,00\,00 \ldots & \mapsto (1-\delta)\delta^{n} & (\beta,\alpha) \\
\text{sonstige} \,|\, 0\underline{1}\,00\,00\,00\,00\,00 \ldots & \mapsto (1-\delta)\delta^{n} & (\alpha,\beta)
\end{array}$$

🙂 Zusammenfassung gemeinsamer Verläufe ist bequem und effizient. Für Teilspielperfektion können wir nun alle Ungleichungen ablesen.

Eine Hand wäscht die andere.

Wir setzen $\alpha > 1 > \delta > 0 > \beta$ voraus und nutzen das Prinzip F1D: Genau dann ist s teilspielperfekt, wenn $\beta + \delta\alpha \ge 0$ und $\alpha + \delta\beta \ge 1 - \delta^2$. Dies ist äquivalent zu den Bedingungen $\delta \ge -\beta/\alpha$ und $\alpha + \beta > 0$.

🙂 Die Bedingung $\alpha + \beta > 0$ ist anschaulich klar: Die Belohnung durch die mittlere Auszahlung muss für jeden Spieler strikt größer sein als die drohende Strafe $g(0,0) = (0,0)$ durch die Grundstrategie $(0,0) \in A$.

Im Beispiel $(\alpha,\beta) = (5,-1)$ muss demnach nur $1/5 \le \delta < 1$ gelten.

🙂 Auch die Bedingung $\delta \ge -\beta/\alpha$ ist anschaulich klar: Geht ein Spieler mit $-\beta$ in Vorleistung, so erwartet er anschließend Kompensation $\delta\alpha$. Beide Spieler müssen ausreichend geduldig sein, um die Kooperation höher zu bewerten als alle möglichen kurzfristigen Gewinnmitnahmen.

🙂 Die Ungleichungen sind plausibel, das heißt zunächst: notwendig. Dank des Prinzips F1D sind sie tatsächlich auch hinreichend.

Das Strategiepaar (3') ist symmetrisch zu (3), das Ergebnis identisch. Die Symmetrie zwischen den Spielern muss hier gebrochen werden. Abhilfe schafft ein anfänglicher Münzwurf, also eine korrelierte Strategie!

Eine Hand wäscht die andere.

(4) Verlauf ohne/mit Abweichung und zugehörige Auszahlung:

$$\begin{array}{lll}
(01\,10)^n \,|\, 01\,10\,01\,10\,01\,10 \ldots & \mapsto (1-\delta)\sum_{k=n}^{\infty} \delta^{2k} & (\alpha+\delta\beta, \beta+\delta\alpha) \\
(01\,10)^n \,|\, \underline{1}1\,00\,00\,00\,00\,00 \ldots & \mapsto (1-\delta)\delta^{2n} & (1,1) \\
(01\,10)^n \,|\, 0\underline{0}\,00\,00\,00\,00\,00 \ldots & \mapsto (1-\delta)\delta^{2n} & (0,0) \\
(01\,10)^n 01 \,|\, 10\,01\,10\,01\,10\,01 \ldots & \mapsto (1-\delta)\sum_{k=n}^{\infty} \delta^{2k+1} & (\beta+\delta\alpha, \alpha+\delta\beta) \\
(01\,10)^n 01 \,|\, \underline{0}0\,00\,00\,00\,00\,00 \ldots & \mapsto (1-\delta)\delta^{2n+1} & (0,0) \\
(01\,10)^n 01 \,|\, 1\underline{1}\,00\,00\,00\,00\,00 \ldots & \mapsto (1-\delta)\delta^{2n+1} & (1,1) \\
\text{sonstige} \,|\, 00\,00\,00\,00\,00\,00 \ldots & \mapsto (1-\delta)\delta^{n} & (0,0) \\
\text{sonstige} \,|\, \underline{1}0\,00\,00\,00\,00\,00 \ldots & \mapsto (1-\delta)\delta^{n} & (\beta,\alpha) \\
\text{sonstige} \,|\, 0\underline{1}\,00\,00\,00\,00\,00 \ldots & \mapsto (1-\delta)\delta^{n} & (\alpha,\beta)
\end{array}$$

🙂 Wir erhalten dieselben Bedingungen wie im vorigen Beispiel (3). Die strengere Kontrolle bringt hier also keine weiteren Vorteile.

Eine Hand wäscht die andere.

Die Grim-Trigger-Strategie aus Satz F1A ist extrem einfach aufgebaut. Insbesondere benötigt sie nur die Erinnerung an den letzten Spielzug.

Um eine Choreographie der Periode 2 aufzubauen, versuchen es die Strategiepaare (1,2) ebenso mit nur einem Zug Erinnerung, doch damit haben sie zu wenig Kontrolle und erreichen nicht Teilspielperfektion. Nicht alles, was zunächst wie ein Gleichgewicht aussieht, ist auch eines!

Das Strategiepaar (3) ist etwas komplizierter und benötigt zwei Züge Erinnerung. Soviel Kontrolle muss sein. Damit gelingt es dann leicht.

Das Strategiepaar (4) nutzt den gesamten bisherigen Spielverlauf zur Entscheidung. Diese Vorgehensweise bringt hier keine weiteren Vorteile.

Das klingt erst einmal kompliziert, doch die Strategien sind noch einfach, ihre Definition kurz und übersichtlich, und die Beweise sehr leicht.

Das Strategiepaar (4') ist symmetrisch zu (4), das Ergebnis identisch. Die Symmetrie zwischen den Spielern muss hier gebrochen werden. Abhilfe schafft ein anfänglicher Münzwurf, also eine korrelierte Strategie!

Eine Hand wäscht die andere.

Satz F1E (iteriertes Gefangenendilemma)

Wir iterieren das Gefangenendilemma $g:\{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$, *gegeben durch*

A \ B	0	1
0	0 / 0	β_2 / α_1
1	α_2 / β_1	1 / 1

mit Konstanten $\alpha_i > 1 > 0 > \beta_i$, und diskontierten Auszahlungen

$$u \;:\; \{00, 01, 10, 11\}^N \to \mathbb{R}^2,$$

$$u^i(x) = \frac{1-\delta_i}{1-\delta_i^N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta_i^n g^i(x_n).$$

(1) Im endlichen Fall $N < \infty$ *gibt es nur ein einziges Gleichgewicht* $(s^1, s^2) \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$, *und dieses führt zur Auszahlung* $u(s^1, s^2) = (0,0)$.

(2) Für $N = \infty$ *und* $\delta_i \ge 1 - 1/\alpha_i$ *ist zudem die Grim-Trigger-Strategie ein Gleichgewicht* $(s^1, s^2) \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$ *mit Auszahlung* $u(s^1, s^2) = (1,1)$.

(3) Für $N = \infty$ *und* $\delta_i \ge -\beta_i/\alpha_i$ *haben wir zudem das Gleichgewicht „Eine Hand wäscht die andere"* $(s^1, s^2) \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$ *mit Auszahlung*

$$u(s^1, s^2) = \left(\tfrac{\alpha_1+\delta_1\beta_1}{1+\delta_1}, \tfrac{\beta_2+\delta_2\alpha_2}{1+\delta_2}\right) \;\to\; \left(\tfrac{\alpha_1+\beta_1}{2}, \tfrac{\alpha_2+\beta_2}{2}\right).$$

Eine Hand wäscht die andere.

Wir haben uns für dieses grundlegende Beispiel viel Zeit genommen und uns mit den ausführlichen Rechnungen redlich Mühe gegeben. Ich glaube, dass unser Erkenntnisgewinn die Investition belohnt: Wir erhalten explizite Strategien und quantitative Garantien.

Oft wird dies lieblos zusammengefasst zur qualitativen Aussage „Für $\delta \nearrow 1$ existiert ein Strategiepaar $s \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$ mit $u(s) \to g(a)$." Das ist schön knapp und bequem, aber wenig konkret und hilfreich. Hier sind unsere Rechnungen zwar mühsamer aber auch genauer:

- explizite Angabe der betrachteten Strategien $(s_1, s_2) \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$.
- explizite Angabe der jeweils benötigten Geduldsschwelle $\delta_i \ge \underline{\delta}_i$.

Soviel konkrete Mühe ist nicht immer nötig oder wünschenswert, in diesen Fällen genügt dann meist eine rein qualitative Aussage. Doch wenn Sie tatsächlich eine vorgelegte Spielsituation lösen wollen, etwa unter Spielern einen Plan vereinbaren, dann geht es nur konkret. Auch zum Erlernen beim ersten Kontakt scheint es mir unerlässlich.

Eine Hand wäscht die andere.

Auch die Mikrostruktur der hier konstruierten Strategien ist interessant. Es geht oft nicht nur um das *Was* der erreichbaren Auszahlung, sondern auch um das *Wie* der verschiedenen Realisierungen.

Sie spüren feine Unterschiede, sobald Sie selbst als Spieler agieren: Bei Strategien der Form *Eine Hand wäscht die andere* muss einer der beiden Spieler in Vorleistung gehen. Keiner will, einer muss. Doch wer?

Beide Reihenfolgen konvergieren für $\delta_1, \delta_2 \nearrow 1$ gegen den Mittelwert:

$$u(s^1, s^2) = \left(\tfrac{\alpha_1+\delta_1\beta_1}{1+\delta_1}, \tfrac{\beta_2+\delta_2\alpha_2}{1+\delta_2}\right) \;\to\; \left(\tfrac{\alpha_1+\beta_1}{2}, \tfrac{\alpha_2+\beta_2}{2}\right).$$

$$u(s^2, s^1) = \left(\tfrac{\beta_1+\delta_1\alpha_1}{1+\delta_1}, \tfrac{\alpha_2+\delta_2\beta_2}{1+\delta_2}\right) \;\to\; \left(\tfrac{\alpha_1+\beta_1}{2}, \tfrac{\alpha_2+\beta_2}{2}\right).$$

Für vorgegebene Werte $\delta_1, \delta_2 < 1$ sind die Auszahlungen verschieden. Abhilfe schafft ein anfänglicher Münzwurf, also eine korrelierte Strategie!

Solche und weitere Fragen sehen Sie erst, wenn Sie konkret werden. Mathematik ist zugleich abstrakte Theorie und konkrete Anwendung. Sie erklärt und quantifiziert Zusammenhänge: Das ist ihr Nutzen! Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke!

Eine Hand wäscht die andere.

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie.
(Immanuel Kant, 1724–1804)

Jetzt können Sie zu Recht einwenden, dass unser Modell doch nur ein Spielzeug-Beispiel ist. Ja, natürlich, es ist nur ein Beispiel unter vielen, es ist extrem vereinfacht, all unsere Modelle sind beschämend simpel, aber sie illustrieren doch sehr gut viele grundlegende **Phänomene**. Wichtiger noch, selbst einfache Modelle zeigen Ihnen die **Methoden**.

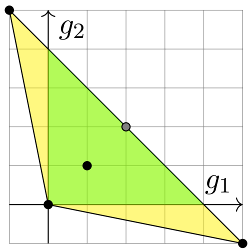
Die Spieltheorie, wie jede gute Theorie, liefert Ihnen nicht nur Beispiele, sondern Methoden. Es ist unwahrscheinlich, dass Sie genau dieses oder jenes *Beispiel* wörtlich anwenden. Das gilt ganz allgemein, selbst für die bestmögliche Auswahl von Beispielen. Wahrscheinlich aber ist, dass Sie diese oder ähnliche bewährte *Methoden* nutzen. Sie sollen daher nicht nur *Beispiele* lernen, sondern zugleich möglichst vielseitige *Methoden*!

Was Sie hier lernen, können Sie überall nutzbringend anwenden. Mit diesen Werkzeugen können Sie auch dicke Bretter bohren.

Nash Folk Theorem: die Grundidee

Wir iterieren unendlich oft das folgende Spiel $g:\{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$:

A \ B	0	1
0	0, 0	5, -1
1	-1, 5	1, 1



Welche Auszahlungen $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ sind teilspielperfekt realisierbar?

Das Nash–Gleichgewicht $z = (0,0)$ ist möglich aber wenig lukrativ.
Es dient als Notlösung, hier als glaubwürdige Drohung bei Abweichung.
Besser ist $g(1,1) = (1,1)$, realisierbar für $\delta \ge 4/5$ mit Grim Trigger (F1A).
Noch besser wäre $(2,2)$. Für $\delta \ge 1/5$ erreichen wir dies wie oben (F1E):

$$\frac{1}{1+\delta}(\alpha + \delta\beta, \beta + \delta\alpha) \;\to\; \frac{1}{2}(\alpha+\beta, \beta+\alpha) \;=\; (2,2)$$

Hierzu nutzen wir die Stragetie *Eine Hand wäscht die andere*.
Geht noch mehr? Welche Auszahlungen sind realisierbar?

Nash Folk Theorem: die Grundidee

Das Strategiepaar $(0,0)$ ist ein Nash–Gleichgewicht. Wiederholung dieser Strategie ist teilspielperfekt (Satz F1C), aber wenig lukrativ.

Das Strategiepaar $(1,1)$ ist für beide Spieler strikt besser als $(0,0)$, aber im Einzelspiel kein Nash–Gleichgewicht. Im iterierten Spiel lässt es sich teilspielperfekt realisieren, etwa durch obige Grim-Trigger-Strategie.

Die oben untersuchte Strategie vom Typ *Eine Hand wäscht die andere* realisiert die für beide Spieler strikt bessere Auszahlung $(2,2)$, für $\delta < 1$ etwas asymmetrisch, doch im Grenzwert für $\delta \nearrow 1$ beliebig genau.

Nach kurzen Nachdenken sehen Sie vermutlich ebenso, dass – und auch wie – die Auszahlung $2/5(5,-1) + 3/5(-1,5)$ realisiert werden kann, zumindest näherungsweise, durch ein teilspielperfektes Gleichgewicht: Es genügt eine periodische Absprache der Form ABABB oder AABBB.

Wenn Ihnen dieser nächste Schritt jetzt klar und einfach einleuchtet, dann hat sich die lange rechenintensive Vorbereitung mehr als gelohnt. Das Folk Theorem ist die natürliche Fortsetzung unserer Rechnungen.

Nash Folk Theorem: die Grundidee

Nashs Folk Theorem gibt Auskunft darüber, welche Auszahlungen teilspielperfekt realisierbar sind. Unser Beispiel legt folgendes nahe: In Frage kommen höchstens alle Konvexkombinationen der reinen Auszahlungen, also die Auszahlungen korrelierter Strategien $a \in [A]$.

Zur Abschreckung benötigen wir eine glaubwürdige Drohung / Strafe. Hierzu nutzen wir ein Nash–Gleichgewicht $z \in \mathrm{NE}(g)$ oder $z \in \mathrm{NE}(\bar{g})$. Realisierbar ist dann tatsächlich jede Konvexkombinationen $g(a) \in \mathbb{R}^I$, die für jeden Spieler $i \in I$ besser ist als das Grundniveau $g^i(z)$.

Unsere Intuition wird sich nachfolgend als richtig erweisen. Wir wollen die anschauliche Aussage nun präzise formulieren und dann beweisen. Die Überraschung liegt schließlich nicht in der naiven Umschreibung, sondern in der mathematischen Ausführung: Explizite Formulierung und sorgfältiges Nachrechnen sind ehrbares mathematisches Handwerk.

Nash Folk Theorem: die Grundidee

Die folgenden Überlegungen bereiten Nashs Folk Theorem vor. Für wiederholte Spiele $\Gamma = \prod_{k=0}^{\infty} g_k$ sind dies grundlegende Hilfsmittel und daher auch von ganz allgemeinem, eigenständigem Interesse.

Der einfachste Fall ist die un/endliche Wiederholung desselben Spiels

$$g \;:\; A = \prod_{i \in I} A^i \to \mathbb{R}^I.$$

Es bereitet kaum Mehraufwand, eine Familie $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Spielen

$$g_k \;:\; A_k = \prod_{i \in I} A_k^i \to \mathbb{R}^I$$

zu untersuchen. Zwar müssen wir einen weiteren Index k mitführen, aber die Argumente werden dadurch eher einfacher und klarer.

Lassen Sie sich von der akribischen Schreibweise nicht abschrecken, sondern lernen Sie, ihre ordnende Kraft zu schätzen, ja zu lieben.

Verkettung von Spielen in Normalform

Definition F2A (Verkettung von Spielen in Normalform)

Gegeben sei eine Familie $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Spielen

$$g_k \,:\, A_k = \prod_{i\in I} A_k^i \to \mathbb{R}^I.$$

Für jeden Spieler $i \in I$ gelte $\sum_{k=0}^{\infty} \sup|g_k^i| < \infty$. Typische Beispiele sind $g_k = (1-\delta)\delta^k g$ für ein endliches Spiel $g : A = \prod_{i\in I} A^i \to \mathbb{R}^I$.

Hieraus konstruieren wir das extensive Spiel

$$\Gamma = \prod_{k=0}^{\infty} g_k$$

als **Verkettung** dieser Stufenspiele durch Hintereinanderausführung.

Die Zustandsmenge $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ besteht aus allen Spielverläufen mit $X_n = \prod_{k<n} A_k = A_0 * \cdots * A_{n-1}$ und $\partial X = X_\infty = A = \prod_{k=0}^{\infty} A_k$. Auszahlungen werden summiert zu $u^i : \partial X \to \mathbb{R} : u^i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^i(x_k)$.

Verkettung von Spielen in Normalform

Diese Konstruktion ist ein Spezialfall der Verkettung $\Gamma = \prod_{k\in\mathbb{N}} \Gamma_k$ beliebiger extensiver Spiele Γ_k, wie zuvor in Definition F1B erklärt. Im vorliegenden Fall ist jedes Stufenspiel Γ_k besonders einfach, daher können wir alle Daten von Γ bequem explizit ausschreiben.

Das nutzen wir dankend in den folgenden Sätzen und Rechnungen. Ohne geeignete Notation wäre dies ein hoffnungsloses Unterfangen. Glücklicherweise ist unsere Notation sowohl präzise als auch bequem. Die folgenden Feststellungen werden damit beinahe zur Trivialität.

Dass schließlich alles übersichtlich, offen und klar vor uns liegt, verdanken wir unserer Vorbereitung der grundlegenden Begriffe: Spiele in statischer und extensiver Form, Nash–Gleichgewichte und teilspielperfekte Gleichgewichte, und für letztere Zermelos Rückwärtsinduktion und das Prinzip der einmaligen Abweichung.

🙂 Mit diesen Werkzeugen können wir präzise und effizient arbeiten.

Das Prinzip der Abschreckung

Lemma F2B (Prinzip der Abschreckung)

Gegeben sei eine Familie $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Spielen $g_k : A_k = \prod_{i\in I} A_k^i \to \mathbb{R}^I$ und ihre Verkettung $\Gamma = \prod_{k=0}^{\infty} g_k$ wie zuvor in Definition F2A erklärt.

Gegeben seien Aktionsvektoren $a, z \in A$ mit $z_k \in \mathrm{NE}(g_k)$ für $k \in \mathbb{N}$. Hierzu sei $s = \mathrm{Grim}(a, z)$ die Grim-Trigger-Strategie, für jedes $n \in \mathbb{N}$ also $s_n : X_n \to A_n$ mit $s(a_0 a_1 \dots a_{n-1}) = a_n$ und $s(x) = z_n$ sonst.

*Genau dann gilt $s \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$, wenn für jeden Spieler $i \in I$ und jede Abweichung $\tilde{a}_n^i \in A_n^i$ die **Abschreckung** ausreichend wirkt gemäß*

$$\underbrace{\left[g_n^i(\tilde{a}_n^i; a_n^{-i}) - g_n^i(a_n^i; a_n^{-i})\right]}_{\text{kurzfristiger Vorteil der Abweichung}} \quad\le\quad \underbrace{\sum_{k>n} \left[g_k^i(a_k) - g_k^i(z_k)\right]}_{\text{langfristiger Vorteil der Vereinbarung}}.$$

🙂 Statt $z_k \in \mathrm{NE}(g_k)$ genügt $z_k \in \mathrm{NE}(\bar{g}_k)$, das ist wesentlich flexibler. Der Satz von Nash garantiert die Existenz gemischter Gleichgewichte.

Wir schreiben weiterhin $g_k^i(z_k)$, auch wenn für die gemischte Strategie $z_k \in \bar{A}_k$ eigentlich die lineare Fortsetzung $\bar{g}_k^i : \bar{A}_k \to \mathbb{R}$ genutzt wird.

Das Prinzip der Abschreckung

Beweis: Die genannten Ungleichungen sind offensichtlich notwendig: Für Spieler $i \in I$ lohnt sich eine Abweichung von a_n^i zu $\tilde{a}_n^i$, wenn

$$\underbrace{g_n^i(\tilde{a}_n^i; a_n^{-i}) + \sum_{k>n} g_k^i(z_k)}_{\text{Auszahlung bei Abweichung}} \quad>\quad \underbrace{g_n^i(a_n^i; a_n^{-i}) + \sum_{k>n} g_k^i(a_k)}_{\text{Auszahlung bei Vereinbarung}}.$$

Für jeden Spieler $i \in I$ und jede Abweichung $\tilde{a}_n^i \in A_n^i$ fordern wir daher

$$\underbrace{g_n^i(\tilde{a}_n^i; a_n^{-i}) + \sum_{k>n} g_k^i(z_k)}_{\text{Auszahlung bei Abweichung}} \quad\le\quad \underbrace{g_n^i(a_n^i; a_n^{-i}) + \sum_{k>n} g_k^i(a_k)}_{\text{Auszahlung bei Vereinbarung}}.$$

Abweichung aus den Nash–Gleichgewichten $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist nie profitabel:

$$\underbrace{g_n^i(\tilde{a}_n^i; z_n^{-i}) + \sum_{k>n} g_k^i(z_k)}_{\text{Auszahlung bei Abweichung}} \quad\le\quad \underbrace{g_n^i(z_n^i; z_n^{-i}) + \sum_{k>n} g_k^i(z_k)}_{\text{Auszahlung bei Vereinbarung}}$$

🙂 Diese Bedingungen sind auch hinreichend nach dem Prinzip F1D der einmaligen Abweichung. Somit ist s ein teilspielperfektes Gleichgewicht!

Menschen machen Fehler. Die Grim-Trigger-Strategie ahndet dies sofort mit ewiger Verdammnis. In manchen Anwendungen ist dies realistisch: Die Kooperation wird für immer beendet, ohne Aussicht auf Versöhnung.

In vielen Anwendungen ist dies jedoch zu streng, insbesondere dann, wenn die beteiligten Spieler dauerhaft aufeinander angewiesen sind.

In Partnerschaften können Verstöße mit Schmollen geahndet werden, kleine Vergehen mit kurzem Schmollen, größere mit längerem, manche gar mit Beziehungsabbruch. Oft beobachtet man jedoch Versöhnung nach verbüßter Zurechtweisung: „Jetzt hast du deine Lektion gelernt.“

Auch in der Rechtsprechung gilt das Prinzip der Angemessenheit: Die Strafzumessung gründet (1) auf der Feststellung einer Straftat und erfolgt (2) nach der Schwere der Schuld. Dasselbe gilt genauso im Sport bei einem progressiven Strafsystem, etwa beim Handball.

Zur Vereinfachung sind unsere bisherigen Strategien unerbittlich und simple Variationen der Grim-Trigger-Strategie. Das ist für die meisten Anwendungen unnötig streng. Zur Teilspielperfektion / Abschreckung genügt es, genau so lange zu bestrafen, bis die Schuld getilgt ist.

Aufgabe: Konstruieren Sie explizit und präzise eine solche Strategie „Schuld und Sühne“ und beweisen Sie ihre Teilspielperfektion.

Lösung: Die Strategie „Schuld und Sühne“ (Definition F2C) ist intuitiv klar, und der Nachweis ihrer Teilspielperfektion (Satz F2D) ist plausibel. Dennoch sind explizite Formulierung und sorgfältiges Nachrechnen eine schöne mathematische Fingerübung bzw. artistische Herausforderung.

Gegeben sei eine Familie $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Spielen $g_k : A_k = \prod_{i\in I} A_k^i \to \mathbb{R}^I$ und ihre Verkettung $\Gamma = \prod_{k=0}^{\infty} g_k$ wie zuvor in Definition F2A erklärt.

Vorgegeben sei $a \in A = \prod_{k=0}^{\infty} A_k$ als der „rechte Pfad“. Idealerweise ist der Spielverlauf $a_0 a_1 a_2 \dots$. Jede Abweichung $\tilde{a}_n \ne a_n$ wird sanktioniert, indem die vorgesehenen Nash–Gleichgewichte $z_n z_{n+1} \dots z_{n+\ell}$ gespielt werden für die nächsten $\ell = \ell_n(\tilde{a}_n)$ Runden. Danach wird vergeben.

Wir benötigen hierzu für $n \in \mathbb{N}$ einen Bußkatalog $\ell_n : A_n \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$: Er gibt für jede Abweichung vor, wie viele Runden gebüßt werden muss.

Definition F2C (Schuld und Sühne)

Gegeben sei eine Familie $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Spielen $g_k : A_k = \prod_{i\in I} A_k^i \to \mathbb{R}^I$ und ihre Verkettung $\Gamma = \prod_{k=0}^{\infty} g_k$ wie zuvor in Definition F2A erklärt.

Gegeben seien Aktionsvektoren $a, z \in A = \prod_{k\in\mathbb{N}} A_k$ mit $z_k \in \mathrm{NE}(g_k)$ und ein Bußkatalog $\ell_k : A_k \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit $l_k(a_k) = 0$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Wir definieren die **Schuld-und-Sühne-Strategie** $s = \mathrm{CAP}(a, z, \ell)$, engl. *Crime and Punishment*, wie folgt:

$$s \;:\; X_n \to A_n \;:\; x \mapsto s_x = \begin{cases} a_n & \text{falls } \ell(x) = 0, \\ z_n & \text{falls } \ell(x) > 0. \end{cases}$$

Für jede Vorgeschichte $x \in X_n$ definieren wir $\ell(x)$ als die Rundenzahl, die noch gesühnt werden muss. Ohne Erbsühne haben wir $\ell(\emptyset) := 0$. Für $x = v * \tilde{a}_n$ mit $v \in X_n$ und $\tilde{a}_n \in A_n$ gilt dann rekursiv:

$$\ell(v * \tilde{a}_n) = \begin{cases} \ell_n(\tilde{a}_n) & \text{falls } \ell(v) = 0, \\ \ell(v) - 1 & \text{falls } \ell(v) > 0. \end{cases}$$

Statt $z_k \in \mathrm{NE}(g_k)$ genügt $z_k \in \mathrm{NE}(\bar{g}_k)$, das ist wesentlich flexibler. Der Satz von Nash garantiert die Existenz gemischter Gleichgewichte.

Teilspielperfektion ist nun ein einfaches System von Ungleichungen:

Satz F2D (Schuld und Sühne)

Wie in F2C sei $s = \mathrm{CAP}(a, z, \ell)$ die Schuld-und-Sühne-Strategie.

*Genau dann gilt $s \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$, wenn für jeden Spieler $i \in I$ und jede Abweichung $\tilde{a}_n^i \in A_n^i$ die **Abschreckung** ausreichend wirkt gemäß*

$$\underbrace{\left[g_n^i(\tilde{a}_n^i; a_n^{-i}) - g_n^i(a_n^i; a_n^{-i}) \right]}_{\text{kurzfristiger Vorteil der Abweichung}} \quad \le \quad \underbrace{\sum_{k=n+1}^{n+\ell_n(\tilde{a}_n)} \left[g_k^i(a_k) - g_k^i(z_k) \right]}_{\text{langfristiger Vorteil der Vereinbarung}}.$$

Bußzeiten $\ell_n(\tilde{a}_n) = \ell_n(\tilde{a}_n^i; a_n^{-i}) = \ell_n^i(\tilde{a}_n^i)$ mit $\ell_n^i : A_k^i \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ werden nur für die Abweichung eines einzigen Spielers $i \in I$ benötigt. Bußzeiten bei Abweichung von zwei oder mehr Spielern sind beliebig. Sie spielen für Gleichgewichte und obige Ungleichungen keine Rolle.

Schuld und Sühne

Aufgabe: Beweisen Sie Satz F2D nach dem Vorbild von Lemma F2B. Analysieren Sie hierzu genau die Schuld-und-Sühne-Strategie F2C und nutzen Sie das Prinzip F1D der einmaligen Abweichung.

Beweis: Die genannten Ungleichungen sind offensichtlich notwendig: Für Spieler $i \in I$ lohnt sich eine Abweichung von a_n^i zu $\tilde{a}_n^i$, wenn

$$\underbrace{g_n^i(\tilde{a}_n^i; a_n^{-i}) + \sum_{k=n+1}^{n+\ell_n(\tilde{a}_n)} g_k^i(z_k)}_{\text{Auszahlung bei Abweichung, danach normal weiter}} \quad > \quad \underbrace{g_n^i(a_n^i; a_n^{-i}) + \sum_{k=n+1}^{n+\ell_n(\tilde{a}_n)} g_k^i(a_k)}_{\text{Auszahlung bei Vereinbarung, danach normal weiter}}.$$

Für jeden Spieler $i \in I$ und jede Abweichung $\tilde{a}_n^i \in A_n^i$ fordern wir daher

$$\underbrace{g_n^i(\tilde{a}_n^i; a_n^{-i}) + \sum_{k=n+1}^{n+\ell_n(\tilde{a}_n)} g_k^i(z_k)}_{\text{Auszahlung bei Abweichung, danach normal weiter}} \quad \le \quad \underbrace{g_n^i(a_n^i; a_n^{-i}) + \sum_{k=n+1}^{n+\ell_n(\tilde{a}_n)} g_k^i(a_k)}_{\text{Auszahlung bei Vereinbarung, danach normal weiter}}.$$

Abweichung aus den Nash–Gleichgewichten $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist nie profitabel, denn $g_n^i(\tilde{a}_n^i; z_n^{-i}) \le g_n^i(z_n^i; z_n^{-i})$. Solche Abweichungen werden daher nicht zusätzlich bestraft, die Bußzeit wird dadurch nicht verlängert.

Diese Bedingungen sind auch hinreichend nach dem Prinzip F1D der einmaligen Abweichung. Somit ist s ein teilspielperfektes Gleichgewicht!

Schuld und Sühne

Beispiel: Der Extremfall $\ell = 0$ bedeutet keinerlei Sanktionen:

$$\mathrm{Stoic}(a) = \mathrm{CAP}(a, z, 0).$$

Was auch immer in der Vergangenheit $x \in X_n$ vorgefallen sein mag, es wird immer wie vereinbart fortgefahren und stoisch $s_x = a_n$ gespielt. Die Spieler nutzen überhaupt nicht ihre Erinnerung an den Spielverlauf.

Genau dann ist s teilspielperfekt, falls $a_n \in \mathrm{NE}(g_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Das ist ein einfacher aber illustrativer Spezialfall von Satz F2D.

Beispiel: Das andere Extrem $\ell = \infty$ ist die Grim-Trigger-Strategie:

$$\mathrm{Grim}(a, z) = \mathrm{CAP}(a, z, \infty).$$

Hierzu definieren wir „$\ell = \infty$“ für $n \in \mathbb{N}$ durch die Funktion $\ell_n : A_n \to \{0, \infty\}$ mit $\ell_n(a_n) = 0$ und $\ell_n(\tilde{a}_n) = \infty$ für alle $\tilde{a}_n \neq a_n$. Das bedeutet: Jede Abweichung führt zur ewigen Verdammnis.

Genau dann ist s teilspielperfekt, wenn die Abschreckung wirkt (F2B).
Satz F2D formuliert dieses nützliche Kriterium nun allgemein.

Schuld und Sühne

„Strafe muss sein.“, behauptet das Sprichwort. Das sagt der Satz nicht! Der Satz sagt nicht, dass Schuld und Sühne (*Crime and Punishment*) die *einzige* Lösung $s \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$ ist, sondern unter welchen Bedingungen diese spezielle Strategie $s \in S$ ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist.

Der Satz besteht, nüchtern betrachtet, lediglich aus Ungleichungen, über die hier effizient und geschickt buchgeführt wird. Etwas epischer: Für jeden Spieler $i \in I$ und jeden Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir

den Treuebonus $\quad \tau_n^i := \sum_{k>n} \big[g_k^i(a_k) - g_k^i(z_k) \big] \quad$ und

die Versuchung $\quad \sigma_n^i := \sup\big\{\, g_n^i(\tilde{a}_n^i; a_n^{-i}) - g_n^i(a_n) \;\big|\; \tilde{a}_n^i \in A_n^i \,\big\}.$

Die Schuld-und-Sühne-Strategie gelingt, mit endlichen Bußzeiten, falls die Treue überwiegt, also $\sigma_n^i < \tau_n^i$ für alle $i \in I$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Manche Abweichung $\tilde{a}_n^i$ muss gar nicht bestraft werden, nämlich falls

$$g_n^i(\tilde{a}_n^i; a_n^{-i}) - g_n^i(a_n^i; a_n^{-i}) \le 0.$$

Spieler i schadet sich damit selbst, sein selbstverschuldeter Verlust ist Strafe genug. Spezialfall: Ist $a_n \in \mathrm{NE}(g_n)$ ein Nash–Gleichgewicht, so gilt dies für jeden Spieler $i \in I$ und jede Abweichung $\tilde{a}_n^i \in A_n^i$.

Schuld und Sühne

Die praktische Bedeutung dieser einfachen Rechnung ist immens. Die Schuld-und-Sühne-Strategie steckt in vielen alltäglichen Situationen, wenn auch meist etwas variiert und verkleidet, im sozialen Miteinander, von Teamarbeit bis Sport, von Verträgen bis Strafrecht. Sie prägt soziale Normen und Konventionen, viele davon sind unbewusst Gleichgewichte.

Natürlich ist die Wirklichkeit viel komplizierter als unser simples Modell, doch die mathematische Beschreibung trifft einen wichtigen Kernaspekt: Übereinkünfte und Zusammenarbeit sind nur dann langfristig stabil, wenn Kooperation ausreichend belohnt, Betrug dagegen bestraft wird.

Die Schuld-und-Sühne-Strategie benötigt angemessene Sanktionen: Die Strafe muss streng genug sein, damit Betrug nicht lukrativ wird. Die Strafe darf nachsichtig sein: Zur Teilspielperfektion / Abschreckung genügt es, genau so lange zu bestrafen, bis die Schuld getilgt ist.

Die Schuld ist hier der eigene Vorteil, den der Abweichler erschleicht; es geht nicht um den Schaden, den er damit eventuell anderen zufügt. Die angemessene Strafe garantiert nur Abschreckung, nicht Rache. Zumindest bei rationalen Spielern wird das wirken, und nur das.

Nash Folk Theorem

Satz F2E (Nash Folk Theorem, vereinfachte Grundversion)

Sei $g : A = \prod_{i\in I} A^i \to \mathbb{R}^I$ ein endliches Spiel und $z \in \mathrm{NE}(\bar g)$. Sei $a \in [A]$ eine korrelierte Strategie, also eine Konvexkombination $a = \sum_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda a_\lambda$ reiner Strategievektoren $a_\lambda \in A$ mit $p_\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\sum_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda = 1$.

Jeden Spieler $i \in I$ lockt der Treuebonus $\tau_i := g^i(a) - g^i(z) > 0$ sowie die Versuchung $\sigma_i := \max\{\, g^i(\tilde a^i; a_\lambda^{-i}) - g^i(a_\lambda^i; a_\lambda^{-i}) \mid \tilde a^i \in A^i,\ \lambda \in \Lambda \,\}$.

Wir wiederholen das Spiel g unendlich oft mit diskontierter Auszahlung $u : A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^I : u^i(x) = (1-\delta_i)\sum_{k=0}^{\infty} \delta_i^k g^i(x_k)$. Dann ist die Auszahlung $g(a) \in \mathbb{R}^I$ durch eine teilspielperfekte Strategie $s \in S$ realisierbar:

(1) Probabilistisch mit einem öffentlich sichtbaren Zufallsgenerator: Für jeden Spieler $i \in I$ muss Treue überwiegen gemäß $\delta_i \ge \frac{\sigma_i}{\sigma_i+\tau_i} =: \underline{\delta}_i$.

(2) Ohne öffentlichen Zufallsgenerator durch rationale Approximation: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein Strategievektor $s \in S$ und für jeden Spieler $i \in I$ eine Geduldsschwelle $\underline{\delta}_i \in [0,1[$ sodass für alle $\delta_i \in [\underline{\delta}_i, 1[$ gilt: Der Strategievektor s ist teilspielperfekt und erfüllt $|u^i(s) - g^i(a)| < \varepsilon$.

Nash Folk Theorem

Folk Theoreme und ganz allgemein Gleichgewichte sagen uns nicht, wie das Spiel verlaufen *muss*, sondern nur, wie es verlaufen *kann*. Sie machen Existenzaussagen: Unter bestimmten Bedingungen existiert eine (Trigger-)Strategie s, mit der sich alle Spieler besser stellen können, als bei permanenter Wiederholung der Nash-Lösung z des Stufenspiels.

Der Name „Folk“ rührt daher, dass sie seit Nash unter Spieltheoretikern bekannt waren, aber lange nur als „Folklore“ mündlich tradiert wurden.

Ihre Anwendung liegt in der Modellierung langfristiger Interaktionen: Verträge, Teamarbeit, soziale Bindungen, Ehe, Kindererziehung, ... Eine Vereinbarung ist nur dann rational und glaubwürdig, wenn sie ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist. Viele Strategien sind uns aus dem Alltag vertraut und werden hier mathematisch erklärt und quantifiziert.

Mögliche Verbesserungen: Der Grundwert $g^i(z)$ mit $z \in \mathrm{NE}(\bar g)$ lässt sich weiter herabsetzen bis niedrigstens zu $\min_{z^{-i}\in A^{-i}} \max_{z^i\in A^i} g^i(z^i; z^{-i})$. Teilspielperfekte Realisierungen werden dadurch deutlich komplizierter. Eine ausführliche Konstruktion und Diskussion des Verhaltens finden Sie in M.J. Osborne, A. Rubinstein: *A Course in Game Theory*, Kapitel 8.

Nash Folk Theorem mit Zufallsgenerator

Aufgabe: Lernen, verstehen und beweisen Sie den Satz, indem Sie für (1) explizit geeignete teilspielperfekte Gleichgewichte konstruieren.

Lösung: (1) Wir nutzen einen öffentlich sichtbaren Zufallsgenerator: Zu Beginn jeder Runde n wird ein Zufallselement λ_n gezogen aus dem WRaum $(\Lambda, \mathbf{P})$ mit den vorgegebenen Wkten $\mathbf{P}(\{\lambda\}) = p_\lambda$. Somit liegt die Historie $x = (\lambda_0, a_0, \lambda_1, a_1, \dots, \lambda_{n-1}, a_{n-1}, \lambda_n)$ vor.

Gilt $a_k = a_{\lambda_k}$ für alle $k = 0, 1, \dots, n-1$, dann setze $s_x^i = a_{\lambda_n}^i \in A^i$, andernfalls setze $s_x^i = z^i \in \bar A^i$; dies ist eine lokal gemischte Strategie. Konkret bedeutet das: Gemäß der gemischten Strategie $z^i = \sum_\nu q_\nu^i z_\nu^i$ lost Spieler i (individuell, geheim) eine der reinen Strategien $z_\nu^i \in A^i$ aus.

$$\underbrace{(1-\delta_i)\Big[\delta_i^n g^i(\tilde a^i; a_{\lambda_n}^{-i}) + \textstyle\sum_{k>n} \delta_i^k g^i(z)\Big]}_{\text{Auszahlung bei Abweichung}} \le \underbrace{(1-\delta_i)\textstyle\sum_{k\ge n} \delta_i^k g^i(a)}_{\text{Auszahlung bei Vereinbarung}}$$

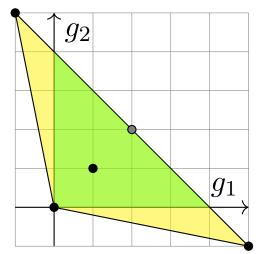
$$\underbrace{(1-\delta_i)\delta_i^n \Big[g^i(\tilde a^i; a_{\lambda_n}^{-i}) - g^i(a_{\lambda_n}^i; a_{\lambda_n}^{-i})\Big]}_{\text{kurzfristiger Vorteil der Abweichung}} \le \underbrace{(1-\delta_i)\textstyle\sum_{k>n} \delta_i^k \big[g^i(a) - g^i(z)\big]}_{\text{langfristiger Vorteil der Vereinbarung}}$$

Dies ist äquivalent zu $(1-\delta_i)\sigma_i \le \delta_i\tau_i$, also $\delta_i \ge \frac{\sigma_i}{\sigma_i+\tau_i} =: \underline{\delta}_i \in [0,1[$.

Nash Folk Theorem mit Zufallsgenerator

Beispiel: Wir iterieren unendlich oft das folgende Spiel $g : \{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$:

A \ B	0	1
0	0 / 0	5 / -1
1	-1 / 5	1 / 1



Aufgabe: Wie können die Spieler die Auszahlung $(2,2)$ erreichen?

Erste Lösung: Eine Hand wäscht die andere (F1E) für $\delta_i \ge 1/5 =: \underline{\delta}_i$.

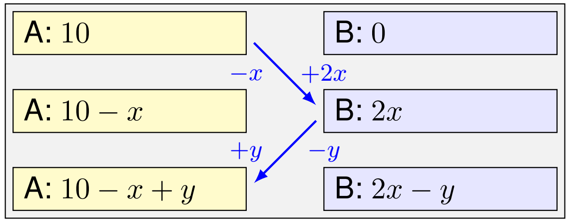
🙂 Anschaulich: Die Vorleistung -1 wird sofort belohnt mit $5\delta \ge 1$.

Zweite Lösung: Stochastisch mit öffentlichem Zufallsgenerator (F2E). Die Spieler vereinbaren die korrelierte Strategie $a = \frac{1}{2}\cdot(0,1) + \frac{1}{2}\cdot(1,0)$ mit $g(a) = (2,2)$ und den Grundzustand $z = (0,0)$ mit $g(z) = (0,0)$. Treuebonus $\tau_i = 2$, Versuchung $\sigma_i = 1$, also $\underline{\delta}_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_i+\tau_i} = 1/3$.

🙂 Dies erfordert mehr Geduld: Die Vorleistung -1 wird belohnt durch die Erwartung $2(\delta + \delta^2 + \dots) = 2\delta/(1-\delta) \ge 1$, daher also $\delta \ge 1/3$.

Das Spiel *Hin-und-Rück*

Wir erinnern an unser Experiment aus der Einführung (Kapitel A): Zwei Spieler A und B interagieren anonym über eine Datenleitung. Sie (er)kennen sich nicht und begegnen sich vermutlich nie wieder.



Zu Beginn erhält Spieler A ein Guthaben von 10€, Spieler B nur 0€.

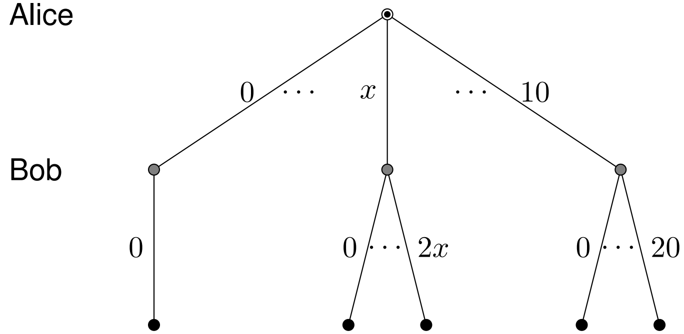
Erster Zug: A schickt an B einen frei wählbaren Betrag $x \in \{0, 1, \dots, 10\}$. Dieser Betrag x wird bei A abgebucht und bei B doppelt gutgeschrieben.

Zweiter Zug: B schickt an A davon einen Betrag $y \in \{0, 1, \dots, 2x\}$. Dieser Betrag y wird bei B abgebucht und bei A gutgeschrieben.

Damit endet das Spiel und jedem wird sein Kontostand ausbezahlt.

Das Spiel *Hin-und-Rück*

Wir können dieses Spiel nun übersichtlich als Spielbaum darstellen:



$X = \emptyset \sqcup \{\, x \in \mathbb{Z} \mid 0 \le x \le 10 \,\} \sqcup \{\, (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \le x \le 10,\ 0 \le y \le 2x \,\}$

Auszahlung $u(x, y) = (10 - x + y, 2x - y)$ auf terminalen Zuständen.

Aktionen / Strategien für Alice sind $s^1 \in S^1 = A^1 = \{0, 1, \dots, 10\}$.

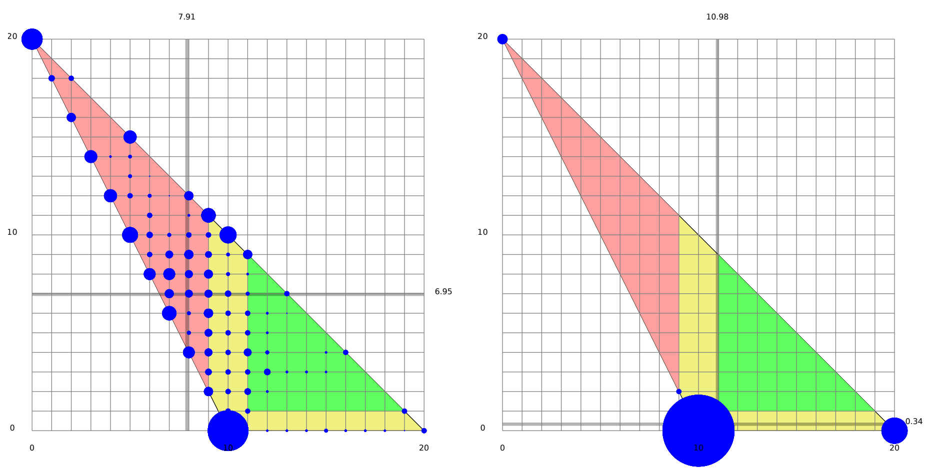
Im Zustand $x \in \{0, 1, \dots, 10\}$ hat Bob die Aktionen $A^2_x = \{0, 1, \dots, 2x\}$.

Strategien für Bob sind demnach Tupel der Form $s^2 \in S^2 = \prod_{x \in A^1} A^2_x$,

also Abbildungen $s^2 : \{0, 1, \dots, 10\} \to \mathbb{Z}$ mit $0 \le s^2(x) \le 2x$.

Auszahlung $u : S^1 \times S^2 : u(s^1, s^2) = (10 - s^1 + s^2(s^1), 2s^1 - s^2(s^1))$.

Das Spiel *Hin-und-Rück*



Sie sehen hier zwei Momentaufnahmen der Studentenpopulation vom April 2018, und zwar die erste und fünfte Durchführung dieses Spiels.

Welches Spielverhalten erwarten Sie bei un/endlicher Wiederholung? Varianten: (a) ohne Rollenwechsel und (b) mit alternierenden Rollen.

Das Spiel *Hin-und-Rück*

Das ist ein einfaches aber typisches Modell wirtschaftlichen Handelns.

Wir können die Interaktion als **Kredit und Rückzahlung** interpretieren: Spieler A verleiht einen Teil seines Geldes, Spieler B erwirtschaftet damit eine Verdopplung und zahlt zurück: Tilgung plus Zinsen?

Ebenso können wir es als **Online-Handel** interpretieren: Spieler A geht in Vorleistung und verschickt die Ware, für Spieler B ist diese doppelt so nützlich / wertvoll, schließlich bezahlt B nach seinem eigenen Ermessen.

Interessanterweise fehlen hier alle üblichen Kontrollmechanismen.

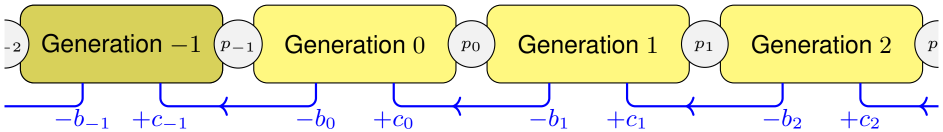
Bei wiederholtem Spiel entsteht eine **soziale Kontrolle** von selbst. Bekannte soziale Normen wie „Ehrlichkeit“ und „Vertrauen“ sind im iterierten Spiel stabil und führen tatsächlich zu beiderseitigem Vorteil. Im einfachen oder endlich wiederholten Spiel hingegen gilt dies nicht!

Nashs Folk Theorem zeigt uns **Möglichkeiten**. Spieler A muss am Ende mindestens 10€ erhalten, eventuell plus Zinsen. Wie hoch ein „fairer“ Zins sein sollte, sagt uns der Satz nicht. Nullzins oder Wucher sind gleichermaßen möglich. Der Zins ist Teil der sozialen Konvention.

Generationenmodell zur Altersversorgung

F225

Wir untersuchen erneut und genauer unser Generationenmodell:



Aufgabe: (1) Formalisieren Sie dies als deterministisches Spiel Γ.
(a) Jede Generation kennt die Geschichte oder (b) nur die Elternaktion.
Können Sie dies als Verkettung $\Gamma = \Gamma_0 * \Gamma_1 * \Gamma_2 * \dots$ darstellen?

(2) Formalisieren Sie dies ebenso als probabilistisches Spiel Γ.
Können Sie dies als Verkettung $\Gamma = \Gamma_0 * \Gamma_1 * \Gamma_2 * \dots$ darstellen?

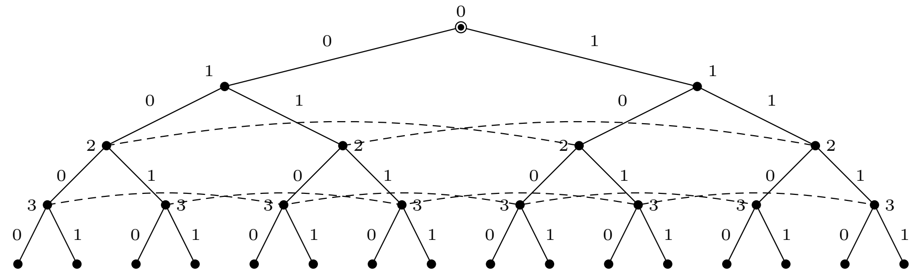
(3) Finden Sie alle Nash–Gleichgewichte. Welche sind teilspielperfekt?

Dies ist ein erstes, relativ simples Generationenmodell, aber durchaus repräsentativ. Es hat uns bereits gute Dienste geleistet. Daran können wir nun den Formalismus dynamischer Spiele in extensiver Form üben. Nur so erkennen wir Schwierigkeiten und können Feinheiten klären.

Generationenmodell zur Altersversorgung

F226

Lösung: (1) Zunächst deterministisch mit Diskontierungen $p_i \in [0,1]$:



Die Spielermenge ist $I = \mathbb{N}$. Der Zustandsraum ist $X = \{0,1\}^{\le\infty}$.

Für $i \in \mathbb{N}$ und $x \in X_i$ gilt $A_x \cong A_x^i = \{0,1\}$, also $A_x^j = \{*\}$ für $j \neq i$.

Die Fortsetzung ist kanonisch, also $f_x : A_x \xrightarrow{\sim} x * \{0,1\} : a \mapsto x * a$.

Auszahlung $u^i : \partial X = \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R} : x \mapsto p_0 p_1 \cdots p_{i-1}(-b_i x_i + p_i c_i x_{i+1})$.

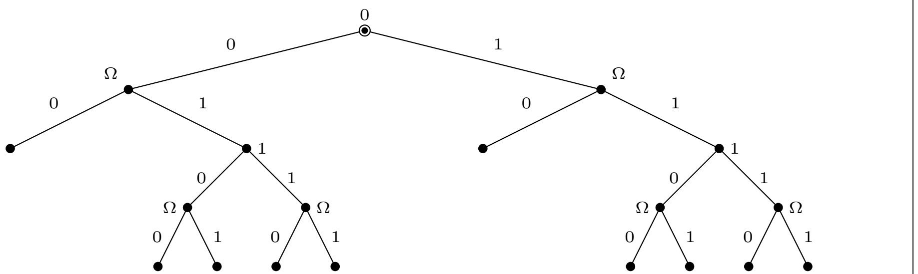
Auskunft ist (a) $q^i = \mathrm{id}_{X_i}$ bzw. (b) $q^i : X_i \to \{0,1\} : x \mapsto x_{i-1}$.

Daraus folgt die Strategiemenge $S^i = \{\ s^i : \{0,1\} \to \{0,1\}\ \}$.

Generationenmodell zur Altersversorgung

F227

(2) Zum Vergleich die Formalisierung als probabilistisches Spiel:



Der Baum ist $X = \{01,11\}^{\infty} \sqcup (\{01,11\}^{<\infty} * \{00,10\}) \subset \{0,1\}^{\le\infty}$.

Für $i \in \mathbb{N}$ und $x \in X_{2i}$ gilt $A_x \cong A_x^i = \{0,1\}$, also $A_x^j = \{*\}$ für $j \neq i$.

Für $x \in X_{2i+1}$ wird unabhängig gezogen aus $\Omega_x = \{0,1\}$ mit $\mathbf{P}_x(1) = p_i$.

Auf terminalen Zuständen haben wir die Auszahlung $u^i : \partial X \to \mathbb{R}$

$$u^i(x) = \begin{cases} -b_i x_{2i} & \text{falls } x_1 = x_3 = \dots = x_{2i-1} = 1 \text{ und } x_{2i+1} = 0, \\ -b_i x_{2i} + c_i x_{2i+2} & \text{falls } x_1 = x_3 = \dots = x_{2i-1} = 1 \text{ und } x_{2i+1} = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Generationenmodell zur Altersversorgung

F228

Auskunft ist (a) $q^i = \mathrm{id}_{X_i}$ bzw. (b) $q^i : X_i \to \{0,1\} : x \mapsto x_{i-1}$.

Daraus folgt die Strategiemenge $S^i = \{\ s^i : \{0,1\} \to \{0,1\}\ \}$.

Der Strategievektor $s \in S$ definiert die Aktionen $a_i = s^i(a_{i-1})$.

Zusammen mit $\omega \in \Omega$ folgt der gesamte Spielverlauf $x \in \partial X$.

Die erwartete Auszahlung ist $u^i(s) = p_0 p_1 \cdots p_{i-1}(-b_i a_i + p_i c_i a_{i+1})$.

♦ Satz C4A (Nash–Gleichgewichte im Generationenmodell)

Die Generationen $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ interagieren wie gezeigt, mit Kosten $b_i \in \mathbb{R}_{>0}$ und Nutzen $c_i \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie den Fortsetzungswkten $p_i \in [0,1]$ für $i \in \mathbb{N}$.

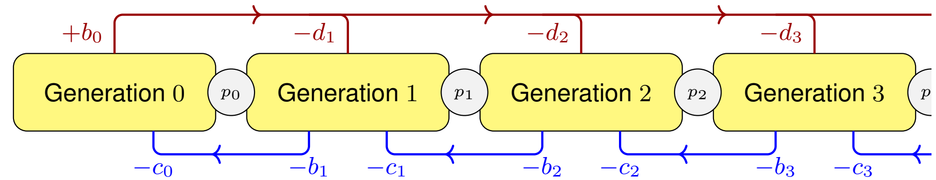
(1) Ist $s \in \prod_{i\in\mathbb{N}} S_i$ ein Nash–Gleichgewicht, so ist der Aktionsvektor $a = a(s) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ wachsend, also $a = a^n := \mathbf{I}_{\mathbb{N}_{\ge n}}$ für ein $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

(2) Gilt $p_m c_m < b_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so ist $a_m = 0$ strikt dominant für G_m, per Rückwärtsinduktion folgt $a_i = 0$ für alle $i = 0,1,\dots,m$, also $n > m$.

(3) Gilt $p_i c_i > b_i$ für alle $i \ge m$, so lässt sich jeder Aktionsvektor $a = a^n$ mit $n \ge m$ realisieren durch ein Nash–Gleichgewicht $s \in \prod_{i\in\mathbb{N}} S_i$.

Generationenmodell zur Nachhaltigkeit

Wir betrachten erneut und genauer unser Nachhaltigkeitsmodell:



Aufgabe: (1) Formalisieren Sie dies als deterministisches Spiel Γ. Können Sie dies als Verkettung $\Gamma = \Gamma_0 * \Gamma_1 * \Gamma_2 * \dots$ darstellen?

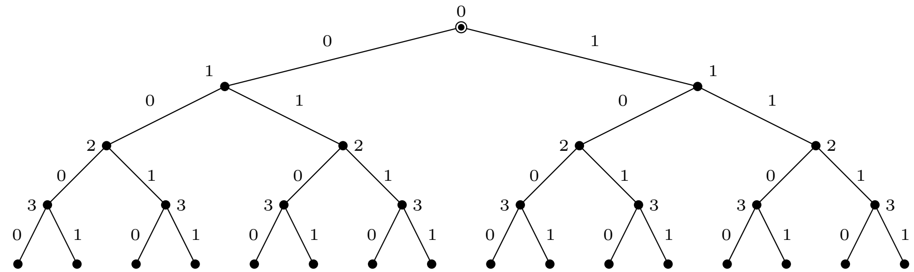
(2) Formalisieren Sie dies ebenso als probabilistisches Spiel Γ. Können Sie dies als Verkettung $\Gamma = \Gamma_0 * \Gamma_1 * \Gamma_2 * \dots$ darstellen?

(3) Finden Sie alle Nash–Gleichgewichte. Welche sind teilspielperfekt?

Akteure sind die Generationen G_i für $i \in \mathbb{N}$. Die Generation G_0 wählt ihre Aktion / Strategie $a_0 \in A_0 = \{0 = \text{Nachhaltigkeit}, 1 = \text{Raubbau}\}$. Jede Generation G_i mit $i \geq 1$ kennt die gesamte Vorgeschichte und folgert daraus ihre Aktion $a_i \in A_i = \{0 = \text{schweigen}, 1 = \text{anklagen}\}$. Auszahlungen sind $u^0 = b_0 a_0 - p_0 c_0 a_1$ und $u^i = -b_i a_i - p_i c_i a_{i+1} - d_i a_0$.

Generationenmodell zur Nachhaltigkeit

Lösung: (1) Zunächst deterministisch mit Diskontierung $p_i \in [0,1]$:



Die Spielermenge ist $I = \mathbb{N}$. Der Zustandsraum ist $X = \{0,1\}^{\leq\infty}$.

Für $i \in \mathbb{N}$ und $x \in X_i$ gilt $A_x \cong A_x^i = \{0,1\}$, also $A_x^j = \{*\}$ für $j \neq i$.

Die Fortsetzung ist kanonisch, also $f_x : A_x \xrightarrow{\sim} x * \{0,1\} : a \mapsto x * a$.

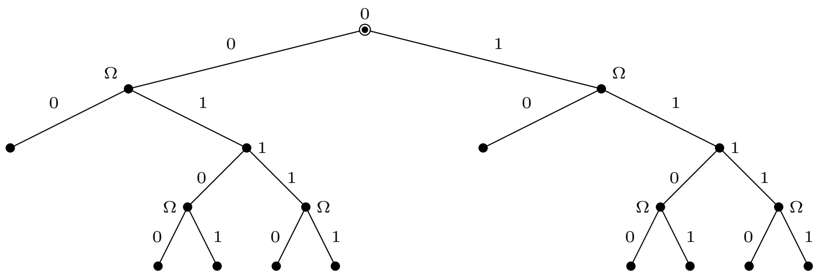
Auszahlungen sind $u^0 = b_0 x_0 - p_0 c_0 x_1$ und $u^i = -b_i x_i - p_i c_i x_{i+1} - d_i x_0$.

Jeder Spieler hat vollständige Information, also $q^i = \mathrm{id}_{X_i} : X_i \to X_i$.

Daraus folgt die Strategiemenge $S^i = \{\ s^i : \{0,1\}^i \to \{0,1\}\ \}$.

Generationenmodell zur Nachhaltigkeit

(2) Zum Vergleich die Formalisierung als probabilistisches Spiel:



Der Baum ist $X = \{01,11\}^\infty \sqcup (\{01,11\}^{<\infty} * \{00,10\}) \subset \{0,1\}^{\leq\infty}$.

Für $i \in \mathbb{N}$ und $x \in X_{2i}$ gilt $A_x \cong A_x^i = \{0,1\}$, also $A_x^j = \{*\}$ für $j \neq i$.

Für $x \in X_{2i+1}$ wird unabhängig gezogen aus $\Omega_x = \{0,1\}$ mit $\mathbf{P}_x(1) = p_i$.

Auf terminalen Zuständen haben wir die obige Auszahlung $u^i : \partial X \to \mathbb{R}$.

Jeder Spieler hat vollständige Information, also $q^i = \mathrm{id}_{X_i} : X_i \to X_i$.

Daraus folgt die Strategiemenge $S^i \cong \{\ s^i : \{0,1\}^i \to \{0,1\}\ \}$.

Generationenmodell zur Nachhaltigkeit

Der Strategievektor $s \in S$ definiert die Aktionen $a_i = s^i(a_0, a_1, \dots, a_{i-1})$.

Zusammen mit $\omega \in \Omega$ folgt der gesamte Spielverlauf $x \in \partial X$.

Die erwartete Auszahlung ist $u : S \to \mathbb{R}^I$ ist wie zuvor $u^0 = b_0 a_0 - p_0 c_0 a_1$ und $u^i = -b_i a_i - p_i c_i a_{i+1} - d_i a_0$.

♦ Satz C4B (Nash–Gleichgewichte im Nachhaltigkeitsmodell)

Die Generationen $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ interagieren wie gezeigt.

(0) Raubbau $s_0 = 1$ und Schweigen $s_i = 0$ für alle $i \geq 1$ bilden ein teilspielperfektes Gleichgewicht dieses Spiels.

(1) Gilt $p_n c_n < b_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so ist $a_n = 0$ strikt dominant für G_n, und per Rückwärtsinduktion folgt $a_i = 0$ für $i = 1, \dots, n$ und $a_0 = 1$.

(2) Gilt $p_i c_i > b_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$, dann bilden nachhaltiges Verhalten und strenge Kontrolle ein teilspielperfektes Gleichgewicht, ausgeschrieben:

$$s^i \ : \ \{0,1\}^i \to \{0,1\} \ : \ (a_0, \dots, a_{i-1}) \mapsto a_0 + \dots + a_{i-1} \bmod 2$$

Hintereinanderausführung (Klausur 2018)

Aufgabe: Seien Γ_1 und Γ_2 (normale oder extensive) endliche Spiele mit vollständiger Information und $\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2$ ihre Hintereinanderhängung.

(1) Folgt aus $\sharp\,\mathrm{SPE}(\Gamma_1) = n$ und $\sharp\,\mathrm{SPE}(\Gamma_2) = 1$ immer $\sharp\,\mathrm{SPE}(\Gamma) = n$?

(2) Folgt aus $\sharp\,\mathrm{SPE}(\Gamma_1) = 1$ und $\sharp\,\mathrm{SPE}(\Gamma_2) = n$ immer $\sharp\,\mathrm{SPE}(\Gamma) = n$?

(3) Wie hängen $\mathrm{SPE}(\Gamma_1 * \Gamma_2)$ und $\mathrm{SPE}(\Gamma_1) * \mathrm{SPE}(\Gamma_2)$ zusammen?

Lösung: (1) Ja. Das folgt sofort aus dem Satz von Zermelo (E2D): Rückwärtsinduktion findet alle Gleichgewichte, die n offensichtlichen.

(2) Nein. Sie kennen bereits einige konkrete Gegenbeispiele. Die nächste Aufgabe fragt nach einer minimalen Konstruktion.

(3) Wir erinnern an Satz F1C: Allgemein gilt

$$\mathrm{SPE}(\Gamma_1 * \Gamma_2 * \dots * \Gamma_N) \supseteq \mathrm{SPE}(\Gamma_1) * \mathrm{SPE}(\Gamma_2) * \dots * \mathrm{SPE}(\Gamma_N).$$

Haben $\Gamma_2, \dots, \Gamma_N$ jeweils nur ein teilspielperfektes Gleichgewicht, so gilt Gleichheit. Andernfalls kann die Inklusion „$\supset$“ strikt sein.

Hintereinanderausführung und Gleichgewichte

Aufgabe: (1) Konstruieren Sie Spiele $g_1, g_2 : \{0,1\}^2 \to \{0,1,2,3\}^2$ mit $\mathrm{NE}(g_1) = \{00\}$ und $\mathrm{NE}(g_2) = \{00, 11\}$, aber $\sharp\,\mathrm{SPE}(g_1 * g_2) \ge 3$.

(2) Zeichnen Sie den Spielbaum $\Gamma = g_1 * g_2$ mit allen Informationen.

(3) Bestimmen Sie explizit die Menge $\mathrm{SPE}(\Gamma)$ aller Gleichgewichte. Welche Auszahlungen können teilspielperfekt erreicht werden?

(4) Welchen Auszahlungzuwachs können Sie maximal erzielen im Vergleich von $\mathrm{SPE}(g_1 * g_2)$ und $\mathrm{NE}(g_1) * \mathrm{NE}(g_2)$?

Lösung: (1) Hier ist ein einfach gebautes Beispiel:

$g_1 =$

A \ B	0	1
0	1 \ 1	3 \ 0
1	0 \ 3	2 \ 2

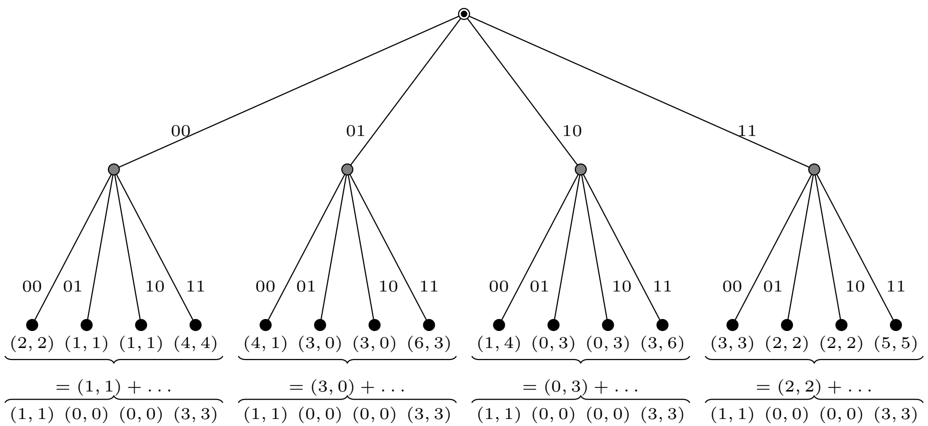
$g_2 =$

A \ B	0	1
0	1 \ 1	0 \ 0
1	0 \ 0	3 \ 3

Hier hat g_1 nur das Gleichgewicht 00 wie das Gefangenendilemma, g_2 hat 00 und 11 (und ein gemischtes) wie Bach-oder-Strawinsky.

Hintereinanderausführung und Gleichgewichte

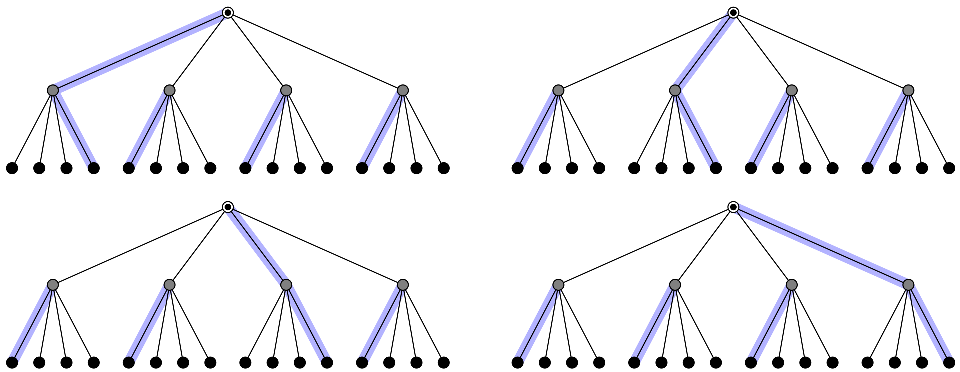
(2) Der Spielbaum $\Gamma = g_1 * g_2$ sieht wie folgt aus:



Dank $\mathrm{NE}(g_1) * \mathrm{NE}(g_2) \subset \mathrm{SPE}(\Gamma)$ hat der Spielbaum zwei offensichtliche Gleichgewichte: 00 in der ersten Stufe gefolgt von immer 00 oder immer 11 in der zweiten Stufe. Die zugehörige Auszahlung ist $(2,2)$ bzw. $(4,4)$.

Hintereinanderausführung und Gleichgewichte

(3) Wir konstruieren alle Gleichgewichte durch Rückwärtsinduktion E2D: In der zweiten Stufe gibt es $2^4 = 16$ Gleichgewichte. In der ersten Stufe wählen Alice und Bob hieraus aus: Gleichgewichtsauszahlungen sind neben $(2,2)$ und $(4,4)$ nun zusätzlich $(6,3)$ und $(3,6)$ sowie $(5,5)$. Hierzu nutzen wir die folgenden teilspielperfekten Gleichgewichte:



Gibt es weitere Gleichgewichte? weitere Gleichgewichtsauszahlungen? mit gemischten Gleichgewichten? Führen Sie dies zur Übung aus!

Die Strategie *Ewige Harmonie* (Klausur 2018)

Sei Γ die unendliche Wiederholung des Stufenspiels $g:\{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$:

A \ B	0	1
0	A: 0, B: 0	A: α, B: β
1	A: β, B: α	A: 1, B: 1

mit Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 \le \delta < 1$ und der diskontierten Auszahlung

$$u \,:\, \{00, 01, 10, 11\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^2,$$

$$u(x) = (1-\delta)\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n g(x_n)$$

Wir untersuchen, ob das folgende Strategiepaar $s = (s_A, s_B)$ ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist, kurz $s \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$.

Die Strategien s_A, s_B sind wie folgt definiert: Im ersten Zug spiele 1. Haben im letzten Zug beide dasselbe gespielt, spiele 1; andernfalls 0.

Die Strategie *Ewige Harmonie* (Klausur 2018)

Aufgabe: (1) Gilt für Γ das Prinzip der einmaligen Abweichung?

(2) Formulieren Sie s_A und s_B explizit als Funktion des Zustands x.

(3) Unter welchen Bedingungen ist $s = (s_A, s_B)$ teilspielperfekt?

(4) Wir betrachten die Parameter $(\alpha, \beta) = (3/2, -1)$ und $\delta = 0.99$.
(a) Bestimmen Sie alle Nash–Gleichgewichte $\mathrm{NE}(\bar{g})$ des Spiels $\bar{g}$.
(b) Welche Gesamtauszahlung $u_1 + u_2$ ist maximal erreichbar mit einem teilspielperfekten Gleichgewicht $s \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$? Nennen Sie explizit ein maximierendes Gleichgewicht.

(5) Dieselben Fragen (a,b) für $(\alpha, \beta) = (4, -1)$ und $\delta = 0.99$.

Lösung: (1) Das Prinzip der einmaligen Abweichung ist anwendbar, denn die Auszahlungen $u(x) \in \mathbb{R}^2$ sind stetig in $x \in \{00, 01, 10, 11\}^{\mathbb{N}}$.

(2) Wir definieren $s_A = s_B : \{00, 01, 10, 11\}^{n-1} \to \{0,1\}$ durch $\emptyset \mapsto 1$ sowie $\dots 00 \mapsto 1$ und $\dots 11 \mapsto 1$ sowie $\dots 01 \mapsto 0$ und $\dots 10 \mapsto 0$.

Die Strategie *Ewige Harmonie* (Klausur 2018)

(3) Wir nutzen das Prinzip der einmaligen Abweichung.

(3a) Für die Vorgeschichte $\emptyset$ oder $\dots 00$ oder $\dots 11$ gilt für Alice / Bob:
Fortsetzung $11\ 11\ 11\ 11\ \dots$ $\quad u_1 = \mathrm{const} + \delta^n(1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots)$
Abweichung $01\ 00\ 11\ 11\ \dots$ $\quad u_1 = \mathrm{const} + \delta^n(\alpha + 0 + \delta^2 + \delta^3 + \dots)$
Wir finden so die notwendige Bedingung $1 + \delta \ge \alpha$.

(3b) Für die Vorgeschichte $\dots 01$ oder $\dots 10$ gilt für Alice / Bob:
Fortsetzung $00\ 11\ 11\ 11\ \dots$ $\quad u_1 = \mathrm{const} + \delta^n(0 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots)$
Abweichung $10\ 00\ 11\ 11\ \dots$ $\quad u_1 = \mathrm{const} + \delta^n(\beta + 0 + \delta^2 + \delta^3 + \dots)$
Wir finden so die notwendige Bedingung $\delta \ge \beta$.

Jede dieser Ungleichungen $1 + \delta \ge \alpha$ und $\delta \ge \beta$ ist notwendig, damit Abweichungen nicht belohnt, sondern bestraft werden. Gemeinsam sind beide Ungleichungen hinreichend für $s \in \mathrm{SPE}$.

🙂 Glücklicherweise haben wir präzise Notation und effiziente Technik: Das Prinzip der einmaligen Abweichung vereinfacht die Analyse wie immer enorm! Damit wird die Diskussion aller Fälle ein Kinderspiel.

Die Strategie *Ewige Harmonie* (Klausur 2018)

(4a) Die Strategie 0 dominiert 1 strikt. Dies gilt sowohl für Alice als auch für Bob sobald $\alpha > 1$ und $\beta < 0$. Damnach gilt $\mathrm{NE}(\bar{g}) = \{00\}$.

(4b) Das obige Strategiepaar (s_A, s_B) ist teilspielperfekt und erreicht die Gesamtauszahlung $2/(1-\delta) = 200$. Wegen $1 + 1 > \alpha + \beta > 0 + 0$ ist dies maximal in jeder Runde, somit auch insgesamt.

(5a) Die Strategie 0 dominiert 1 strikt, wie zuvor, also $\mathrm{NE}(\bar{g}) = \{00\}$.

🙁 Unser oben untersuchtes Strategiepaar *Ewige Harmonie* (s_A, s_B) ist nun nicht mehr teilspielperfekt, denn kurzfristige Gewinnmitnahme wird nur eine Runde lang bestraft und ist somit insgesamt lukrativ.

(5b) Es wird abwechselnd 01 und 10 gespielt mit Gesamtauszahlung $(\alpha + \beta)/(1-\delta) = 300$. Wegen $\alpha + \beta > 1 + 1 > 0 + 0$ ist dies maximal. Als teilspielperfektes Gleichgewicht wird dies realisiert, indem jede Abweichung durch ewige Verdammnis $00\,00\,00\ \dots$ bestraft wird, also durch Rückfall auf das Nash–Gleichgewicht $00 \in \mathrm{NE}(\bar{g})$.

🙂 Das ist die vertraute Grim-Trigger-Strategie

$$(s'_A, s'_B) = \mathrm{Grim}(01\,10\,01\,10\,01\,10\ \dots, 00\,00\,00\,00\,00\,00\ \dots)$$

Kapitel G

Verhandlungstheorie und Nashs Verhandlungslösung

HARRY: *Haggle properly. This isn't worth nineteen.*
BRIAN: *Well, you just said it was worth twenty.*
HARRY: *Oh, dear. Oh, dear. Come on. Haggle!*
BRIAN: *Huh. All right. I'll give you ten.*
HARRY: *That's more like it.*
Ten?! Are you trying to insult me?!
Me, with a poor dying grandmother?! Ten?!
Monty Python, *Life of Brian* (1979)

Inhalt dieses Kapitels

Motivation und Überblick

In diesem Kapitel untersuchen wir allgemein Verhandlungssituationen, in denen zwei (oder mehr) Spieler über mögliche Ausgänge feilschen. Die Spieler wollen ein gemeinsames Ergebnis vereinbaren, etwa um darauf bauend das weitere gemeinsame Vorgehen zu koordinieren.

Jeder will sein Ergebnis maximieren. Je härter er verhandelt, umso mehr wird er vermutlich bekommen, es sei denn, die Verhandlungen scheitern, und er muss seine Drohungen ausführen, auch wenn sie nachteilig sind.

Die Erfahrung zeigt, dass selbst rationale Spieler, die eine Einigung erzielen können und wollen, dies gelegentlich nicht erreichen. Dieses ganz praktische und alltägliche Problem wollen wir lösen.

Um ein drohendes Scheitern und allseitigen Schaden zu vermeiden, sind Spieler oft bereit, ihren Konflikt einem Schlichter zu übergeben, einem unabhängigen Schiedsgericht, das den Konflikt lösen soll.

Der Schlichter schlägt für jedes Verhandlungsproblem eine Lösung vor. Die Lösungen sollen „fair“ und „nachvollziehbar“ sein, und der Schlichter „konsistent“. Um diese grundlegenden Forderungen geht es hier.

Motivation und Überblick

Verhandlungstheorie (engl. *bargaining theory*) beginnt mit der Arbeit von John Nash: *The Bargaining Problem*, Econometrica 18 (1950) 155–162. In diesem Artikel formulierte er das Verhandlungsproblem, seine Axiome und seine Verhandlungslösung. Diese diskutieren wir in diesem Kapitel.

Dieser axiomatisch / kooperative Ansatz lässt sich strategisch / nicht-kooperativ implementieren. Dieser Ansatz geht zurück auf F. Zeuthen: *Problems of Monopoly and Economic Warfare* (1930), K.G. Binmore: *Nash Bargaining Theory* (1987) und vor allem die (nach Nash zweite bahnbrechende) Arbeit von A. Rubinstein: *Perfect Equilibrium in a Bargaining Model*, Econometrica 50 (1982) 97–110.

Die prozedurale Sichtweise ergänzt die axiomatische, sie beteiligt die Spieler aktiv und erweitert die Möglichkeiten damit wesentlich. Dieses Modell gilt als realistische Wiedergabe echter Verhandlungen.

Inzwischen existiert eine reichhaltige Literatur zur Verhandlungstheorie, sowohl axiomatisch als auch implementativ. Anwendungen sind vielfältig. Ökonomen nutzen routiniert die grundlegenden Begriffe und Werkzeuge und wenden regelmäßig konkrete Implementierungen an.

Worum geht es bei Verhandlungen?

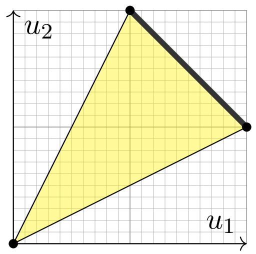
Verhandlungsproblem (zunächst informell)

Allgemein entsteht ein **Verhandlungsproblem** in folgender Situation: Zwei (oder mehr) Spieler haben gemeinsames Interesse zu kooperieren, aber konkurrierende Interessen, wie genau sie kooperieren wollen.

Beispiel: Ein Objekt ver/kaufen und dazu einen Preis aushandeln. Bei unvollständiger Information ist dies knifflig, siehe Auktionen.

Beispiel: Gemeinsam agieren, etwa in einem vorgegebenen Spiel. Idealerweise liegen alle Informationen vor. Klassisches Beispiel:

A \ B	0	1
0	$1,\ 2$	$0,\ 0$
1	$0,\ 0$	$2,\ 1$



Worum geht es bei Verhandlungen?

Beispiel: Alice möchte ihr Haus verkaufen für mindestens 300 000€. Bob möchte das Haus kaufen und kann höchstens 400 000€ zahlen. Die beiden können und wollen sich einigen, aber auf welchen Preis?

Eine Einigung ist möglich. Den tatsächlichen Preis müssen sie jedoch aushandeln. Beide haben Interesse an einer Einigung, doch Alice will möglichst viel bekommen, Bob will möglichst wenig bezahlen.

Ein simpler Vorschlag wäre 350 000€. Die Schlichtung wird hier jedoch erschwert, da die Spieler ihre Information nicht offenlegen wollen.

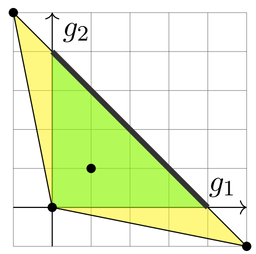
Beispiel: Verhandlungsprobleme sind uns bereits mehrfach begegnet, wenn ein Spiel mehrere Gleichgewichte hat, wie *Bach oder Strawinsky*, und sich die Spieler auf eines verständigen wollen. Wenn sie vor dem Spiel kommunizieren können, so haben beide starkes Interesse an einer Einigung, aber welche? Spiel und Auszahlungen sind hier symmetrisch.

Durch Lotterien lassen sich alle Konvexkombinationen realisieren. Dies entspricht korrelierten Strategien, die wir überall gerne nutzen. Welche dieser Möglichkeiten sollte ein Schlichter vorschlagen?

Worum geht es bei Verhandlungen?

Wir iterieren unendlich oft das folgende Spiel $g : \{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$:

A \ B	0	1
0	$0,\ 0$	$5,\ -1$
1	$-1,\ 5$	$1,\ 1$



Beispiel: Die beiden Spieler wollen sich auf eine Auszahlung einigen. Welche Auszahlungen $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ sind teilspielperfekt realisierbar? Hierüber gibt Nashs Folk Theorem F2E recht detaillierte Auskunft. Welche soll angesteuert werden? Das muss ausgehandelt werden!

Das Nash–Gleichgewicht $z = (0,0)$ ist möglich aber wenig lukrativ. Es dient als Notlösung bei eventuellem Scheitern der Verhandlungen. Diesen Punkt nennen wir den **Ausgangspunkt** oder **Drohpunkt**, auf englisch *default value* oder *disagreement outcome*.

Worum geht es bei Verhandlungen?

Wir fassen Mut und vollziehen nun den kühnen Schritt der Abstraktion: Wir konzentrieren uns fortan auf die Auszahlungen und abstrahieren von den dahinter liegenden Strategien, die zu diesen Auszahlungen führen. (Diese werden nach erfolgreicher Verhandlung wieder eingesetzt.)

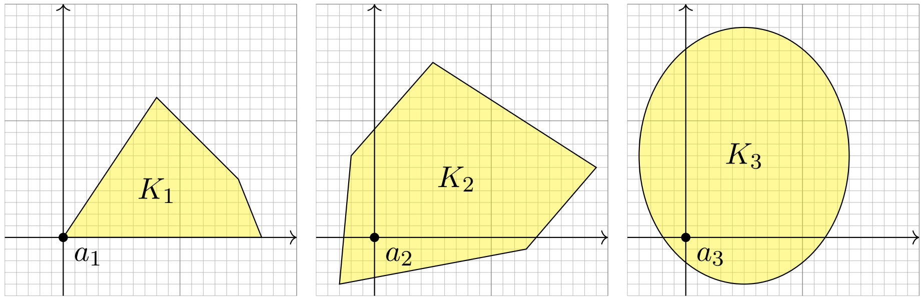
Abstraktion bedeutet Vereinfachung! Möglicherweise übersehen wir dabei jedoch wesentliche Informationen. Die Nützlichkeit wird sich erst anschließend in den Anwendungen auf praktische Beispiele erweisen.

Den Ausgangspunkt a oder Drohpunkt können die Spieler jederzeit ohne Koordinierung sichern, also auch ohne Einigung in den Verhandlungen, im Gefangenendilemma etwa das Nash–Gleichgewicht $g(0,0) = (0,0)$.

Verhandelt wird ab jetzt also nur noch über die Punkte $(x_1, x_2) \in K_{\geq a}$. Damit bringen wir das Problem in eine einfache doch präzise Form. Sie ist zudem sehr übersichtlich und geometrisch zugänglich.

Wir erheben unsere Beobachtungen nun zu einer formalen Definition. Was muss ein Schlichter oder ein Schiedsgericht wissen (Eingabe), und wie werden diese Daten rational verarbeitet (Ausgabe)?

Was sind Verhandlungsprobleme und -lösungen?



Definition G1A (Verhandlungsproblem und -lösung)

Ein **Verhandlungsproblem** (K,a) für zwei Personen besteht aus einer konvexen kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^2$ und einem Punkt $a \in K$.

Die Menge der **nicht-trivialen Verhandlungsprobleme** ist

$$V^2 := \left\{\, (K,a) \;\middle|\; a \in K \subset \mathbb{R}^2 \text{ mit } K \text{ konvex kompakt, } \exists v \in K : a < v \,\right\}.$$

Eine allgemeine **Verhandlungslösung** ist eine Abbildung

$$F \,:\, V^2 \to \mathbb{R}^2 \,:\, (K,a) \mapsto u = F(K,a).$$

Was sind Verhandlungsprobleme und -lösungen?

Wir suchen und analysieren im Folgenden solche Funktionen F. Sie heißen auch **Schlichtungsverfahren**, engl. *arbitration scheme*.

Diese genial einfache Definition ist ein Musterbeispiel an Abstraktion. Viele Erfahrungen und Annahmen werden knapp zusammengefasst:

- Der Nutzen lässt sich vollständig durch reelle Zahlen darstellen. Diese bequeme Annahme unterstellen wir auch sonst meistens.
- Die Spieler können den Drohpunkt a ohne Koordinierung sichern. Er dient daher als Notlösung beim Scheitern der Verhandlungen.
- Die Menge $K \subset \mathbb{R}^2$ möglicher Ausgänge ist vollständig bekannt. Dies schließt Verhandlungen mit unvollständiger Information aus.
- Die Menge K ist konvex, da die Spieler Lotterien bilden können: Die Ziehung aus einem Lostopf entspricht einer Konvexkombination.

Die Menge K ist kompakt: Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ ist das äquivalent zu beschränkt und abgeschlossen. Beschränktheit leuchtet sofort ein: Der zu verteilende Kuchen ist endlich. Abgeschlossenheit nutzen wir zur Vereinfachung: Wir nehmen alle Grenzwerte als Idealisierung mit hinzu.

Was sind Verhandlungsprobleme und -lösungen?

Für reelle Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ definieren wir den Vergleich durch

$$\begin{aligned}
x = y \quad &:\Longleftrightarrow \quad x_i = y_i \quad \text{für alle } i = 1,\dots,n,\\
x \le y \quad &:\Longleftrightarrow \quad x_i \le y_i \quad \text{für alle } i = 1,\dots,n,\\
x < y \quad &:\Longleftrightarrow \quad x_i < y_i \quad \text{für alle } i = 1,\dots,n.
\end{aligned}$$

Die Relation $\le$ auf $\mathbb{R}^n$ ist reflexiv ($x \le x$), antisymmetrisch (aus $x \le y$ und $y \le x$ folgt $x = y$) und transitiv (aus $x \le y$ und $y \le z$ folgt $x \le z$). Dies nennen wir eine **Ordnungsrelation**. Für $n \ge 2$ ist sie jedoch nicht total (linear), zum Beispiel gilt weder $(1,0) \le (0,1)$ noch $(0,1) \le (1,0)$.

Zur Bequemlichkeit definieren wir, wie für Ordnungsrelationen üblich, die transponierten Relationen $x \ge y$ durch $y \le x$ und $x > y$ durch $y < x$.

Beispiel: Sind $x, y \in \mathbb{R}^I$ Auszahlungen für die Spieler $i \in I$, dann bedeutet $x \le y$ koordinatenweisen Vergleich: Beim Übergang von x nach y steht jeder Spieler gleich gut oder besser. Strikte Ungleichung $x < y$ bedeutet, jeder Spieler $i \in I$ verbessert sich strikt.

Was sind Verhandlungsprobleme und -lösungen?

Eine **geordnete Menge** $(M, \le)$ ist ein Paar aus einer Menge M und einer Ordnungsrelation $\le$ auf M (reflexiv, antisymmetrisch, transitiv).

Ist $(M, \le)$ eine geordnete Menge, dann wird jede Teilmenge $X \subseteq M$ geordnet durch die Einschränkung der Ordnungsrelation $\le$ auf X.

Für eine Teilmenge $X \subseteq M$ und $a \in M$ schreiben wir $X \le a$, falls $x \le a$ für alle $x \in X$ gilt, entsprechend $X < a$, $X \ge a$ und $X > a$.

Wir schreiben $X_{\ge a} = \{\, x \in X \mid x \ge a \,\}$ und $X_{>a} = \{\, x \in X \mid x > a \,\}$ sowie $X_{\le a} = \{\, x \in X \mid x \le a \,\}$ und $X_{<a} = \{\, x \in X \mid x < a \,\}$.

Wir nennen $m \in M$ ein **größtes Element** von $(M, \le)$, wenn $M \le m$: Für alle $x \in M$ gilt $x \le m$. Es gibt höchstens eines: Sind $m, m' \in M$ größte Elemente, so haben wir $m \le m'$ und $m' \le m$, also $m = m'$.

Wir nennen $m \in M$ ein **maximales Element** von $(M, \le)$, wenn gilt: Für alle $x \in M$ mit $m \le x$ gilt $m = x$. Wir schreiben $\operatorname{Max}(M, \le)$ für die Menge aller maximalen Elemente. Eine geordnete Menge $(M, \le)$ kann kein, ein oder mehrere maximale Elemente haben. Als Beispiele betrachten Sie die obigen Mengen $K \subset \mathbb{R}^2$.

Beispiele für Verhandlungslösungen

Viele Abbildungen $F : V^2 \to \mathbb{R}^2 : (K, a) \mapsto u$ sind denkbar.

Triviale Lösung: Wähle den Ausgangspunkt $F(K, a) = a$.

Lexikographische Lösungen: Vorgelegt sei $(K, a) \in V^2$.
(1) Wähle $u_1 = \max \mathrm{pr}_1 K_{\ge a}$ und hierzu $(u_1, u_2) \in K$ mit u_2 maximal.
(2) Wähle $u_2 = \max \mathrm{pr}_2 K_{\ge a}$ und hierzu $(u_1, u_2) \in K$ mit u_2 maximal.

Produkt-Maximierer: Sei $u \in K_{\ge a}$ der Maximierer der Funktion $h(x_1, x_2) \mapsto (x_1 - a_1)^{p_1}(x_2 - a_2)^{p_2}$ mit $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ und $p_1 + p_2 = 2$.

Halbierung: Sei $u = a + \lambda z \in K$ mit $z = (1, 1)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ maximal.

Gewichtete Lösung: Ebenso mit $z_i = \int_{K_{\ge a}} (x_i - a_i)^{p_i} \,\mathrm{d}(x_1, x_2)$.
Hierzu sei $\mathrm{vol}_2(K_{\ge a}) > 0$, also $z > 0$, andernfalls ist K eindimensional.

Monotone Lösung nach Kalai–Smorodinsky (G1G): Sei $(K, a) \mapsto u$ der maximale Punkt der Strecke $K \cap [(a_1, a_2), (z_1, z_2)]$ mit $z_i = \max \mathrm{pr}_i K_{\ge a}$.

Beispiele für Verhandlungslösungen

Geizige Lösung: Vorgelegt sei $(K, a) \in V^2$.
(1) Wähle $u = (u_1, a_2) \in K$ mit u_1 maximal. (Hier ist $u_2 = a_2$.)
(2) Wähle $u = (a_1, u_2) \in K$ mit u_2 maximal. (Hier ist $u_1 = a_1$.)

Kreis–Lösung: Es existiert genau ein Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass die Kreisscheibe $D_r = \bar{B}((a_1 + r, a_2 + r), r)$ das konvexe Kompaktum K berührt. Sei u der eindeutige Berührpunkt, also $K \cap B_r = \{u\}$.

Stoll–Lösung: Betrachte $(m_1, a_2) \in K$ mit m_1 maximal. Die Punkte (m_1, a_2) und (a_1, m_2) mit $m_2 > a_2$ definieren eine Gerade; sei $H(m_2)$ der Halbraum, der a enthält. Liegt (K, a) in einem Halbraum $H(m_2)$, für m_2 hinreichend groß, so wähle die lexikographische (hier geizige) Lösung. Andernfalls wähle den Produkt-Maximierer zu Parametern (p_1, p_2).

Diese vielfältigen Lösungsverfahren sind mehr oder weniger attraktiv, aber alle noch recht einfach, und manche sogar naheliegend.
Sie dienen uns im Folgenden als (Gegen-)Beispielfundus.

Beispiele für Verhandlungslösungen

Diese Beispiele sollen zunächst einmal Ihre Phantasie anregen.
Welche Verhandlungslösungen $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ fallen Ihnen noch ein?
Welche dieser Möglichkeiten sollte ein Schlichter vorschlagen?

Denkbar wäre auch eine Auslosung bezüglich einer Dichte auf K; solche stochastischen Lösungen schließen wir hier jedoch aus.
Unsere Definition G1A verlangt eine Abbildung $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$, also ein deterministisches Verfahren, kein probabilistisches.

Alles verläuft genauso für eine beliebige Anzahl n von Spielern.
Um der Anschauung willen bleibe ich zunächst bei $n = 2$ Spielern.
Abschließend ist es eine schöne Übung, alles zu übertragen.

Zwischen diesen Lösungen bestehen interessante Beziehungen:

Aufgabe: In welchem Sinne interpoliert die gewichtete Lösung zwischen der Halbierung und der monotonen Lösung?

Aufgabe: In welchem Sinne interpoliert der Produkt-Maximierer zwischen den beiden lexikographischen Lösungen?

Beispiele für Verhandlungslösungen

Wir kennen die Problemstellung und einige (willkürliche) Lösungen.
Welche Lösungsverfahren können wir als „fair“ auszeichnen?

Wenn Sie möchten, können Sie sich die Aufgabenstellung so vorstellen:
Wir suchen zur Schlichtung einen Mechanismus (Verfahren, Automat), der zu jedem vorgelegten Verhandlungsproblem eine Lösung vorschlägt.

Dies wird in der Realität genutzt, wenn ein Schlichter angerufen wird.
Dieser soll sachkundig, auf Grundlage des Problems (K, a) und evtl. weiterer Informationen, einen Kompromissvorschlag $u \in K$ unterbreiten.

Die Schlichtung gelingt jedoch nur, wenn sie alle Parteien überzeugt.
Hierzu ist es hilfreich, wenn sie zur Begründung ihres Vorschlags auch nachvollziehbare Gründe und überzeugende Argumente anführt.

Der Schlichter schlägt für jedes Verhandlungsproblem eine Lösung vor.
Diese Lösungen sollen „fair“ sein, „nachvollziehbar“ und „konsistent“.

Nashs Axiome formulieren vier solcher nachvollziehbaren Gründe.
Sie erklären, was wir von einer fairen Verhandlungslösung erwarten.
Über die Auswahl und Festlegung dieser Axiome kann man streiten, ihre Konsequenzen jedoch folgen mit mathematischer Präzision.

Nashs Axiome

Eine „faire“ Verhandlungslösung muss bestimmte Forderungen erfüllen.

INV: Invarianz unter positiv affinen Transformationen

$$T : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) \mapsto (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \alpha_2 x_2 + \beta_2)$$

mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Dies transformiert Probleme gemäß

$$T : V^2 \xrightarrow{\sim} V^2 : (K, a) \mapsto (T(K), T(a)).$$

Für Verhandlungslösungen $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ fordern wir $F \circ T = T \circ F$.

SYM: Symmetrie. Sei $(K, a) = \tau(K, a)$ in V^2 symmetrisch bezüglich der Transposition $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ und $\tau : V^2 \to V^2$. Dann ist auch die Lösung $u = F(K, a)$ symmetrisch, also $u_1 = u_2$.

PAR: Pareto–Optimalität. Es gilt $F(K, a) \in \operatorname{Max} K_{\geq a}$.
Für jedes Problem $(K, a) \in V^2$ und seine Lösung $u = F(K, a)$ gilt $a \leq u \in K$ und u ist maximal: Für jedes $v \in K$ mit $u \leq v$ gilt $u = v$.

UIA: Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen.
Vorgelegt seien Verhandlungsprobleme $(K, a) \subseteq (L, a)$ in V^2.
Liegt die Lösung $F(L, a)$ in K, so gilt $F(K, a) = F(L, a)$.

Nashs Axiome

INV bedeutet Skaleninvarianz. Multiplikation mit positiven Konstanten ist recht plausibel: Es ist egal, ob Spieler in Euro oder in Dollar rechnen. Invarianz unter Verschiebung ist weniger klar: Ist es bei einem Streitwert von 100€ einerlei, ob der eine Millionär oder der andere Habenichts ist?

SYM: In jeder symmetrischen Problemstellung (K, a) darf die Lösung $u = F(K, a)$ keinen der beiden Spieler bevorzugen. Das ist häufig sinnvoll und wünschenswert, aber nicht immer, zum Beispiel, wenn Spieler 1 allein ist aber Spieler 2 eine große Gruppe.

PAR: Zur Erinnerung: Für Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^2$ definieren wir den Vergleich $u \leq v$ komponentenweise durch $u_1 \leq v_1$ und $u_2 \leq v_2$.

UIA: Wenn neue Alternativen hinzukommen, dann ist die neue Lösung eine der neuen Alternativen oder unverändert die alte Lösung.

SYM und PAR schränken die Lösung einzelner Probleme ein,
INV und UIA fordern Konsistenz zwischen den Problemen.
Der Drohpunkt wird nur in PAR wirklich aktiv genutzt.

Über Axiome kann man streiten. Eine ausführliche kritische Diskussion finden Sie bei R.D. Luce, H. Raiffa: *Games and Decisions*, Dover 1989.

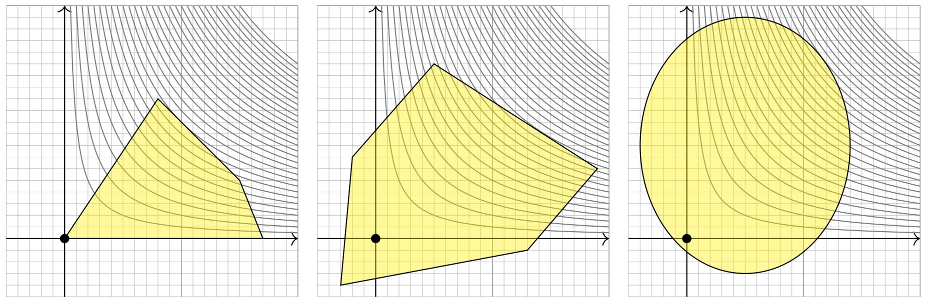
Nashs Verhandlungslösung

Es ist wie so oft in der Mathematik und allgemein im Leben: Axiome sind Annahmen, Forderungen, Wünsche, Sehnsüchte. Nicht immer lassen sie sich erfüllen. Selbst wenn sie erfüllbar sind, so nicht immer eindeutig. Nachdem Existenz und Eindeutigkeit geklärt sind, wollen wir die Lösung tatsächlich finden / berechnen / approximieren, dies möglichst effizient.

Denken Sie als leuchtende Beispiele aus dem ersten Studienjahr an die Determinante quadratischer Matrizen (axiomatische Definition, Leibniz–Formel, Gauß–Algorithmus, Numerik) oder an gewöhnliche Differentialgleichungen (Definition, Satz von Picard–Lindelöf, exakte Lösungen, Numerik). Existenz und Eindeutigkeit sind grundlegend, um überhaupt von „der“ gesuchten Lösung sprechen zu können, in beiden genannten Beispielen erhalten wir zugleich einen ersten Algorithmus, den wir anschließend noch effizienter gestalten (wollen und müssen).

Als Kontrast: Für das Tensorprodukt $M \otimes_R N$ von R–Moduln zeigen wir Existenz und Eindeutigkeit durch abstrakten Nonsense, knapp & elegant, ohne hilfreichen Algorithmus. Die konkrete Berechnung muss je nach Spezialfall gesondert betrieben werden, angefangen bei freien Moduln.

Nashs Verhandlungslösung



Satz G1B (Verhandlungslösung, Nash 1950)

Existenz & Eindeutigkeit: *Es gibt genau eine Verhandlungslösung $N : V^2 \to \mathbb{R}^2$, die Nashs Axiome erfüllt: Invarianz, Pareto–Optimalität, Symmetrie und Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen.*

Berechnung: *Zum Verhandlungsproblem $(K, a) \in V^2$ ist die Lösung $N(K, a) = \arg\max h_{(K,a)}$ gegeben durch den Maximierer der Funktion*

$$h = h_{(K,a)} : K_{\geq a} \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - a_1)(x_2 - a_2).$$

*Diese Abbildung $N : V^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt **Nash–Verhandlungslösung**.*

Nashs Verhandlungslösung

Dieser Satz wirkt erstaunlich, zuerst geradezu unglaublich. Ist er wahr? Das ist eine schöne Übung in mathematischer Sorgfalt und Scharfsinn. Nur so lernen Sie axiomatische Verhandlungstheorie wirklich verstehen.

Aufgabe: Beweisen Sie diesen Satz!

Lösung: (1) Die Existenz folgt aus der angegebenen Konstruktion:

(1a) Zu jedem $(K,a) \in V^2$ existiert genau ein Maximierer $u \in K_{\ge a}$, also $(u_1-a_1)(u_2-a_2) \ge (x_1-a_1)(x_2-a_2)$ für alle $(x_1,x_2) \in K_{\ge a}$.
Da $K_{\ge a}$ kompakt ist und h stetig, existiert ein Maximierer $u \in K_{\ge a}$.
Es gibt $v \in K_{>a}$, also gilt $h(u) \ge h(v) > h(a) = 0$ und somit $u > a$.
Nach positiv affiner Transformation dürfen wir $a=(0,0)$ und $u=(1,1)$ annehmen. Dank Konvexität von K ist u der einzige Maximierer.
Angenommen ein weiterer Punkt $u' \in K \smallsetminus \{u\}$ erfüllte $h(u') = h(u)$.
Da K konvex ist, gälte dann $\bar u = \frac{1}{2}(u+u') \in K$ und $h(\bar u) > h(u)$.

(1b) Die Lösung $N : V^2 \to \mathbb{R}^2 : (K,a) \mapsto \arg\max h_{(K,a)}$ ist wohldefiniert und erfüllt alle vier Nash–Axiome: INV, SYM, PAR, UIA. Nachrechnen!

Nashs Verhandlungslösung

Zur Vollständigkeit rechnen wir die ersehnten Eigenschaften gleich nach.

INV: Gegeben sei $T : (x_1,x_2) \mapsto (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \alpha_2 x_2 + \beta_2)$ mit $\alpha_1, \alpha_2 > 0$.
Für $T : (K,a) \xrightarrow{\sim} (K',a') : x \mapsto x' = Tx$ gilt $h_{(K',a')}(x') = \alpha_1\alpha_2 h_{(K,a)}(x)$.
Somit stiftet T eine Bijektion zwischen den Maximierern u von $h_{(K,a)}$ und den Maximierern u' von $h_{(K',a')}$. Dank Eindeutigkeit gilt $N \circ T = T \circ N$.

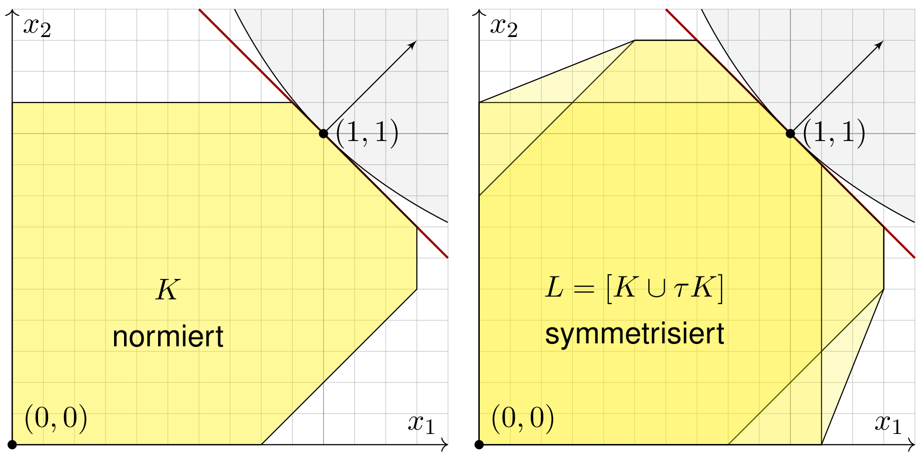
SYM: Im symmetrischen Fall $\tau : (K,a) \xrightarrow{\sim} (K,a)$ gilt $h_{(K,a)} \circ \tau = h_{(K,a)}$.
Somit stiftet τ eine Permutation auf der Menge aller Maximierer.
Dank Eindeutigkeit des Maximierers u gilt $\tau u = u$, also $u_1 = u_2$.

PAR: Wir setzen das Problem als nicht-trivial voraus. Jeder Maximierer u von $h_{(K,a)}$ erfüllt dann $a < u$, also $a_1 < u_1$ und $a_2 < u_2$. Für $u \le v \in K$ gilt $a_1 < u_1 \le v_1$ und $a_2 < u_2 \le v_2$. Gälte $v \ne u$, so wäre $h(v) > h(u)$.

UIA: Gegeben sei $(K,a) \subseteq (L,a)$ in V^2. Die Lösung $N(L,a) = u$ erfüllt $(u_1-a_1)(u_2-a_2) = \max h_{(L,a)} \ge \max h_{(K,a)}$. Gilt zudem $u \in K$, so gilt $(u_1-a_1)(u_2-a_2) = \max h_{(K,a)}$, also $N(K,a) = u$ dank Eindeutigkeit.

Nashs Verhandlungslösung

Eindeutigkeit $F(K,a) = N(K,a)$ als Beweis in Bildern:



Das vorgelegte Problem $(K,a) \in V^2$ normieren wir zu $a = (0,0)$ und $N(K,a) = (1,1)$. Anschließend symmetrisieren wir $(K,0)$ zu $(L,0)$. Für $(L,0)$ ist die Lösung $F(L,0) = (1,1)$, also auch für $(K,0)$.

Nashs Verhandlungslösung

(2) Zur Eindeutigkeit sei neben N auch $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung, die alle vier Nash–Axiome erfüllt. Wir wollen $F = N$ beweisen.
Sei $(K,a) \in V^2$ ein Problem. Wir zeigen $F(K,a) = N(K,a)$.

Es gilt $(K_{\ge a}, a) \subseteq (K,a)$. Dank PAR und UIA dürfen wir „=“ annehmen.
Dank INV dürfen wir $a = (0,0)$ annehmen, zudem auch $N(K,a) = (1,1)$.
Damit liegt $(K,0) \subseteq (\Delta,0)$ im Dreieck $\Delta := \{\, x \in \mathbb{R}^2_{\ge 0} \mid x_1 + x_2 \le 2 \,\}$ dank des Gradienten $\operatorname{grad} h(1,1) = (1,1)$ und der Konvexität von K.
Dank SYM und PAR gilt $F(\Delta,0) = (1,1)$, dank UIA $F(K,0) = (1,1)$.

Allein mit Hilfe der Axiome INV, SYM, PAR und UIA können wir somit für jedes vorgelegte Problem $(K,a) \in V^2$ den Punkt $F(K,a)$ bestimmen. Wir finden jeweils $F(K,a) = N(K,a)$. Dies beweist $F = N$.

Variante: Das Dreieck Δ ist die maximale Wahl, die Symmetrisierung $L := [K \cup \tau K] \subseteq \Delta$ ist minimal. Der Beweis verläuft wörtlich genauso: L ist konvex, kompakt, symmetrisch und erfüllt $(K,0) \subseteq (L,0) \subseteq (\Delta,0)$.

Ist eines der Nash–Axiome überflüssig?

Wir freuen uns über den eleganten Satz und dazu den schönen Beweis. Wie immer wollen wir zurückschauen, und das Argument perfektionieren: Können wir noch Voraussetzungen weglassen? oder abschwächen?

Können wir eines der Nash–Axiome im Satz G1B weglassen? Nein!

Satz G1C (Die vier Nash–Axiome sind unabhängig.)

Zu jedem der vier Axiome INV, SYM, PAR, UIA existiert eine Lösung $F_i : V^2 \to \mathbb{R}^2$, die dieses Axiom verletzt, aber die anderen drei erfüllt.

Aufgabe: Beweisen Sie diese Aussage durch geeignete Beispiele. Hier sind neben Geometrie vor allem Phantasie und Kreativität gefragt. Das ist eine schöne Übung in mathematischer Sorgfalt und Scharfsinn. Nur so lernen Sie axiomatische Verhandlungstheorie wirklich verstehen.

Ist eines der Nash–Axiome überflüssig?

Diese Aufgabe behandeln Sie in den Übungen!

Können wir Pareto–Optimalität abschwächen?

Wir schwächen Pareto–Optimalität ab zu folgenden Forderungen:

WIR: (schwache) individuelle Rationalität. $F(K, a) \in K_{\geq a}$.

SIR: starke individuelle Rationalität. $F(K, a) \in K_{>a}$.

Satz G1D (Individuelle Rationalität genügt. Roth 1977)

(1) Es gibt genau eine Verhandlungslösung $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$, die die vier Axiome INV, SYM, SIR und UIA erfüllt, nämlich die Nash–Lösung.

(2) Genau zwei Lösungen $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ erfüllen INV, SYM, WIR und UIA: neben der Nash–Lösung N nur noch die triviale Lösung $T : (K, a) \mapsto a$.

In gewisser Weise ist Pareto–Optimalität ein übertrieben starkes Axiom, denn es eliminiert sofort die große Mehrheit der möglichen Ausgänge. Individuelle Rationalität ist hierbei wesentlich weniger einschneidend. Zusammen mit den anderen Axiomen genügt diese Abschwächung!

Aufgabe: Beweisen Sie diesen Satz nach dem Vorbild von Satz G1B. Das ist eine schöne Übung in mathematischer Sorgfalt und Scharfsinn. Nur so lernen Sie axiomatische Verhandlungstheorie wirklich verstehen.

Können wir Pareto–Optimalität abschwächen?

Lösung: Wir beweisen die allgemeinere Aussage (2).

(2a) Existenz: Neben N erfüllt auch $T : (K, a) \mapsto a$ diese Axiome.

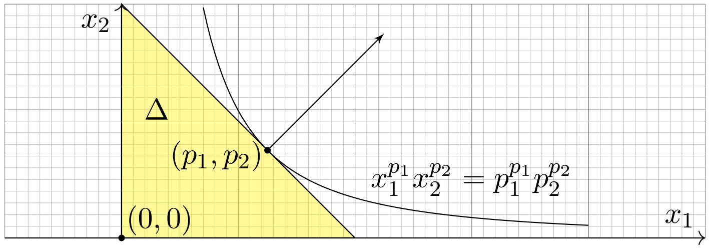
(2b) Eindeutigkeit: Angenommen irgendeine Verhandlungslösung $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ erfüllt die hier geforderten Axiome INV, SYM, WIR, UIA. Wir zeigen, dass entweder $F = T$ oder $F = N$ gilt. Sei $(K, a) \in V^2$.

Es gilt $(K_{\geq a}, a) \subseteq (K, a)$. Dank WIR und UIA dürfen wir „=“ annehmen. Dank INV dürfen wir $a = (0, 0)$ annehmen, zudem auch $N(K, a) = (1, 1)$. Damit liegt $(K, 0) \subseteq (\Delta, 0)$ im Dreieck $\Delta = \{\, x \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} \mid x_1 + x_2 \leq 2 \,\}$.

Dank SYM gilt $F(\Delta, 0) = (x, x)$ mit $0 \leq x \leq 1$. Wir zeigen $x \in \{0, 1\}$: Für $0 < x \leq 1$ haben wir $(\Delta, 0) \subseteq (x^{-1}\Delta, 0)$. Dank INV gilt dann $F(x^{-1}\Delta, 0) = x^{-1}(x, x) = (1, 1) \in \Delta$. Dank UIA folgt $F(\Delta, 0) = (1, 1)$.

Wir schließen daraus $F(\Delta, 0) = u$ mit $u = (0, 0)$ oder $u = (1, 1)$. Wegen $(0, 0), (1, 1) \in K$ und UIA folgt daraus auch $F(K, 0) = u$. Aus $F(K, 0) = (0, 0)$ folgt $F = T$. Aus $F(K, 0) = (1, 1)$ folgt $F = N$.

Asymmetrische Verhandlungslösungen



Satz G1E (asymmetrische Verhandlungslösungen)

Wir betrachten das Dreieck $\Delta := \{\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{\ge 0} \mid x_1 + x_2 \le 2 \,\}$ mit $p \in \Delta$ im Inneren der Hypotenuse, also $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $p_1 + p_2 = 2$.

Es existiert genau eine Verhandlungslösung $P : V^2 \to \mathbb{R}^2$, die die drei Axiome INV, WIR, UIA sowie $P(\Delta, 0) = p$ erfüllt.

Berechnung: $P(K, a)$ ist der eindeutige Maximierer der Produktfunktion

$$h = h^p_{(K,a)} \;:\; K_{\ge a} \to \mathbb{R} \;:\; (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - a_1)^{p_1} (x_2 - a_2)^{p_2}.$$

Symmetrisch $p_1 = p_2 = 1$ erhalten wir die Nash–Verhandlungslösung. In den Randfällen $p \in \{(2,0), (0,2)\}$ ist die Lösung nicht eindeutig.

Asymmetrische Verhandlungslösungen

Das Symmetrie–Axiom normiert Verhandlungslösungen $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ auf symmetrischen Problemen (K, a) durch $F(K, a) = a + \lambda(1, 1)$, und mit Pareto–Optimalität ist $\lambda \in \mathbb{R}$ maximal. Wir fragen allgemein: Wie sehen Verhandlungslösungen $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ aus, die INV, WIR und UIA erfüllen?

Zur Unterscheidung der Möglichkeiten werten wir F auf einem speziellen Beispiel aus, nämlich dem Dreieck $\Delta = \{\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{\ge 0} \mid x_1 + x_2 \le 2 \,\}$ mit Ausgangspunkt 0. Der Wert $F(\Delta, 0) = p$ dient uns zur Normierung. Ab hier folgen Satz und Beweis dem bewährten Muster von Satz G1B:

Aufgabe: Zeigen Sie Satz G1E nach dem Vorbild von Satz G1B, indem Sie (1) Existenz und (2) Eindeutigkeit der Lösung beweisen.

(3) Finden Sie mindestens zwei verschiedene Lösungen $F \ne G : V^2 \to \mathbb{R}^2$, die INV, WIR, UIA erfüllen sowie $(\Delta, 0) \mapsto (2, 0)$.

(4) Zeigen Sie hingegen, dass genau eine Lösung $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ die Axiome INV, PAR, UIA erfüllt sowie $(\Delta, 0) \mapsto (2, 0)$.

Hier sind neben Geometrie auch Phantasie und Kreativität gefragt. Das ist eine schöne Übung in mathematischer Sorgfalt und Scharfsinn. Nur so lernen Sie axiomatische Verhandlungstheorie wirklich verstehen.

Asymmetrische Verhandlungslösungen

Lösung: (1) Zunächst zur Existenz: Die angegebene Lösung

$$P \;:\; V^2 \to \mathbb{R}^2 \;:\; (K, a) \mapsto \arg\max h^p_{(K,a)}$$

ist wohldefiniert und erfüllt INV, WIR, SIR, PAR und UIA. Speziell für das Dreieck $(\Delta, 0)$ finden wir $P(\Delta, 0) = p$ dank der Orthogonalität

$$\operatorname{grad} h(p) = (p_1^{p_1} p_2^{p_2}, p_1^{p_1} p_2^{p_2}) \perp T_p \partial\Delta.$$

(2) Zur Eindeutigkeit sei neben P auch $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung, die die drei Axiome INV, WIR, UIA sowie $P(\Delta, 0) = p$ erfüllt. Sei $(K, a) \in V^2$ ein Problem. Wir zeigen $F(K, a) = P(K, a)$.

Es gilt $(K_{\ge a}, a) \subseteq (K, a)$; dank WIR und UIA dürfen wir „=“ annehmen. Dank INV dürfen wir $a = (0, 0)$ annehmen, zudem auch $P(K, a) = p$. Damit liegt $(K, 0) \subseteq (\Delta, 0)$ im Dreieck $\Delta = \{\, x \in \mathbb{R}^2_{\ge 0} \mid x_1 + x_2 \le 2 \,\}$ dank des Gradienten $\operatorname{grad} h(p) \perp T_p \partial\Delta$ und der Konvexität von K. Dank Voraussetzung gilt $F(\Delta, 0) = p$, dank UIA $F(K, 0) = p$.

Allein mit Hilfe der Axiome INV, WIR, UIA und $F(\Delta, 0) = p$ können wir für jedes vorgelegte Problem $(K, a) \in V^2$ den Punkt $F(K, a)$ bestimmen. Wir finden jeweils $F(K, a) = P(K, a)$. Dies beweist $F = P$.

Asymmetrische Verhandlungslösungen

(3) Gegenbeispiele zu finden ist knifflig, auch amüsant und lehrreich.

Geizig: Wähle $G(K, a) = (u_1, u_2) \in K$ mit $u_2 = a_2$ und u_1 maximal.

Lexikographisch: Wähle zunächst das Maximum $u_1 = \max \operatorname{pr}_1 K_{\ge a}$ und hierzu anschließend $L(K, a) = (u_1, u_2) \in K$ mit u_2 maximal.

Diese Lösungen G und L erfüllen tatsächlich INV, WIR und UIA; diese Eigenschaften muss man wie immer gewissenhaft prüfen.

Die geizige Lösung erfüllt zwar WIR, aber weder SIR noch PAR. Die lexikographische Lösung erfüllt zwar PAR, aber nicht SIR. Dies illustriert die subtilen Unterschiede von WIR, SIR, PAR.

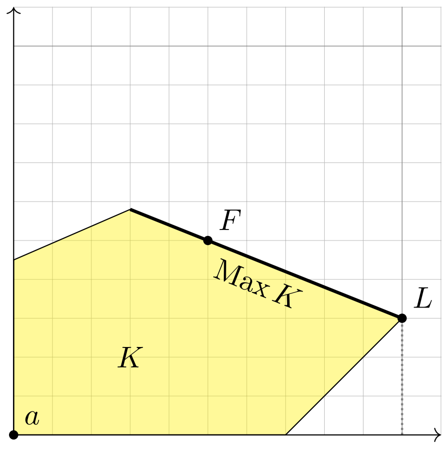
(4) Mit der Verschärfung von WIR zu PAR beweisen wir:

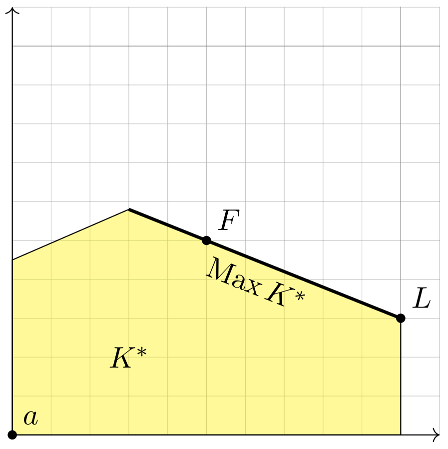
Satz G1F (lexikographische Lösung, Holzmüller et al. 2018)

Die lexikographische Verhandlungslösung $L : V^2 \to \mathbb{R}^2$ ist die einzige, die die drei Axiome INV, PAR, UIA sowie $L(\Delta, 0) = (2, 0)$ erfüllt.

Asymmetrische Verhandlungslösungen

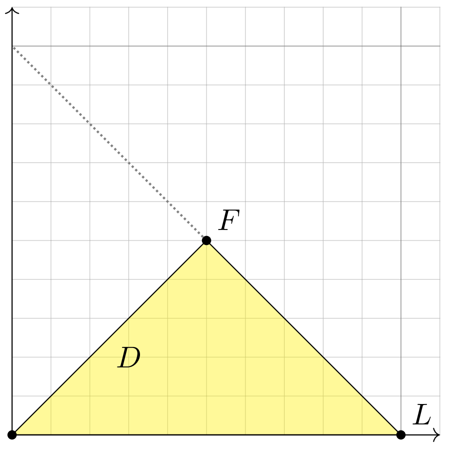
Eindeutigkeit der lexikographischen Lösung als Beweis in Bildern:

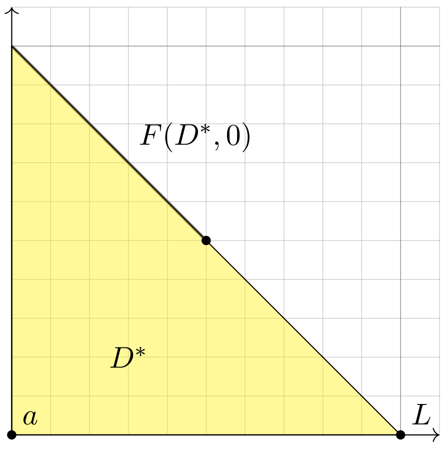




Asymmetrische Verhandlungslösungen

Eindeutigkeit der lexikographischen Lösung, Fortsetzung und Schluss:





Asymmetrische Verhandlungslösungen

(4) Zur Eindeutigkeit sei neben L auch $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung, die die drei Axiome INV, PAR, UIA erfüllt. Wir nehmen $F(K, a) \neq L(K, a)$ für ein Verhandlungsproblem $(K, a) \in V^2$ an und zeigen damit $F(\Delta, 0) \neq (2, 0)$.

Es gilt $(K_{\geq a}, a) \subseteq (K, a)$; dank PAR und UIA dürfen wir „=“ annehmen. Dank INV dürfen wir $a = (0, 0)$ annehmen, zudem $\max \operatorname{pr}_2 K = 1$.

Dank PAR liegen $u = F(K, a)$ und $L(K, a)$ in der Pareto–Front $\operatorname{Max} K$. Es gilt $u_1 < 1$ dank Definition von L und der Voraussetzung $u \neq L(K, a)$

Wir erweitern K zum Verhandlungsproblem $K^* = [K \cup (1, 0)] \supseteq K$. Die Pareteo–Front $\operatorname{Max} K^* = \operatorname{Max} K$ wird hierdurch nicht verändert. Dank PAR gilt $F(K^*, 0) \in \operatorname{Max} K^* \subset K$. Dank UIA folgt $F(K^*, 0) = u$.

Wir betrachten nun das Dreieck $D = [(0, 0), (1, 0), u] \subseteq K^*$. Es gilt $F(K^*, 0) = u \in D$. Dank UIA folgt $F(D, 0) = u$.

Schließlich wählen wir das Dreieck $D^* = [(0, 0), (1, 0), (0, y)]$ so, dass u auf der Hypotenuse $[(1, 0), (0, y)]$ liegt; dies ist möglich wegen $u_1 < 1$. Dank UIA kann $F(D^*, 0)$ nicht in $]u, (1, 0)]$ liegen, also $F(D^*, 0) \neq (1, 0)$.

Dank INV folgt schließlich $F(\Delta, 0) \neq (2, 0)$, was zu zeigen war.

Verhandlungstheorie für mehrere Spieler

Bislang haben wir nur Verhandlungen mit zwei Spielern untersucht. Dieselben Fragen und Antworten finden wir ebenso für mehrere Spieler.

Aufgabe: Definieren Sie für jede Spielerzahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ die Menge V^n der Verhandlungsprobleme und darauf Verhandlungslösungen $F : V^n \to \mathbb{R}^n$. Übertragen Sie soweit möglich Axiome, Beispiele, Sätze und Beweise.

In beliebiger Dimension haben wir keine Anschauung oder Intuition. Diese Übung ist daher eine gute Ergänzung zur Formalisierung! Hier können Sie wunderbar die Techniken der mehrdimensionalen Analysis einsetzen, insbesondere Lagrange–Multiplikatoren.

Axiome fordern ist nicht schwer. . .

Axiome zu formulieren, ist eine Kunst. Viele scheinen anfangs vernünftig, erweisen sich aber gemeinsam als widersprüchlich, also unerfüllbar! Wir setzen im Folgenden wieder Pareto–Optimalität (PAR) voraus.

Aufgabe: Übersetzen Sie folgende Forderungen in Formeln.

„Wenn neue Alternativen hinzukommen, dann ist die neue Lösung eine der neuen Alternativen oder unverändert die alte Lösung.“

Sei $(K, a) \subseteq (L, a)$ in V^2. Aus $F(L, a) = u \in K$ folgt $F(K, a) = u$.

UIA: Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen.

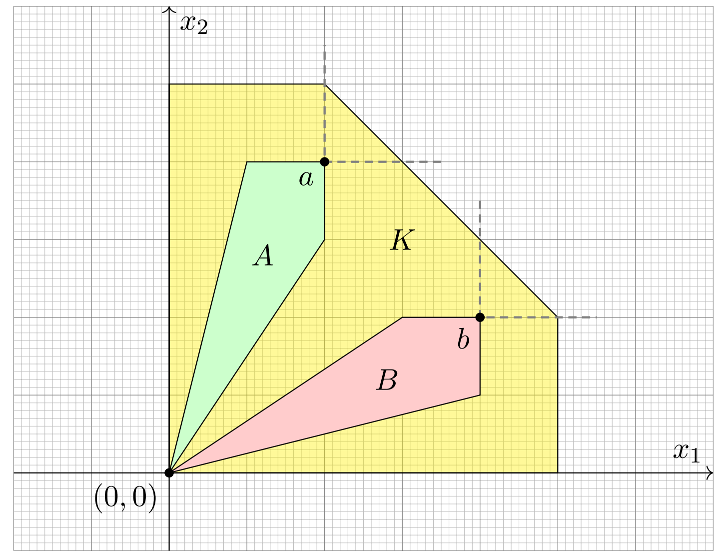
„Wenn zur alten Lösung strikt bessere Alternativen hinzukommen, dann ist die neue Lösung eine dieser strikt besseren Alternativen.“

Sei $(K, a) \subseteq (L, a)$. Aus $F(K, a) = u$ und $L_{>u} \neq \emptyset$ folgt $F(L, a) \in L_{>u}$.

ÜBA: Übertrumpfen durch strikt bessere Alternativen.

. . . Axiome erfüllen hingegen sehr.

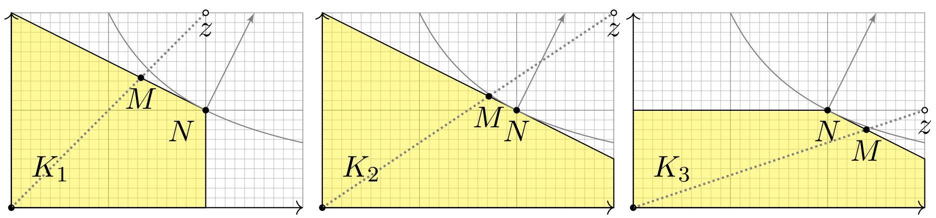
Aufgabe: Finden Sie alle Lösungen, die PAR und ÜBA erfüllen.



Lösung: Keine Verhandlungslösung $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ erfüllt PAR und ÜBA!

Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen

Ist die Nash–Verhandlungslösung wirklich „fair“ und „gerecht“?



In Situation K_1 bekommt Alice ihr Maximum, Bob nur die Hälfte. Beim Übergang zu K_2 stärkt Alice ihre Position, aber ihr Ergebnis stagniert; umgekehrt schwächt Alice ihre Position, aber Bob profitiert nicht davon. Sinngemäß gilt dasselbe beim Übergang von K_2 zu K_3 und zurück.

In jedem Falle findet mindestens ein Spieler einen Grund zur Klage. Er hält die zusätzlichen Alternativen für relevant und bestreitet UIA.

Ist das Nash–Verfahren N deshalb unfair? Nein, das Verfahren ist fair, aber die vorgelegten Verhandlungssituationen (K_i, a) selbst sind unfair. Die zugeordneten Lösungen $N(K_i, a)$ können das nicht wunderheilen.

Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen

Die vier Nash–Axiome scheinen zunächst natürlich und plausibel, zudem können wir daraus eine schöne Charakterisierung ableiten. Doch in manch konkretem Beispiel keimen leise Zweifel. . .

Der Schlichter schlägt für jedes Verhandlungsproblem eine Lösung vor. Die Lösungen sollen „fair“ und „nachvollziehbar“ sein, und der Schlichter „konsistent“. Die vier Nash–Axiome geben hierauf präzise Antworten.

Die Schlichtung gelingt nur, wenn sie alle Parteien überzeugt. Hierzu ist es hilfreich, dass sie zur Begründung ihres Vorschlags nachvollziehbare Gründe und überzeugende Argumente anführt.

Nashs Axiome formulieren vier solche nachvollziehbaren Gründe. Sie erklären, was wir von einer fairen Verhandlungslösung erwarten. Über die Auswahl und Festlegung dieser Axiome kann man streiten, ihre Konsequenzen jedoch folgen mit mathematischer Präzision.

Einzelne Vorschläge mögen unfair erscheinen, doch das Verfahren ist fair im Sinne der Definition, denn es erfüllt all unsere Anforderungen. Aus unfairen Situationen kann es keine fairen Lösungen zaubern.

Die monotone Verhandlungslösung

Wir ersetzen Unabhängigkeit UIA durch die alternative Forderung **MON: Monotonie.** Für $(K,a) \subseteq (L,a)$ in V^2 gilt $F(K,a) \le F(L,a)$, vorausgesetzt es gilt $\max \mathrm{pr}_i K_{\ge a} = \max \mathrm{pr}_i L_{\ge a}$ für $i = 1,2$.

Satz G1G (monotone Lösung, Kalai–Smorodinsky 1975)

*Es existiert genau eine **monotone Verhandlungslösung** $M : V^2 \to \mathbb{R}^2$, die die Axiome INV, PAR, SYM und MON erfüllt.*

Berechnung: *Zu $(K,a) \in V^2$ ist die Lösung $M(K,a)$ der maximale Punkt auf der Strecke $K \cap [(a_1,a_2),(z_1,z_2)]$ mit $z_i = \max \mathrm{pr}_i K_{\ge a}$.*

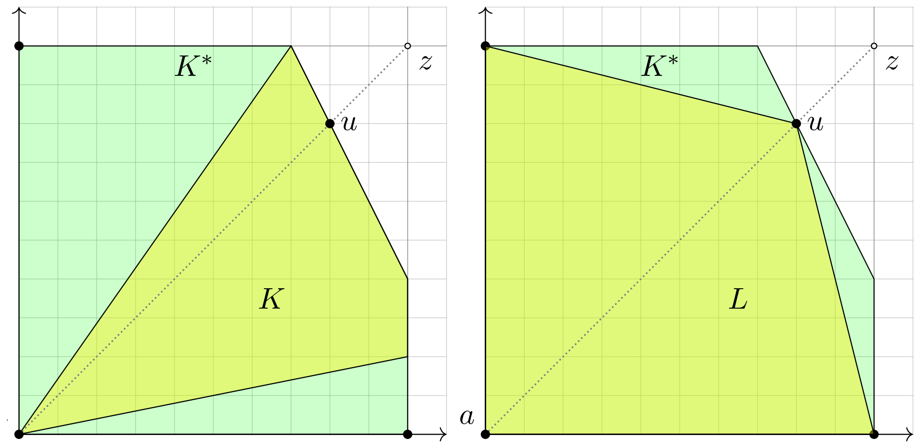
Aufgabe: Beweisen Sie diese Charakterisierung analog zu Satz G1B.

Die monotone Lösung M unterscheidet sich von der Nash–Lösung N, denn N erfüllt UIA aber nicht MON, und M erfüllt MON aber nicht UIA. Wer es konkret mag, findet deutliche Unterschiede in den Beispielen.

Dieser Satz geht zurück auf E. Kalai, M. Smorodinsky: *Other Solutions to Nash's Bargaining Problem*, Econometrica 43 (1975) 513–518

Die monotone Verhandlungslösung

Eindeutigkeit $F(K,a) = M(K,a)$ als Beweis in Bildern:



Auf $(K,a) \subseteq (K^*,a)$ und $(L,a) \subseteq (K^*,a)$ können wir MON anwenden. Das zeigt $F(K,a) = F(K^*,a) = F(L,a) = u = M(K,a)$, also $F = M$.

Die monotone Verhandlungslösung

Lösung: (1) Existenz: Die angegebene Abbildung

$$M : V^2 \to \mathbb{R}^2 : M(K,a) = \max(K \cap [(a_1,a_2),(z_1,z_2)])$$

erfüllt die vier gewünschten Eigenschaften INV, PAR, SYM, MON.

(2) Eindeutigkeit: Angenommen $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ erfüllt diese Axiome. Wir leiten daraus ab, dass $F = M$ gilt. Hierzu sei $(K,a) \in V^2$.

Es gilt $(K_{\ge a},a) \subseteq (K,a)$. Dank MON folgt $F(K_{\ge a},a) \le F(K,a)$, dank PAR $F(K_{\ge a},a) = F(K,a)$. Wir dürfen also $(K_{\ge a},a) = (K,a)$ annehmen, dank INV zudem $a = (0,0)$ und schließlich $\max \mathrm{pr}_1 K = \max \mathrm{pr}_2 K = 1$.

Sei $u = M(K,a) = a + \lambda(1,1)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ maximal. Wir betrachten wie skizziert $K^* := [K \cup \{(1,0),(0,1)\}]$ und $L := [\{(0,0),\ (0,1)\ (1,0),u\}]$.

Es gilt $(K,0) \subseteq (K^*,0)$. Dank MON folgt $F(K,0) = F(K^*,0)$.
Es gilt $(L,0) \subseteq (K^*,0)$. Dank MON gilt $F(L,0) = F(K^*,0)$.
Dank SYM und PAR gilt $F(L,0) = u$.
Das zeigt $F(K,0) = u = M(K,0)$.

Die monotone Verhandlungslösung

Die monotone Lösung M und die Nash–Lösung N sind die beiden bekanntesten Verhandlungslösungen. Beide lassen sich axiomatisch charakterisieren, wie hier dargestellt, und geometrisch bestimmen.

Die Nash–Lösung wird durch die Axiome INV, SYM, PAR und UIA charakterisiert. Viel Kritik entzündet sich traditionell am letzten Axiom, der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen. Als Reaktion darauf entwickelten Kalai und Smorodinsky ihren monotonen Lösungsbegriff, der durch die Axiome INV, SYM, PAR und MON charakterisiert wird.

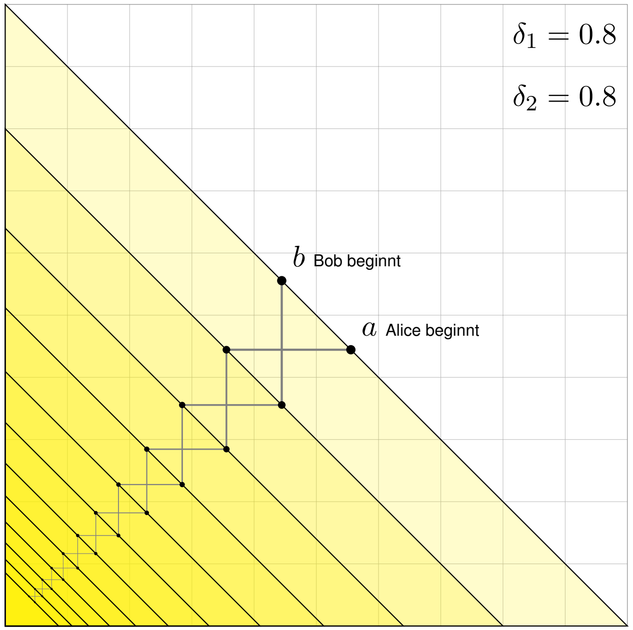
Die Nash–Lösung erfüllt das Axiome UIA, aber nicht MON, die monotone Lösung erfüllt umgekehrt MON, aber nicht UIA. Auf symmetrischen Problemen stimmen beide Lösungen überein.

Beide Lösungen wurden experimentell in Laborexperimenten getestet: Welche kommt dem empirisch beobachteten Verhalten am nächsten?

Wir durchleuchten eine solche Implementierung mathematisch: Die beiden Spieler machen abwechselnd Angebote bis zur Einigung. Welches Verhandlungsergebnis stellt sich bei rationalen Spielern ein?

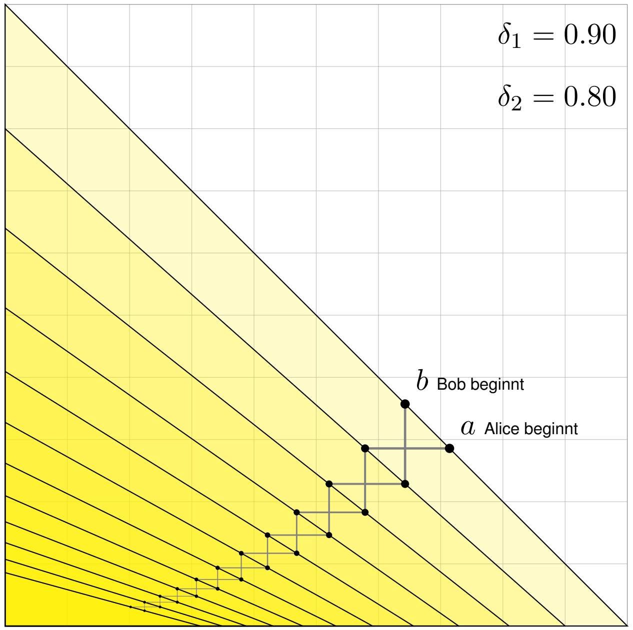
Verhandeln durch alternierende Angebote

G201



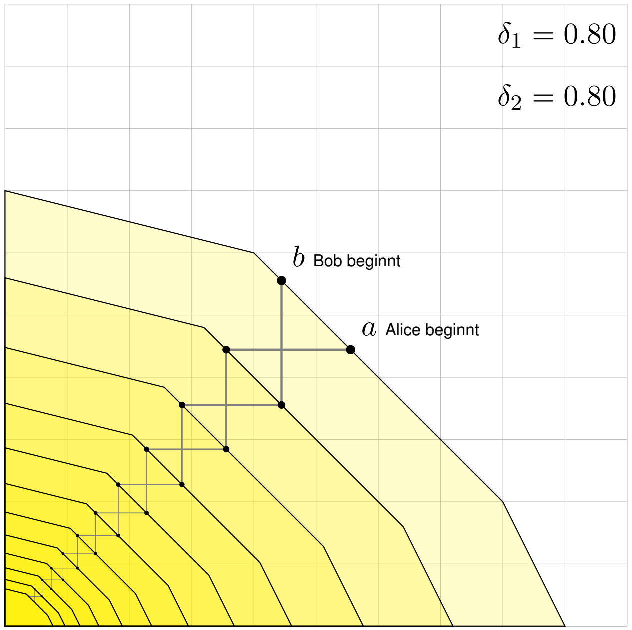
Verhandeln durch alternierende Angebote

G202



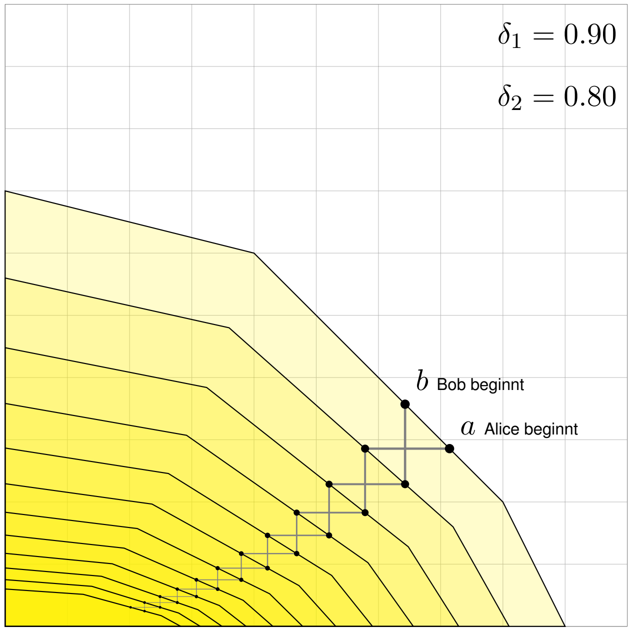
Verhandeln durch alternierende Angebote

G203



Verhandeln durch alternierende Angebote

G204



Das Rubinstein–Modell einer Verhandlung

Annahmen: Sei $K \subset \mathbb{R}^2_{\geq 0}$ konvex und kompakt mit Drohpunkt $0 \in K$. Mit jedem Zeitschritt $n = 0, 1, 2, \dots$ schrumpft der zu verteilende Kuchen auf die Menge $K_n := (\delta_1^n, \delta_2^n) \cdot K$ mit konstanten Faktoren $\delta_1, \delta_2 \in \,]0,1[$. Diese Daten definieren das **Rubinstein–Modell** einer Verhandlung durch alternierende Angebote als dynamisches Spiel $\Gamma = \Gamma(K, \delta)$:

Als Alphabet wählen wir $\mathcal{A} = K \sqcup \{\, \text{👎} = \text{ablehnen},\ \text{👍} = \text{akzeptieren} \,\}$. Spielbaum $X = X^\circ \sqcup \partial X$ und Auszahlung u entstehen daraus wie folgt:

$$
\begin{aligned}
X^\circ_0 &= \{\emptyset\}, \\
X^\circ_{2n+1} &= X^\circ_{2n} * K &&= \{v = (x_0, \text{👎}, \dots, x_n)\}, \\
X^\circ_{2n+2} &= X^\circ_{2n+1} * \{a\} &&= \{v = (x_0, \text{👎}, \dots, x_n, \text{👎})\}, \\
\partial X_{2n+2} &= X^\circ_{2n+1} * \{b\} &&= \{v = (x_0, \text{👎}, \dots, x_n, \text{👍})\}, \quad u^i(v) = \delta_i^n x_n^i, \\
X_\infty &= (K * \{a\})^\infty &&= \{v = (x_0, \text{👎}, x_1, \text{👎}, \dots)\}, \quad u^i(v) = 0.
\end{aligned}
$$

🙂 Dieses Verhandlungsmodell $\Gamma(K, \delta)$ ist recht intuitiv und natürlich.

Das Rubinstein–Modell einer Verhandlung

Hier ist K die Verhandlungsmenge. Jedes ihrer Elemente $x \in K$ ist ein mögliches Verhandlungsergebnis und kann als Angebot genutzt werden. Die Verhandlung verläuft alternierend, wobei zunächst Alice beginnt: Zuerst macht Alice ein Angebot. Lehnt Bob ab, so macht er ein Angebot. Lehnt Alice dieses ab, so macht sie ein Angebot. Und immer so weiter.

Zu jeder Vorgeschichte $v = (x_0, \text{👎}, \dots, x_{n-1}, \text{👎}) \in X$ haben wir
- für n gerade: $A^1_v = K$ und $A^2_v = \{\text{warten}\}$.
- für n ungerade: $A^2_v = K$ und $A^1_v = \{\text{warten}\}$.

Zu jeder Vorgeschichte $v = (x_0, \text{👎}, \dots, x_n) \in X$ haben wir
- für n gerade: $A^1_v = \{\text{warten}\}$ und $A^2_v = \{\text{👍}, \text{👎}\}$.
- für n ungerade: $A^2_v = \{\text{warten}\}$ und $A^1_v = \{\text{👍}, \text{👎}\}$.

Durch diese Aktionsmengen wird das Spiel eindeutig beschrieben, insbesondere werden alle Strategien $s^1 \in S^1$ und $s^2 \in S^2$ festgelegt.

Das Rubinstein–Modell einer Verhandlung

„Of course, one cannot represent all possible bargaining devices as moves in the non-cooperative game. The negotiation process must be formalized and restricted, but in such a way that each participant is still able to utilize all the essential strengths of his position.“ (Nash 1953)

Wir brauchen demnach Modelle, die einerseits umfassend genug sind, um realistisch zu sein, andererseits einfach genug, um praktikable Analysen und Lösungen zuzulassen. Der axiomatisch-kooperative Ansatz löst das zweite Problem sehr elegant und liefert Lösungen. Doch welche der verschiedenen Verhandlungslösungen ist realistisch, in welchem Kontext ist sie geeignet, und wie sollen wir sie anwenden?

Hier hilft die nicht-kooperative Theorie als Richtschnur, denn wir können diese Modelle gut der Realität anpassen. In diesem Sinne ergänzen sich axiomatisch-kooperative und die strategisch-nicht-kooperative Theorie. Letztere lässt sich zudem empirisch überprüfen und kalibrieren, etwa passiv in (Real-Life-)Beobachtungen oder aktiv in (Labor-)Experimenten.

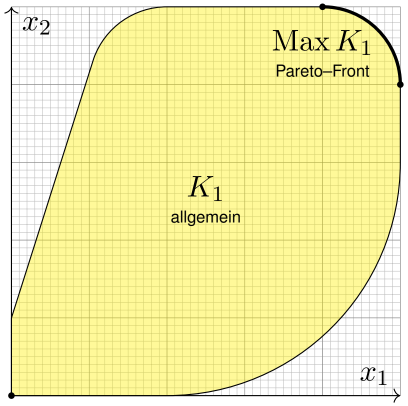
Das Rubinstein–Modell einer Verhandlung

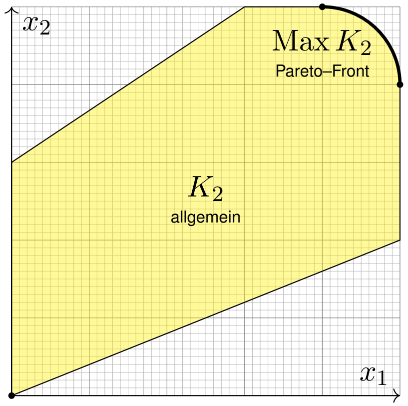
Ein wesentlicher Aspekt des Rubinstein–Modells ist das Schrumpfen der Verhandlungsmenge: Der zu verteilende Kuchen nimmt mit der Zeit exponentiell / geometrisch ab. Nur durch diesen Zeitdruck entsteht hier die innere Dynamik der Verhandlung und der Anreiz zur Einigung.

Die Diskontierung mit δ_1, δ_2 können wir auf drei Arten interpretieren:

1. Erstens als Wertverlust, zum Beispiel Inflation: Geld morgen ist weniger wert als Geld heute. Der Diskontierungsfaktor / Wertverlust $\delta \in \,]0,1[$ ist hierbei für alle Spieler gleich.
2. Zweitens als individuelle Geduld: Warten bedeutet geringeren Nutzen, auch hier ist Geld morgen weniger wert als Geld heute, aber für jeden Spieler $i \in I$ individuell mit δ_i diskontiert.
3. Drittens, eine Abbruchwkt $\varepsilon > 0$ ist wesentlich realistischer, letztlich auch, weil wir alle nur endlich lange leben. Dies führt zur selben Formel mit $\delta = 1 - \varepsilon$.

Geometrische Vorbereitung





Wir setzen $m_1 := \max \mathrm{pr}_1 K$ und ebenso $m_2 := \max \mathrm{pr}_2 K$.

$K = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x_1 \le m_1,\ \psi_1(x_1) \le x_2 \le \varphi_1(x_1) \}$ mit $\psi_1, \varphi_1 : [0, m_1] \to [0, m_2]$ stetig, ψ_1 konvex wachsend, φ_1 konkav.

$K = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x_2 \le m_2,\ \psi_2(x_2) \le x_1 \le \varphi_2(x_2) \}$ mit $\psi_2, \varphi_2 : [0, m_2] \to [0, m_1]$ stetig, ψ_2 konvex wachsend, φ_2 konkav.

Geometrische Vorbereitung

Eine Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt **Normalbereich in y–Richtung**, wenn

$$B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x) \}$$

mit $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g \le h$. Dies nutzen wir z.B. zur Integration: B ist kompakt, somit messbar und $\mathrm{vol}_2(B) < \infty$. Sei $f : B \to \mathbb{R}$ absolut integrierbar, z.B. beschränkt oder gar stetig. Dann gilt dank Fubini:

$$\int_B f(x, y)\, \mathrm{d}(x, y) = \int_{x=a}^{b} \int_{y=g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$$

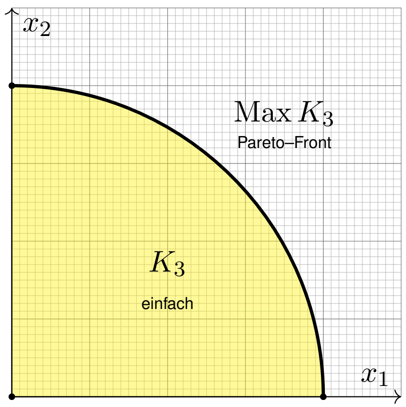
Entsprechend ist $B \subset \mathbb{R}^2$ ein **Normalbereich in x–Richtung**, wenn

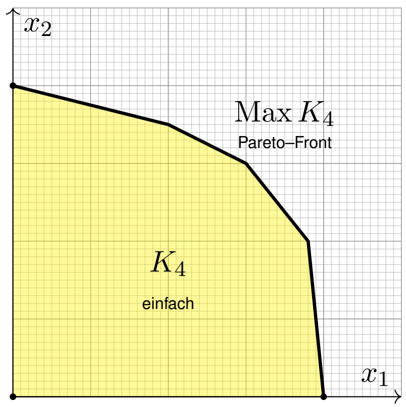
$$B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le y \le b,\ g(y) \le x \le h(y) \}.$$

Gilt beides, so nennen wir B einen **Binormalbereich**.

Aufgabe: Jedes konvexe Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^2$ ist ein Binormalbereich. Wie konstruieren Sie jeweils die eingrenzenden Funktionen g und h? Warum sind diese dann stetig, zudem g konvex und h konkav?

Geometrische Vorbereitung





Vereinfachung: $(m_1, 0) \in \mathrm{Max}\, K$ und $(0, m_2) \in \mathrm{Max}\, K$.

$K = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x_1 \le m_1,\ 0 \le x_2 \le \varphi_1(x_1) \}$ mit $\varphi_1 : [0, m_1] \xrightarrow{\sim} [0, m_2]$ stetig, bijektiv, konkav fallend.

$K = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x_2 \le m_2,\ 0 \le x_1 \le \varphi_2(x_2) \}$ mit $\varphi_2 : [0, m_2] \xrightarrow{\sim} [0, m_1]$ stetig, bijektiv, konkav fallend.

Hierbei gilt $\varphi_2 \circ \varphi_1 = \mathrm{id}_{[0, m_1]}$ und $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \mathrm{id}_{[0, m_2]}$.

Geometrische Vorbereitung

Sei $0 \in K \subset \mathbb{R}^2_{\ge 0}$ konvex und kompakt sowie $(m_1, 0), (0, m_2) \in \mathrm{Max}\, K$.

Aufgabe: Weisen Sie alle hier gemachten Aussagen sorgfältig nach! Differenzieren im Sinne der Analysis 1 können Sie im Allgemeinen nicht, aber Geometrie und Topologie sind Ihnen hier wie immer treue Helfer.

Verhandlungsergebnis im Rubinstein–Modell

Satz G2A (Verhandlungsergebnis im Rubinstein–Modell)

Sei $0 \in K \subset \mathbb{R}^2_{\ge 0}$ *konvex und kompakt sowie* $(m_1, 0), (0, m_2) \in \operatorname{Max} K$.

Zu jedem Parameterpaar $\delta_1, \delta_2 \in \,]0,1[$ *existiert genau ein Punktepaar* $a, b \in \operatorname{Max} K$ *mit der Eigenschaft* $\delta_1 a_1 = b_1$ *und* $\delta_2 b_2 = a_2$.

Für jedes teilspielperfekte Gleichgewicht $s \in \operatorname{SPE}(\Gamma(K,\delta))$ *gilt dann:*

Alice schlägt zu jedem Zeitpunkt a *vor und akzeptiert* b *oder besser.*
Sie bejaht $x \in K$, *falls* $x = b$ *oder* $x_1 > b_1$, *und verneint falls* $x_1 < b_1$.

Bob schlägt zu jedem Zeitpunkt b *vor und akzeptiert* a *oder besser.*
Er bejaht $x \in K$, *falls* $x = a$ *oder* $x_2 > a_2$, *und verneint falls* $x_2 < a_2$.

Im Falle der Indifferenz ist keine allgemeine Aussage möglich.

Beispiel: Wir betrachten $K = \{\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{\ge 0} \mid x_1 + x_2 \le 1 \,\}$
mit der Pareto–Front $\operatorname{Max} K = \{\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{\ge 0} \mid x_1 + x_2 = 1 \,\}$.
Einsetzen und Auflösen der geforderten Gleichung ergibt hier:

$$a_1 = \frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2} \in \,]0,1[\quad \text{und} \quad b_2 = \frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2} \in \,]0,1[$$

Verhandlungsergebnis im Rubinstein–Modell

Wir betrachten gleiche Diskontfaktoren $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. Für $\delta \nearrow 1$ finden wir:

$$a_1 = \frac{1-\delta}{1-\delta^2} = \frac{1}{1+\delta} \to \frac{1}{2} \qquad \text{also} \qquad a, b \to \Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big)$$

Das entspricht der symmetrischen Nash–Verhandlungslösung!
Für $\delta < 1$ bekommt Alice etwas mehr vom Kuchen. Das ist ihr Privileg des ersten Zugs. Im Grenzwert $\delta \nearrow 1$ verschwindet dieser Vorteil.

Wir betrachten die Diskontfaktoren $\delta_i = \mathrm{e}^{-t/p_i}$. Für $t \searrow 0$ finden wir:

$$a_1 = \frac{1-\mathrm{e}^{-t/p_2}}{1-\mathrm{e}^{-t/p_1}\,\mathrm{e}^{-t/p_2}} \to \frac{p_1}{p_1+p_2} \quad \text{also} \quad a, b \to \Big(\frac{p_1}{p_1+p_2}, \frac{p_2}{p_1+p_2}\Big)$$

Das entspricht der asymmetrischen Nash–Verhandlungslösung!
Anschaulich ist $t > 0$ der feste Zeittakt für jede Verhandlungsrunde.
Der Geduldsparameter $p_i/\ln 2$ ist hier die Halbwertszeit für Spieler i.
Ist Alice geduldiger, $p_1 > p_2$, dann bekommt sie mehr vom Kuchen.
Geduld erhöht die Verhandlungsmacht! Das ist plausibel.

Verhandlungsergebnis im Rubinstein–Modell

Dieses Verhandlungsmodell $\Gamma(K,\delta)$ ist recht intuitiv und natürlich.
Es ist recht einfach und übersichtlich aufgebaut, doch die Menge der möglichen Strategien $S = S^1 \times S^2$ ist riesig: Jede Entscheidung verzweigt nur in zwei, aber bei jedem Vorschlag $x \in K$ verzweigt der Spielbaum sogleich in überabzählbar viele Teilbäume. Zum Glück haben wir eine universelle, präzise und bequeme Notation für all solche Fälle!
Diese Verzweigungen wiederholen sich abzählbar unendlich oft.
Nicht alle Trajektorien / Spielverläufe sind endlich; Rückwärtsinduktion (in der einfachen Fassung E2D) steht uns demnach nicht zur Verfügung.

Praktisch gesehen sind damit unfassbar viele Strategien denkbar, etwa das Feilschen von Harry und Brian aus dem Eingangszitat.
Die Spieler können versuchen, sich gegenseitig zu beeindrucken: täuschen, drohen, einschüchtern, hinhalten, ablenken, etc.
Der Phantasie sind hier kaum Grenzen gesetzt.

Verhandlungsergebnis im Rubinstein–Modell

Es ist überaus erstaunlich, dass der Satz so klar und einfach ausfällt.
Das Ergebnis ist unglaublich aber wahr – und überraschend nüchtern:
Bei rationaler Spielweise zahlt sich all das Täuschen, Drohen, Ablenken, etc. nicht aus. Beide Spieler bleiben bei ihrer klaren einfachen Linie.
Eine vollkommen rationale Verhandlung verläuft daher wie ein Uhrwerk, ohne jegliche Überraschungen oder Verhandlungstricks, geräuschlos.

Warum beobachten wir bei realen Verhandlungen soviel Wirbel?
Das liegt einerseits an der unvollständigen Information der Spieler; diese zusätzliche Problematik bildet unser Modell einfach nicht ab.
Das Verhandeln übermittelt nun Information, es ist ein Signalspiel.
Andererseits wohl auch an der mangelnden Rationalität der Spieler; sie lassen sich durch Finten beeindrucken und vom Plan ablenken.
Vollständig informiert und rational verhandelt jeder kühl und nüchtern.

Konvergenz gegen die Nash–Lösung

Für die Analyse beschaffen wir uns zunächst das Punktepaar (a, b):

Lemma G2B (Konvergenz gegen die Nash–Verhandlungslösung)

Sei $0 \in K \subset \mathbb{R}^2_{\ge 0}$ *konvex und kompakt sowie* $(m_1, 0), (0, m_2) \in \operatorname{Max} K$.

Zu jedem Parameterpaar $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ *und* $\delta_1 = \mathrm{e}^{-t/p_1}$, $\delta_2 = \mathrm{e}^{-t/p_2}$ *existiert auf der Pareto–Front genau ein Punktepaar* $a, b \in \operatorname{Max} K$ *mit*

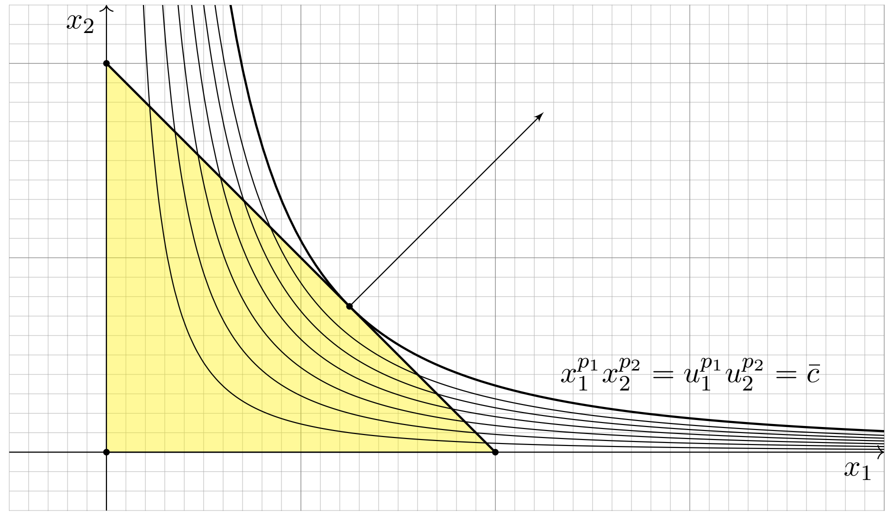
$$\delta_1 a_1 = b_1 \quad \text{und} \quad \delta_2 b_2 = a_2.$$

Für $t \searrow 0$ *konvergieren* $a(t)$ *und* $b(t)$ *gegen die asymmetrische Nash–Verhandlungslösung* $P(K, 0) = u$*, also den eindeutigen Maximierer* $u \in K$ *der Funktion* $h : K \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto x_1^{p_1} x_2^{p_2}$.

Beispiel: Wir betonen den symmetrischen Fall $p_1 = p_2$, also $\delta_1 = \delta_2$: Für $t \searrow 0$ konvergieren $a(t)$ und $b(t)$ gegen die symmetrische Nash–Verhandlungslösung $N(K, 0) = u$, also den eindeutigen Maximierer $u \in K$ der Funktion $h : K \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$.

Konvergenz gegen die Nash–Lösung

Existenz und Eindeutigkeit und Konvergenz als Beweis in Bildern:



🙂 Hier sind Geometrie und Topologie gefragt, allerdings noch einfach.

Konvergenz gegen die Nash–Lösung

Beweis: Aus $\delta_1 a_1 = b_1$ und $\delta_2 b_2 = a_2$ folgt $h(a) = h(b)$, denn

$$h(a) = (a_1)^{p_1} (a_2)^{p_2} = \mathrm{e}^t (b_1)^{p_1} (a_2)^{p_2} = (b_1)^{p_1} (b_2)^{p_2} = h(b) =: c.$$

Umgekehrt: Je zwei dieser drei Gleichungen implizieren die dritte.

Eindeutigkeit: Die Funktion $x_1 \mapsto x_2 = c x_1^{-p_1/p_2}$ ist strikt konvex. Wir haben $\operatorname{Max} K = \{\, (x_1, \varphi_1(x_1)) \mid 0 \le x_1 \le m_1 \,\}$ mit φ_1 konkav. Es kann demnach höchstens zwei Schnittpunkte $\{a, b\}$ geben.

Existenz: Sei $\bar{c} := \max h = h(u)$. Für jedes Niveau $0 < c < \bar{c}$ schneidet die Niveaulinie $h^{-1}(c) = \{\, x \in \mathbb{R}^2_{>0} \mid h(x) = c \,\}$ die Pareto–Front genau zweimal: $h^{-1}(c) \cap \operatorname{Max} K = \{a, b\}$ mit $b_1 < u_1 < a_1$ und $a_2 < u_2 < b_2$.

- Für $c \nearrow \bar{c}$ gilt $\delta_1(c) = b_1(c)/a_1(c) \nearrow 1$.
- Für $c \searrow 0$ gilt $\delta_1(c) = b_1(c)/a_1(c) \searrow 0$.

Die Zuordnung $c \mapsto \delta_1(c)$ ist stetig. Also wird jeder Wert in $]0, 1[$ getroffen. Aus $b_1(c)/a_1(c) = \mathrm{e}^{-t/p_1}$ folgt dann $a_2(c)/b_2(c) = \mathrm{e}^{-t/p_2}$, wie gefordert.

Konvergenz: $a_1 - b_1 = (1 - \mathrm{e}^{-t/p_1}) a_1 \to 0$, also $a_1 \to u_1$ und $b_1 \to u_1$. Ebenso gilt $b_2 - a_2 = (1 - \mathrm{e}^{-t/p_2}) b_2 \to 0$, also $a_2 \to u_2$ und $b_2 \to u_2$.

Konvergenz gegen die Nash–Lösung

Aufgabe: Prüfen Sie alle Teilaussagen dieses Beweises sorgfältig nach.

Ein teilspielperfektes Gleichgewicht

Wir wollen $\mathrm{SPE}(\Gamma(K,\delta)) \neq \emptyset$ zeigen. Das folgende Lemma konstruiert hierzu ein explizites Strategiepaar $s = (s^1, s^2) \in \mathrm{SPE}(\Gamma(K,\delta))$.

Definition G3A (die kanonischen stationären Strategien)

Zu $a \in K$ definieren wie die folgende Strategie $s^1(a)$ für Alice:

- Alice schlägt immer a vor. Angebote beantwortet sie konsistent:
- Ein Angebot $x \in K$ akzeptiert sie genau dann, wenn $x_1 \geq \delta_1 a_1$.

Zu $b \in K$ definieren wir entsprechend die Strategie $s^2(b)$ für Bob:

- Bob schlägt immer b vor. Angebote beantwortet er konsistent:
- Ein Angebot $x \in K$ akzeptiert er genau dann, wenn $x_2 \geq \delta_2 b_2$.

Lemma G3B (ein teilspielperfektes Gleichgewicht)

Gegeben seien die Punkte $a, b \in \mathrm{Max}\, K$ mit $\delta_1 a_1 = b_1$ und $\delta_2 b_2 = a_2$. Dann ist $s = (s^1(a), s^2(b))$ ein teilspielperfektes Gleichgewicht.

Ein teilspielperfektes Gleichgewicht

Beweis: Wir prüfen einmalige Abweichungen von $s = (s^1, s^2)$.

Wenn Alice a vorschlägt, dann akzeptiert Bob: Auszahlung (a_1, a_2). Angenommen, Alice schlägt einen anderen Punkt $x \neq a$ aus K vor.

- $x_1 > a_1$ bedeutet $x_2 < a_2$, da $a \in \mathrm{Max}\, K$, also wird Bob ablehnen. Die Auszahlung $(\delta_1 b_1, \delta_2 b_2)$ mit $\delta_2 b_2 = a_2$ erfüllt $\delta_1 b_1 = \delta_1^2 a_1 < a_1$.
- $x_1 < a_1$: Wenn Bob akzeptiert, bekommt Alice weniger als a_1. Wenn Bob ablehnt, dann auch, wie im vorigen Fall gesehen.

So kann Alice sich nicht verbessern. Dasselbe gilt symmetrisch für Bob.

Angenommen, Alice hat $x \in K$ vorgeschlagen.

- Im Falle $x_2 \geq a_2$ nimmt Bob an, mit Auszahlung (x_1, x_2). Ablehnung führt zur Auszahlung $(\delta_1 b_1, \delta_2 b_2)$ mit $\delta_2 b_2 = a_2$, also nicht besser.
- Im Falle $x_2 < a_2$ lehnt Bob ab, mit Auszahlung $(\delta_1 b_1, \delta_2 b_2)$. Annahme führt zur Auszahlung (x_1, x_2), für Bob also schlechter.

So kann Bob sich nicht verbessern. Dasselbe gilt symmetrisch für Alice.

Wir nutzen schließlich das Prinzip F1D der einmaligen Abweichung: Alle Voraussetzungen sind erfüllt. Somit ist $s = (s^1, s^2)$ teilspielperfekt.

Weitere teilspielperfekte Gleichgewichte

Aufgabe: Zeigen Sie durch geeignete Variation dieser Konstruktion, dass $\mathrm{SPE}(\Gamma(K,\delta))$ tatsächlich überabzählbar viele Elemente hat.

Hinweis: Die obige Konstruktion ist klar und einfach. Den Indifferenzfall $x_1 = \delta_1 a_1$ bzw. $x_2 = \delta_2 b_2$ können wir noch weiter modifizieren, ohne die Teilspielperfektion zu gefährden. Das ändert nur die Mikrostruktur der Gleichgewichte, die Auszahlungen jedoch bleiben dabei unverändert.

Es ist nicht so einfach, teilspielperfekte Gleichgewichte zu konstruieren. Sie zu erkennen bzw. zu überprüfen, sollte dann eigentlich leicht sein.

Aufgabe: Wir untersuchen das folgende Strategiepaar:

- Alice schlägt immer u vor und akzeptiert nichts.
- Bob schlägt immer 0 vor und akzeptiert nur u.

Ist dies ein teilspielperfektes Gleichgewicht? *Hinweis:* Wiederholen und nutzen Sie sorgsam das Prinzip F1D der einmaligen Abweichung.

Es gibt nur eine Gleichgewichtsauszahlung.

Weiterhin seien $a, b \in \mathrm{Max}\, K$ mit $\delta_1 a_1 = b_1$ und $\delta_2 b_2 = a_2$ wie in G2B. Wir untersuchen $\mathrm{SPE}(\Gamma(K,\delta))$; diese Menge ist nicht leer dank G3B. Wir zeigen, dass alle Gleichgewichte zur selben Auszahlung führen:

Lemma G3C (Auszahlungsgleichheit aller Gleichgewichte)

Seien $\underline{A}$ und $\overline{A}$ das Infimum / Supremum aller Auszahlungen für Alice über alle Gleichgewichte $s \in \mathrm{SPE}(\Gamma_A(K,\delta))$, wobei Alice beginnt.

Seien $\underline{B}$ und $\overline{B}$ das Infimum / Supremum aller Auszahlungen für Bob über alle Gleichgewichte $s \in \mathrm{SPE}(\Gamma_B(K,\delta))$, wobei Bob beginnt.

Dann gelten die Gleichungen

$$\underline{A} = \varphi_2(\delta_2 \overline{B}), \quad \overline{A} = \varphi_2(\delta_2 \underline{B}), \quad \underline{B} = \varphi_1(\delta_1 \overline{A}), \quad \overline{B} = \varphi_1(\delta_1 \underline{A}).$$

Hieraus folgt schließlich die Gleichheit $\underline{A} = a_1 = \overline{A}$ und $\underline{B} = b_2 = \overline{B}$.

Aufgabe: Zeigen Sie schrittweise diese Aussagen. Rückwärtsinduktion steht uns nicht direkt zur Verfügung. Wir nutzen stattdessen die Selbstähnlichkeit des Spiels Γ.

Es gibt nur eine Gleichgewichtsauszahlung.

Lösung: (1) Es gilt $\underline{A} \ge \varphi_2(\delta_2 \overline{B})$.

Sei $s \in \mathrm{SPE}(\Gamma_A)$. Für die zugehörige Auszahlung $(x_1, x_2) \in K$ zeigen wir $x_1 \ge \varphi_2(\delta_2 \overline{B})$. Angenommen, es gälte $x_1 < \varphi_2(\delta_2 \overline{B})$.

Wir wählen $x' \in K$ mit $x_1 < x_1' < \varphi_2(\delta_2 \overline{B})$ und $x_2' = \varphi_1(x_1') > \delta_2 \overline{B}$. Alice verbessert sich durch das Angebot $x' \in K$: Wegen $x_2' > \delta_2 \overline{B}$ nimmt Bob ihr Angebot an, und Alice erhält die Auszahlung $x_1' > x_1$.

Da s teilspielperfekt ist, muss also $x_1 \ge \varphi_2(\delta_2 \overline{B})$ gelten. Das Infimum erfüllt demnach $\underline{A} \ge \varphi_2(\delta_2 \overline{B})$.

(2) Es gilt $\underline{A} \le \varphi_2(\delta_2 \overline{B})$.

Sei $\tilde{s} \in \mathrm{SPE}(\Gamma_B)$. Für die zugehörige Auszahlung $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in K$ gilt $\tilde{x}_2 \le \overline{B}$ und $0 \le \tilde{x}_1 \le \varphi_2(\tilde{x}_2)$. Wir konstruieren hieraus $s \in \mathrm{SPE}(\Gamma_A)$:

Alice bietet $(x_1, x_2) \in K$ mit $x_2 = \delta_2 \tilde{x}_2$ und $x_1 = \varphi_2(x_2)$. Bob akzeptiert alle Angebote $(x_1, x_2) \in K$ mit $x_2 \ge \delta_2 \tilde{x}_2$ und verneint falls $x_2 < \delta_2 \tilde{x}_2$. Anschließend wird mit $\tilde{s}$ fortgesetzt. Damit ist s teilspielperfekt (G3B).

Es gilt $\underline{A} \le x_1 = \varphi_2(x_2) = \varphi_2(\delta_2 \tilde{x}_2)$. Wir können nun $\tilde{x}_2 \nearrow \overline{B}$ wählen und erhalten $\varphi_2(\delta_2 \tilde{x}_2) \searrow \varphi_2(\delta_2 \underline{B})$. Also gilt $\underline{A} \le \varphi_2(\delta_2 \overline{B})$.

Es gibt nur eine Gleichgewichtsauszahlung.

(3) Es gilt $\overline{A} \le \varphi_2(\delta_2 \underline{B})$.

Sei $s \in \mathrm{SPE}(\Gamma_A)$. Alice bietet zuerst $x \in K$. Gilt $x_2 \ge \delta_2 \underline{B}$, so folgt $x_1 \le \varphi_2(x_2) \le \varphi_2(\delta_2 \underline{B})$. Gilt $x_2 < \delta_2 \underline{B}$, so lehnt Bob ihr Angebot ab.

Ablehnung führt zu einer Auszahlung $(\delta_1 \tilde{x}_1, \delta_2 \tilde{x}_2)$ mit $\tilde{x}_2 \ge \underline{B}$ und $0 \le \tilde{x}_1 \le \varphi_2(\tilde{x}_2)$. Es gilt $\delta_1 \tilde{x}_1 < \tilde{x}_1 \le \varphi_2(\tilde{x}_2) \le \varphi_2(\underline{B}) < \varphi_2(\delta_2 \underline{B})$.

In beiden Fällen, Annahme oder Ablehnung, ist Alice' Auszahlung also $\le \varphi_2(\delta_2 \underline{B})$. Das Supremum erfüllt demnach $\overline{A} \le \varphi_2(\delta_2 \underline{B})$.

(4) Es gilt $\overline{A} \ge \varphi_2(\delta_2 \underline{B})$.

Sei $\tilde{s} \in \mathrm{SPE}(\Gamma_B)$. Für die zugehörige Auszahlung $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in K$ gilt $\tilde{x}_2 \ge \underline{B}$ und $0 \le \tilde{x}_1 \le \varphi_2(\tilde{x}_2)$. Wir konstruieren hieraus $s \in \mathrm{SPE}(\Gamma_A)$:

Alice bietet $(x_1, x_2) \in K$ mit $x_2 = \delta_2 \tilde{x}_2$ und $x_1 = \varphi_2(x_2)$. Bob akzeptiert alle Angebote $(x_1, x_2) \in K$ mit $x_2 \ge \delta_2 \tilde{x}_2$ und verneint falls $x_2 < \delta_2 \tilde{x}_2$. Anschließend wird mit $\tilde{s}$ fortgesetzt. Damit ist s teilspielperfekt (G3B).

Es gilt $\overline{A} \ge x_1 = \varphi_2(x_2) = \varphi_2(\delta_2 \tilde{x}_2)$. Wir können nun $\tilde{x}_2 \searrow \underline{B}$ wählen und erhalten $\varphi_2(\delta_2 \tilde{x}_2) \nearrow \varphi_2(\delta_2 \underline{B})$. Also gilt $\overline{A} \ge \varphi_2(\delta_2 \underline{B})$.

Es gibt nur eine Gleichgewichtsauszahlung.

Zusammenfassend haben wir zwei monoton fallende Bijektionen

$$f_1 = \varphi_1 \delta_1 : [\underline{A}, \overline{A}] \xrightarrow{\sim} [\underline{B}, \overline{B}] \quad \text{und} \quad f_2 = \varphi_2 \delta_2 : [\underline{B}, \overline{B}] \xrightarrow{\sim} [\underline{A}, \overline{A}].$$

Die stetige Selbstabbildung $f = f_2 \circ f_1 : [\underline{A}, \overline{A}] \to [\underline{A}, \overline{A}]$ hat mindestens einen Fixpunkt $a_1 \in [\underline{A}, \overline{A}]$. Dank Lemma G2B gibt es genau einen: Wir setzen $a_2 := \varphi_1(a_1)$ sowie $b_1 := \delta_1 a_1$ und $b_2 := \varphi_1(b_1)$. Damit gilt $a, b \in \mathrm{Max}\, K$ mit $b_1 = \delta_1 a_1$ und $\delta_2 b_2 = a_2$.

Dies ist die eindeutige Lösung aus Lemma G2B!

Wir kennen die Fixpunkte $\underline{A}$ und $\overline{A}$, also folgt $\underline{A} = a_1 = \overline{A}$. Ebenso erhalten wir $\underline{B} = b_2 = \overline{B}$ mit vertauschten Rollen. Damit ist das Lemma bewiesen.

Dieser geniale Beweis mutet an wie Magie. Wie / Kann man ihn verstehen? oder darauf kommen?

Aufgabe: Rechnen Sie alles für das Dreieck $\Delta = [(0,0), (1,0), (0,1)]$. Zeichnen Sie parallel zur Rechnung die einzelnen Konstruktionsschritte.

Es gibt nur eine Gleichgewichtsauszahlung.

Aufgabe: Beweisen Sie Satz G2A mit Lemma G3C.

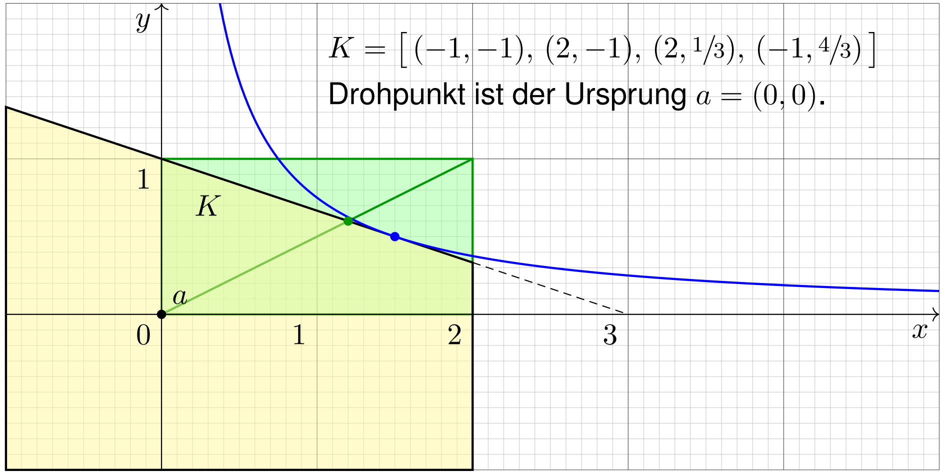
Aufgabe: Erklären Sie das Ergebnis per Rückwärtsinduktion, zunächst zeichnerisch, dann rechnerisch. *Hinweis:* Geben Sie sich ein $\varepsilon > 0$ vor. Beginnen Sie bei großem n mit $(\delta_1^n, \delta_2^n) K \subset B(0, \varepsilon)$. Konstruieren Sie dann rückwärts zu jedem Teilspiel ein Nash–ε–Gleichgewicht.

Aufgabe: Nach den Auszahlungen (Makrostruktur) erklären Sie die Mikrostruktur der Gleichgewichte wie in Satz G2A ausgeführt.

Sie ahnen jetzt, warum das Rubinstein–Modell berühmt wurde, denn es bietet das volle Programm: ein realistisches allgemeines Modell, einen bemerkenswerten Satz, zudem eine erfolgreiche vollständige Klärung dank raffinierter Mathematik. Herz, was willst du mehr? Wie zu erwarten, hat das Modell zahlreiche weitere Arbeiten inspiriert.

Haggle properly! (Klausur 2018)

Aufgabe: Wir betrachten das folgende Verhandlungsproblem (K,a):



(1) Berechnen Sie die monotone Verhandlungslösung $M(K,a)$ und (2) die Nash–Verhandlungslösung $N(K,a)$. (3) Gibt es ein VProblem $(L,a) \supset (K,a)$ mit der Eigenschaft $M(L,a) = N(L,a) = N(K,a)$?

Haggle properly! (Klausur 2018)

(1) Für $z_i = \max \operatorname{pr}_i K_{\ge a}$ finden wir $(z_1, z_2) = (2,1)$, wie in der Skizze. Der Schnittpunkt $[a,z] \cap \operatorname{Max} K$, also von den Geraden $y = x/2$ und $y = 1 - x/3$, ist demnach $M(K,a) = (6/5, 3/5)$.

In diesem Falle ist die Skizze besonders leicht und übersichtlich, und eine ausreichend genaue Zeichnung ergänzt oder ersetzt die Rechnung. Ich gebe hier deshalb beide Wege an, graphisch und algebraisch.

(2) Wir maximieren $(x,y) \mapsto xy$ entlang der Geraden $y = 1 - x/3$. Die Funktion $h(x) = x(1 - x/3) = x - x^2/3$ hat ihr Maximum in $x = 3/2$. Dies ist somit das Maximum von h auf K, also $N(K,a) = (3/2, 1/2)$.

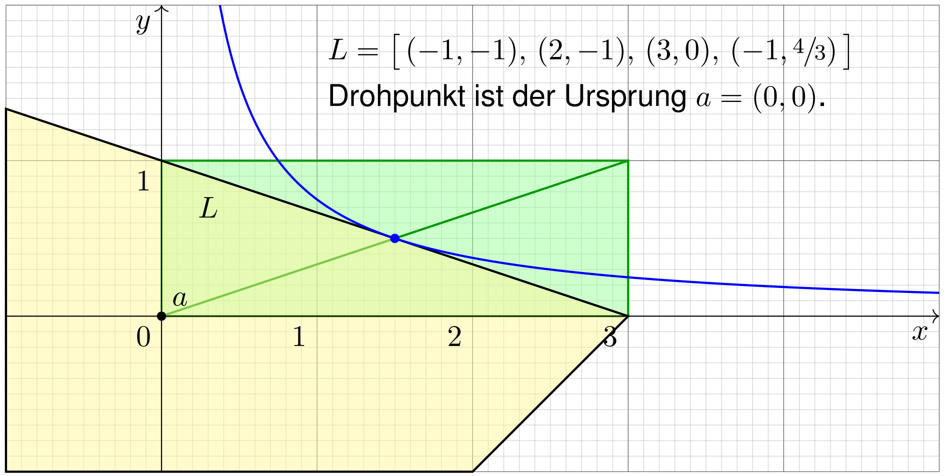
(3) Ja! Das minimale Beispiel ist $L = [K, (3,0)]$.

🙂 Die Nash–Lösung ist invariant unter irrelevanten Alternativen. Die monotone Lösung $M(K,a)$ hingegen verschiebt sich zu $M(L,a)$. Dies können wir so einrichten, dass $M(L,a) = N(L,a) = N(K,a)$ gilt.

🙂 Der für die Lösungen relevante Teil $L_{\ge a} = [K_{\ge a}, (3,0)]$ ist hierbei sogar eindeutig, was für eine Klausur durchaus willkommen ist.

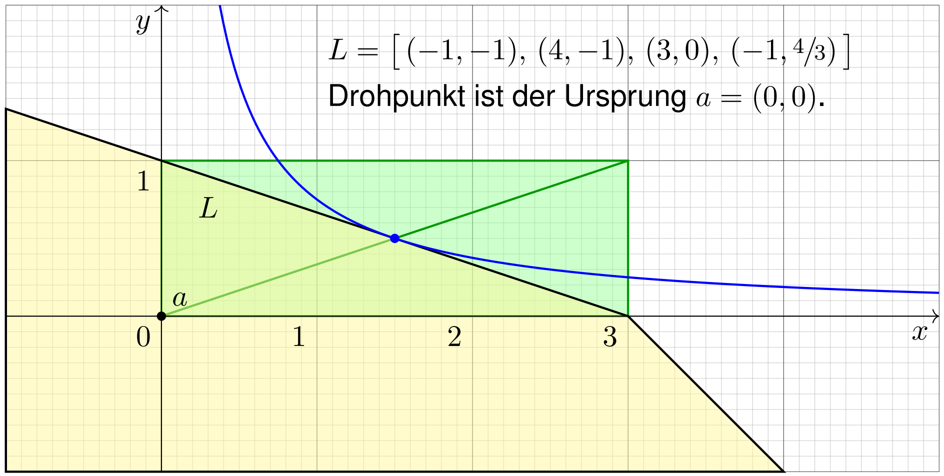
Haggle properly! (Klausur 2018)

Erstes Beispiel eines Verhandlungsproblems $(L,a) \supset (K,a)$:



Haggle properly! (Klausur 2018)

Zweites Beispiel eines Verhandlungsproblems $(L,a) \supset (K,a)$:



Kapitel H

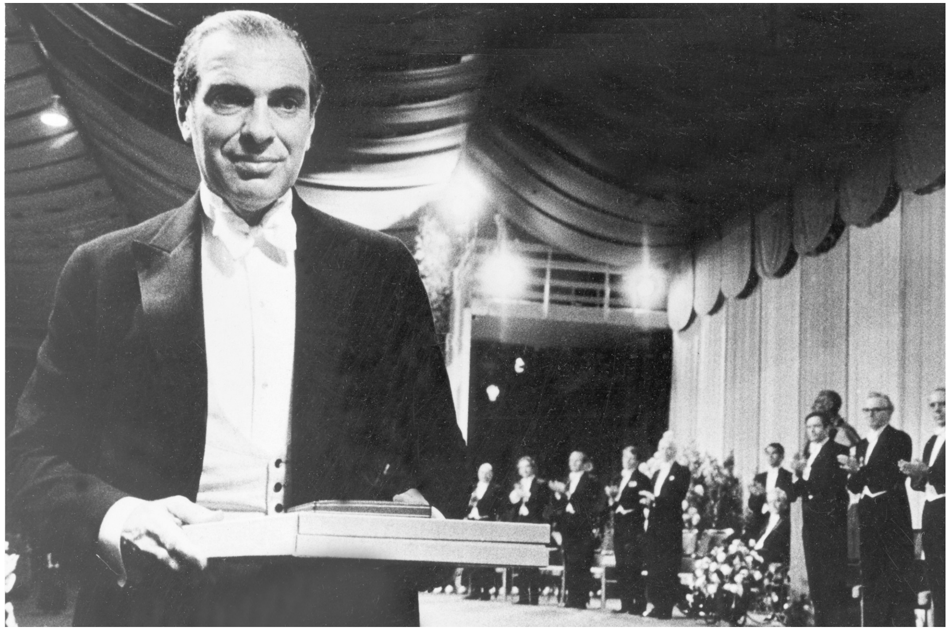
Kollektive Entscheidungen und Arrows Satz vom Diktator

„That was it! It took about five days to write in September 1948. When every attempt failed I thought of the impossibility theorem.“

(Kenneth Arrow, zitiert nach Sylvia Nasar, *A Beautiful Mind*)

Inhalt dieses Kapitels

Kenneth Arrow (1921–2017)



Kenneth Arrow bei der Nobelpreisverleihung, Stockholm 10.12.1972 (Associated Press)

Kenneth Arrow (1921–2017)

Kenneth Arrow ist berühmt für seinen Unmöglichkeitssatz, spektakulär auch als Satz vom Diktator bekannt, und weitere Arbeiten zu kollektiven Entscheidungen. Er starb letztes Jahr, am 21. Februar 2017, im Alter von 95 Jahren. Er war Professor in Harvard und Stanford.

Dieses Kapitel handelt von seiner Doktorarbeit aus dem Jahre 1951. Für diese und weitere bahnbrechende Arbeiten zur Wohlfahrtstheorie und zur Theorie ökonomischer Gleichgewichte bekam Arrow 1972 den Wirtschaftsnobelpreis, mit 51 Jahren als bislang jüngster Preisträger.

Die Arbeiten von Nobelpreisträgern sind oft spannend und wegweisend. Für allgemein verständliche Vorträge eignen sie sich leider selten, oder nur mit großen Mühen. Es gibt ein paar bemerkenswerte Ausnahmen. Hierzu zählen Nashs Gleichgewichtssatz und Arrows Satz vom Diktator.

Dieses Theorem ist ein schönes Lehrstück mathematischen Denkens. Der Beweis ist genial-einfach, die Aussage ist gesellschaftlich relevant. Aus der beliebten Reihe: „Wie schreibe ich meine Doktorarbeit in fünf Tagen und erhalte dafür den Wirtschaftsnobelpreis?“

Wahlverfahren: informelle Problemstellung

H101

Beispiel: Eine vierköpfige Familie $I = \{1,2,3,4\}$ plant ihren Urlaub. Zur Wahl stehen $A = \{\ a =$ Venedig, $b =$ London, $c =$ Paris $\}$.

$$\begin{array}{ccccccc} 1: & b & \succ & c & \succ & a \\ 2: & a & \succ & b & \approx & c \\ 3: & a & \succ & c & \succ & b \\ 4: & c & \succ & b & \succ & a \end{array}$$

Was ist ein sinnvoller Kompromiss? rational? nachvollziehbar? gerecht? Geht das überhaupt? Wenn ja, nach welchen Regeln?

Beispiel: $A = \{a, b, c, \dots\}$ sind Gesetzesvorlagen, jeder Abgeordnete i hat seine Präferenz P_i. Gesucht ist ein Abstimmungsergebnis P.

Beispiel: $A = \{a, b, c, \dots\}$ sind Universitäten, P_i ist das Ranking nach Kriterium i. Gesucht ist ein zusammengefasstes Ranking P.

Beispiel: Berufung auf eine Professur, Kandidaten $A = \{a, b, c, \dots\}$. Die Kriterien sind Forschung, Lehre, Drittmittel, Administration, etc.

Die Übungen erklären weitere Beispiele und zahlreiche Anwendungen. Beispiele illustrieren. Abstraktion strukturiert und vereinfacht!

Wahlverfahren: gesellschaftliche Relevanz

H102
Erläuterung

Abstimmungen sind jedem von uns aus dem Alltag vertraut.

Eine Gruppe von Personen $1, 2, \dots, n$ darf / soll / muss über mögliche Alternativen $a, b, c, \dots$ abstimmen. Doch nach welchem Verfahren soll abgestimmt werden? Welche Anforderungen soll das Verfahren erfüllen? Diese Frage tritt in zahlreichen Anwendungen auf, sie ist daher für die Praxis überaus wichtig... und auch theoretisch höchst interessant!

Offensichtlich braucht man gar nicht erst abzustimmen, wenn es nur eine Alternative gibt, $A = \{a\}$. Schlimmer noch: Man *kann* gar nicht abstimmen, wenn es gar keine Alternativen gibt, $A = \emptyset$. „Alternativlos“ war das Unwort des Jahres 2010 und wird immer wieder gerne genutzt.

Wenn es genau zwei Alternativen a, b gibt, dann kann man zum Beispiel die Stimmen zählen und es entscheidet die relative / einfache / absolute / qualifizierte Mehrheit. Hier gibt es bereits mehrere Möglichkeiten, ein Wahlverfahren festzulegen. Zudem gibt es manchmal Vetorechte zum Schutz von Minderheiten und ähnliche Verfeinerungen, siehe unten.

Wahlverfahren: mathematische Sorgfaltspflicht

H103
Erläuterung

Wie sieht ein Wahlverfahren allgemein aus, und was soll es leisten?

Jedes Individuum $i \in I$ hat seine individuelle Präferenz $P_i \in \mathbb{P}(A)$. Daraus soll nun eine gemeinsame Präferenz $P = V(P_1, \dots, P_n)$ als Ergebnis gebildet werden, also ein Gesamtclassement. Wir wollen nicht nur Einzelfälle behandeln, sondern eine allgemeine Regel finden, ein Wahlverfahren, das vernünftigen Ansprüchen genügt.

Das klingt zunächst recht einfach, aber es erweist sich als überraschend schwierig, mitunter gar unmöglich! Um dies im Detail zu verstehen und als Ergebnis zusammenzufassen, müssen wir sehr präzise formulieren und argumentieren. Dann jedoch wird alles wunderbar klar und leicht. Arrows Theorem ist ein schönes Lehrstück mathematischen Denkens.

Wir benötigen hierzu „nur“ elementare Logik und Mengenlehre. Das wird leider in der Schule nicht (mehr) unterrichtet. Deshalb entwickeln wir parallel zur Thematik eine geeignete Sprache zu ihrer Behandlung. Damit können wir erklären, was ein Wahlverfahren ist (in Form einer Definition) und welche Eigenschaften wir uns wünschen (als Axiome).

Wahlverfahren: mahnende Analogien

H104
Erläuterung

Es ist wie so oft in der Mathematik und allgemein im Leben: Axiome sind Annahmen, Forderungen, Wünsche, Sehnsüchte. Nicht immer lassen sie sich erfüllen. Selbst wenn sie erfüllbar sind, so nicht immer eindeutig. Denken Sie an leuchtende Beispiele aus dem ersten Studienjahr:

(1) Wir wünschen eine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft $r^2 = 2$. Ist dieser Wunsch erfüllbar? Nein! Die beiden Forderungen $r \in \mathbb{Q}$ und $r^2 = 2$ sind widersprüchlich, also unvereinbar und somit unerfüllbar.
🙂 Das ist einer der vielen guten Gründe für die reellen Zahlen $\mathbb{R}$. In $\mathbb{R}$ ist $\sqrt{2} = 1.4142135623\dots$ eine Lösung, und $-\sqrt{2}$ ebenso!

(2) Wir wünschen eine Volumenmessung $\mathrm{vol}_n : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, also normiert, linear in jeder Spalte, alternierend bei Vertauschung. Ist dieser Wunsch erfüllbar? Ja! Wir konstruieren die Determinante.
🙂 Die Konstruktion gelingt sogar über jedem kommutativen Ring. Sie ist ein wunderbares Werkzeug der linearen Algebra!

Nachdem Existenz und Eindeutigkeit geklärt sind, wollen wir die Lösung tatsächlich finden / berechnen / approximieren, dies möglichst effizient.

Präferenzen

H105

Sei $A = \{a, b, c, \dots\}$ die Menge der betrachteten **Alternativen**, $\sharp A \geq 2$.

Wir vereinbaren die folgende Schreib- und Sprechweise.

Schwache Präferenz: $x \succcurlyeq y$ bedeutet x ist mindestens so gut wie y.
Indifferenz/Äquivalenz: $x \approx y$ bedeutet $x \succcurlyeq y$ und $y \succcurlyeq x$.
Strikte Präferenz: $x \succ y$ bedeutet $x \succcurlyeq y$ und nicht $y \succcurlyeq x$.
Wir sagen hierzu auch kurz „größer-gleich“, „äquivalent“ und „größer“.
Ebenso anschaulich ist „vor-oder-gleichauf“, „gleichauf“ und „vor“.

Definition H1A (Präferenz)

Für jede Präferenz $\succcurlyeq$ fordern wir zwei Eigenschaften:
Transitivität: Gilt $x \succcurlyeq y$ und $y \succcurlyeq z$, so auch $x \succcurlyeq z$.
Linearität: Für jedes Paar $x, y \in A$ gilt $x \succcurlyeq y$ oder $y \succcurlyeq x$.
Im Folgenden bezeichnet $\mathbb{P} = \mathbb{P}(A)$ die Menge aller Präferenzen auf A.

Formal wird $\succcurlyeq$ festgelegt durch alle Paare $(x, y) \in A \times A$ mit $x \succcurlyeq y$, also

$$P = \{\, (x, y) \in A \times A \mid x \succcurlyeq y \,\}.$$

Wir fordern Transitivität $P \circ P \subseteq P$ und Linearität $P \cup P^{\intercal} = A \times A$.

Präferenzen

H106
Erläuterung

Wir nutzen hier zwei Schreibweisen für dasselbe Objekt:
Die Schreibweise als Relation $\succcurlyeq$ ist bequem und suggestiv.
Die Darstellung als Menge $P \subseteq A \times A$ dient als präzise Grundlage.
Beide sind äquivalent: Genau dann gilt $x \succcurlyeq y$, wenn $(x, y) \in P$ gilt.

Wozu brauchen wir Definitionen? Damit wir wissen, wovon wir sprechen! Eine Definition ist eine Vereinbarung: Damit präzisieren wir die Objekte, die wir untersuchen wollen. Nun können Sie selbstständig überprüfen, ob ein vorgelegtes Objekt die genannten Eigenschaften hat oder nicht.

Aufgabe: Sind die folgenden Teilmengen von $A \times A$ Präferenzen?
(1) $R = \{(a, b)\}$ auf $A = \{a, b\}$
(2) $S = \{(a, a), (b, b)\}$ auf $A = \{a, b\}$
(3) $T = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$ auf $A = \{a, b\}$
(4) $U = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$ auf $A = \{a, b\}$
(5) $V = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, c)\}$ auf $A = \{a, b, c\}$

Lösung: Wir nutzen obige Definition H1A und wenden sie sorgfältig an:
(1) Nein, es fehlen (a, a) und (b, b). (2) Nein, es fehlt (a, b) oder (b, a).
(3) Ja, kurz $a \succ b$. (4) Ja, kurz $a \approx b$. (5) Nein, es fehlt Transitivität.

Präferenzen

H107

Aufgabe: Wie viele Präferenzen gibt es auf der Menge $A = \{a, b\}$?
Lösung: Es gibt genau drei Präferenzen, nämlich:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & \succ & b \\ b & \succ & a \\ a & \approx & b \end{array} \right\} = \mathbb{P}$$

Aufgabe: Wie viele Präferenzen gibt es auf der Menge $A = \{a, b, c\}$?
Lösung: Es gibt genau 13 Präferenzen, nämlich:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a & \succ & b & \succ & c & \qquad & a & \succ & b & \approx & c \\ a & \succ & c & \succ & b & & b & \succ & a & \approx & c \\ b & \succ & a & \succ & c & & c & \succ & a & \approx & b \\ b & \succ & c & \succ & a & & a & \approx & b & \succ & c \\ c & \succ & a & \succ & b & & a & \approx & c & \succ & b \\ c & \succ & b & \succ & a & & b & \approx & c & \succ & a \\ \multicolumn{5}{l}{\text{(strikte Präferenzen } \mathbb{S})} & & a & \approx & b & \approx & c \end{array} \right\} = \mathbb{P}$$

Präferenzen

H108

Aufgabe: Wie viele (strikte) Präferenzen gibt es bei n Alternativen?

Lösung: Wir zählen zunächst die strikten Präferenzen $\mathbb{S} = \mathbb{S}(A)$:
Für den (eindeutigen) ersten Platz haben wir genau n Möglichkeiten, für den zweiten bleiben noch $n - 1$, für den dritten nur $n - 2$, usw.
Insgesamt erhalten wir das Produkt $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.
Diese berühmte Funktion schreibt man $n!$, gesprochen „n Fakultät“.
Diese Zahlen wachsen schnell, wie folgende Tabelle erahnen lässt:

n	1	**2**	**3**	4	5	6	7	8	9	10
$\sharp\mathbb{S}$	1	**2**	**6**	24	120	720	5 040	40 320	362 880	3 628 800
$\sharp\mathbb{P}$	1	**3**	**13**	75	541	4 683	47 293	545 835	7 087 261	102 247 563

Präferenzen $\mathbb{P} = \mathbb{P}(A)$, nicht notwendig strikt, gibt es noch mehr!
Ihre Berechnung ist komplizierter, ich zitiere nur die ersten Werte.
Man nennt die Anzahl $\sharp\mathbb{P}$ auch *Fubini–Zahl* (`oeis.org/A000670`), oder *Bell–Zahl* (`en.wikipedia.org/wiki/Ordered_Bell_number`).

Wahlverfahren für 2 Individuen und 2 Alternativen

Aufgabe: Zählen Sie alle möglichen Abstimmungen (Voten) auf bei zwei Individuen, $I = \{1, 2\}$, und zwei Alternativen, $A = \{a, b\}$. Was ist jeweils das Ergebnis bei Mehrheitswahl M? **Lösung:**

$$\begin{array}{rccc}\hline 1: & a & \succ & b \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & a & \succ & b\end{array}\qquad\begin{array}{rccc}\hline 1: & a & \succ & b \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & a & \approx & b\end{array}\qquad\begin{array}{rccc}\hline 1: & a & \succ & b \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & a & \succ & b\end{array}$$

$$\begin{array}{rccc}\hline 1: & b & \succ & a \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & a & \approx & b\end{array}\qquad\begin{array}{rccc}\hline 1: & b & \succ & a \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & b & \succ & a\end{array}\qquad\begin{array}{rccc}\hline 1: & b & \succ & a \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & b & \succ & a\end{array}$$

$$\begin{array}{rccc}\hline 1: & a & \approx & b \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & a & \succ & b\end{array}\qquad\begin{array}{rccc}\hline 1: & a & \approx & b \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & b & \succ & a\end{array}\qquad\begin{array}{rccc}\hline 1: & a & \approx & b \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & a & \approx & b\end{array}$$

Dies definiert das Wahlverfahren $M : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P} : (P_1, P_2) \mapsto P$.

Wahlverfahren für 2 Individuen und 2 Alternativen

Aufgabe: Beschreiben Sie ebenso folgendes Wahlverfahren D_1: „Allein 1 entscheidet.“ (Das ist die lupenreine Diktatur.) **Lösung:**

$$\begin{array}{rccc}\hline 1: & a & \succ & b \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & a & \succ & b\end{array}\qquad\begin{array}{rccc}\hline 1: & a & \succ & b \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & a & \succ & b\end{array}\qquad\begin{array}{rccc}\hline 1: & a & \succ & b \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & a & \succ & b\end{array}$$

$$\begin{array}{rccc}\hline 1: & b & \succ & a \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & b & \succ & a\end{array}\qquad\begin{array}{rccc}\hline 1: & b & \succ & a \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & b & \succ & a\end{array}\qquad\begin{array}{rccc}\hline 1: & b & \succ & a \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & b & \succ & a\end{array}$$

$$\begin{array}{rccc}\hline 1: & a & \approx & b \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & a & \approx & b\end{array}\qquad\begin{array}{rccc}\hline 1: & a & \approx & b \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & b & \approx & a\end{array}\qquad\begin{array}{rccc}\hline 1: & a & \approx & b \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & a & \approx & b\end{array}$$

Dies definiert das Wahlverfahren $D_1 : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P} : (P_1, P_2) \mapsto P$.
Hier ist 1 der Diktator, und 2 hat keinerlei Einfluss auf das Ergebnis.

Wahlverfahren für 2 Individuen und 2 Alternativen

Aufgabe: Beschreiben Sie ebenso folgendes Wahlverfahren $D_{1,2}$: „Allein 1 entscheidet, nur bei Indifferenz entscheidet 2.“ **Lösung:**

$$\begin{array}{rccc}\hline 1: & a & \succ & b \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & a & \succ & b\end{array}\qquad\begin{array}{rccc}\hline 1: & a & \succ & b \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & a & \succ & b\end{array}\qquad\begin{array}{rccc}\hline 1: & a & \succ & b \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & a & \succ & b\end{array}$$

$$\begin{array}{rccc}\hline 1: & b & \succ & a \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & b & \succ & a\end{array}\qquad\begin{array}{rccc}\hline 1: & b & \succ & a \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & b & \succ & a\end{array}\qquad\begin{array}{rccc}\hline 1: & b & \succ & a \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & b & \succ & a\end{array}$$

$$\begin{array}{rccc}\hline 1: & a & \approx & b \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & a & \succ & b\end{array}\qquad\begin{array}{rccc}\hline 1: & a & \approx & b \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & b & \succ & a\end{array}\qquad\begin{array}{rccc}\hline 1: & a & \approx & b \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & a & \approx & b\end{array}$$

Dies definiert das Wahlverfahren $D_{1,2} : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P} : (P_1, P_2) \mapsto P$.
Historische Vorbilder: Ist's dem Diktator egal, so entscheidet seine Frau.

Wahlverfahren für 2 Individuen und 2 Alternativen

Zur Eingewöhnung betrachten wir zunächst die einfachsten Fälle.
Das klingt erst harmlos, ist aber bereits erstaunlich kompliziert!

Aufgabe: Wie viele Wahlverfahren $V : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ gibt es hier?

Lösung: Für $\sharp I = 2$ und $\sharp A = 2$ gibt es $3^{3 \cdot 3} = 19\,683$ Wahlverfahren.

Ausführlich: Die Menge $\mathbb{P}$ aller Präferenzen auf $A = \{a, b\}$ hat genau 3 Elemente: $\sharp\mathbb{P} = 3$ wie oben erklärt. Jeder Wähler hat also 3 mögliche Präferenzen. Die Wähler sind unabhängig voneinander. Die Anzahl möglicher Paare (P_1, P_2) ist demnach $\sharp(\mathbb{P} \times \mathbb{P}) = \sharp\mathbb{P} \cdot \sharp\mathbb{P} = 3 \cdot 3 = 9$. Ein Wahlverfahren ist eine Abbildung $V : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P} : (P_1, P_2) \mapsto P$. Hierzu gibt es genau $\sharp(\mathbb{P}^{\mathbb{P} \times \mathbb{P}}) = (\sharp\mathbb{P})^{\sharp\mathbb{P} \cdot \sharp\mathbb{P}} = 3^9 = 19\,683$ Möglichkeiten.

Zum Kontrast: $\sharp I = 2$ und $\sharp A = 3$ ergibt $13^{13 \cdot 13} = 13^{169} \approx 2 \cdot 10^{188}$.

Familienurlaub: $\sharp I = 4$ und $\sharp A = 3$ ergibt $13^{13^4} = 13^{28561} \approx 2 \cdot 10^{31815}$.

Die allgemeine Formel ist $\sharp\mathbb{P}^{\sharp\mathbb{P}^{\sharp I}}$. Das wird sofort unübersichtlich groß.
Die allermeisten sind wenig sinnvoll, aber es sind Wahlverfahren.
Wir wollen *alle* Wahlverfahren beschreiben und die *sinnvollen* finden.
Offensichtlich versagt hier jeder *brute force* Ansatz. Doch Denken hilft!

Wahlverfahren: allgemeine Definition

Gegeben sei die Menge $I = \{1, 2, \dots, n\}$ der Individuen/Kriterien, $n \ge 2$, und die Menge $A = \{a, b, c, \dots\}$ der Alternativen/Kandidaten, $\sharp A \ge 2$. Wie oben erklärt sei $\mathbb{P} = \mathbb{P}(A)$ die Menge aller Präferenzen auf A.

Definition H2A (Wahlverfahren)

Ein **Wahlverfahren** V ist eine Funktion (= Zuordnung = Abbildung)

$$V \,:\, \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} \,:\, (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P.$$

Beispiel: (Diktatur) Zu $k \in I$ definieren wir die Funktion

$$D_k \,:\, \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} \,:\, (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P_k.$$

Das ist ein sehr einfaches Wahlverfahren, vermutlich auch das älteste; es ist leider immer noch weit verbreitet bis heute überaus relevant.

Definition H2B (Diktator)

Im Verfahren V heißt $k \in I$ **Diktator**, wenn aus $x \succ_k y$ stets $x \succ y$ folgt.
DIC: Gibt es einen Diktator, so heißt das Verfahren V *diktatorisch*.
~~DIC~~: Gibt es keinen Diktator, so nennen wir V *nicht-diktatorisch*.

Wahlverfahren: allgemeine Definition

Jeder möglichen Stimmabgabe $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ wird als Auswertung das zugehörige Ergebnis P zugeordnet. In der Mathematik und Informatik nennt man das eine *Abbildung* oder *Funktion*. Wir stellen uns dies als eine Methode vor, einen Algorithmus, eine Verfassung, eine Konstitution.

Das Wahlverfahren ist deterministisch, ohne zufällige Entscheidungen: Losverfahren können nützlich sein, werden hier aber nicht betrachtet.

Das Wahlverfahren berücksichtigt *alle* möglichen Fälle. Die Individuen sind unabhängig, alle Konstellationen $(P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{P}^n$ können auftreten. Das Wahlverfahren $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ muss aus jeder Eingabe $(P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{P}^n$ eine gemeinsame Rangfolge $P \in \mathbb{P}$ bilden.

Das Ergebnis P soll ebenfalls transitiv und linear sein!

Beispiel: Für den einfachsten Fall $I = \{1, 2\}$ und $A = \{a, b\}$ haben wir oben drei Wahlverfahren beispielhaft ausgeschrieben: Die Verfahren D_1 und $D_{1,2}$ sind diktatorisch, M ist nicht-diktatorisch; Sie können viele weitere Verfahren wie D_2 oder $D_{2,1}$ etc. erfinden. Schon in diesem allereinfachsten Fall gibt es $19\,683$ Möglichkeiten. Die meisten sind vermutlich wenig nützlich, aber es sind Wahlverfahren.

Mehrheitswahl für n Individuen und 2 Alternativen

In diesem Abschnitt bestehe $A = \{a, b\}$ aus zwei Alternativen, $a \ne b$. Die Menge $I = \{1, 2, \dots, n\}$ der Individuen ist endlich, mit $n \ge 2$.

Aufgabe: Formulieren Sie die Mehrheitswahl durch Stimmenzählung,

$$M \,:\, \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} \,:\, (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P.$$

Lösung: Genau dann gilt $x \succcurlyeq y$, wenn $\sharp\{\, i \mid x \succcurlyeq_i y \,\} \ge \sharp\{\, i \mid y \succcurlyeq_i x \,\}$. Also $P := \big\{\, (x, y) \in A \times A \,\big|\, \sharp\{\, i \mid (x, y) \in P_i \,\} \ge \sharp\{\, i \mid (y, x) \in P_i \,\} \,\big\}$.

Aufgabe: Sei $\mu : I \to [0, 1]$ eine Gewichtung mit $\mu(1) + \dots + \mu(n) = 1$. Für jede Teilmenge $J \subseteq I$ ist dann ihr Stimmgewicht $\mu(J) := \sum_{i \in J} \mu(i)$. Formulieren Sie die Mehrheitswahl durch gewichtete Stimmenzählung,

$$M_\mu \,:\, \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} \,:\, (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P.$$

Lösung: Genau dann gilt $x \succcurlyeq y$, wenn $\mu\{\, i \mid x \succcurlyeq_i y \,\} \ge \mu\{\, i \mid y \succcurlyeq_i x \,\}$. Also $P := \big\{\, (x, y) \in A \times A \,\big|\, \mu\{\, i \mid (x, y) \in P_i \,\} \ge \mu\{\, i \mid (y, x) \in P_i \,\} \,\big\}$.
Beispiele: Für $\mu = (1/n, 1/n, \dots, 1/n)$ erhalten wir $M_\mu = M$ wie oben. Die Diktatur $D_k = M_\mu$ entspricht $\mu(k) = 1$, es genügt $\mu(k) > 1/2$.

Mehrheitswahl für n Individuen und 2 Alternativen

Die Mehrheitswahl scheint selbstverständlich, aber es lohnt, sie einmal explizit auszuformulieren, wie die US-Präsidentschaftswahlen zeigen. Die Beschreibung des Wahlverfahrens muss klar und eindeutig sein. Im Idealfall, so wie hier, ein Algorithmus zur Stimmauszählung.

Aufgabe: Ist das wirklich ein Wahlverfahren? Was ist hier zu prüfen?

Lösung: Wir müssen prüfen, dass das Ergebnis P in allen Fällen eine Präferenz auf $A = \{a, b\}$ ist, also transitiv und linear. Hierzu vergleichen wir die Auszählungen, $\delta = \mu\{\, i \mid (a, b) \in P_i \,\} - \mu\{\, i \mid (b, a) \in P_i \,\}$:

- Im Falle $\delta > 0$ gilt $P = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$, kurz $a \succ b$.
- Im Falle $\delta < 0$ gilt $P = \{(a, a), (b, a), (b, b)\}$, kurz $b \succ a$.
- Im Falle $\delta = 0$ gilt $P = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$, kurz $a \approx b$.

In jedem der drei Fälle ist P tatsächlich eine Präferenz auf $A = \{a, b\}$.

Bemerkung: Das ist wenig überraschend, muss aber überprüft werden. Ich betone es hier, weil es eine Besonderheit bei zwei Alternativen ist; für drei oder mehr Alternativen ist die Stimmenzählung *kein* Wahlverfahren! Dies ist das Paradox von Condorcet (siehe unten, Satz H3A)

Gute Eigenschaften / sinnvolle Forderungen

Die Mehrheitswahl erfreut sich folgender Eigenschaften:

UNA: Einhelligkeit. Gilt $a \succ_i b$ für alle $i \in I$, so folgt $a \succ b$. Als Tabelle:

$$\begin{array}{cccc} \hline I: & a & \succ & b \\ \hline & a & \succ & b \end{array}$$

MON: Monotonie. Angenommen, $(P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$ ergibt $a \succcurlyeq b$, und bei einem Vergleichswahlgang $(P'_1, P'_2, \dots, P'_n) \mapsto P'$ wächst die Unterstützung für a und sinkt die Unterstützung für b. Dann gilt $a \succcurlyeq' b$.

$$\begin{array}{cccc} \hline a & \succ & b & :J \\ a & \approx & b & :U \\ b & \succ & a & :K \\ \hline a & \succcurlyeq & b & \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ \subseteq \\ \\ \supseteq \\ \Longrightarrow \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \hline J': & a & \succ' & b \\ U': & a & \approx' & b \\ K': & b & \succ' & a \\ \hline & a & \succcurlyeq' & b \end{array}$$

Ausgeschrieben: Angenommen, es gilt $\{\, i \mid a \succcurlyeq_i b \,\} \subseteq \{\, i \mid a \succcurlyeq'_i b \,\}$ und $\{\, i \mid b \succcurlyeq_i a \,\} \supseteq \{\, i \mid b \succcurlyeq'_i a \,\}$. Dann gilt: Aus $a \succcurlyeq b$ folgt $a \succcurlyeq' b$.

Gute Eigenschaften / sinnvolle Forderungen

Einhelligkeit nennt man auch *Einstimmigkeit* oder *Souveränität*: Die Gruppe I kann bei Einstimmigkeit das Ergebnis $a \succ b$ erreichen.

Die *Monotonie* garantiert die *positive Korrelation* zwischen individuellen Präferenzen und dem Ergebnis für je zwei Alternativen a und b: Wenn in einer zweiten Wahl mehr für a stimmen und weniger für b, dann darf sich das Ergebnis nur zu Gunsten von a ändern, nicht zu Ungunsten von a.

Einhelligkeit und Monotonie sind gute und wichtige Eigenschaften. Das ist nicht nur Theorie, sondern ein ganz praktisches Problem: Zur Vergabe von Parlamentssitzen muss sinnvoll gerundet werden. In Deutschland entstehen zudem durch Erst- und Zweitstimme Überhangmandate; das Wahlgesetz formuliert hierzu die Regeln. Eine gefürchtete Paradoxie ist dabei das *negative Stimmgewicht*:

Beispiel: Nach Tod einer Direktkandidatin kam es 2005 im Wahlkreis Dresden I zu einer Nachwahl, bei der die CDU durch eine *geringere* Zweitstimmenzahl ein *zusätzliches* Mandat im Bundestag errang. Nach Klagen erklärte das Bundesverfassungsgericht daher 2008 und erneut 2012 das Bundestagswahlrecht für verfassungswidrig.

Gute Eigenschaften / sinnvolle Forderungen

Aus Monotonie folgt **Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen:**

UIA: Sind bei $(P_1, \dots, P_n) \mapsto P$ und $(P'_1, \dots, P'_n) \mapsto P'$ alle individuellen Präferenzen zwischen a und b gleich, so auch das Ergebnis.

$$\begin{array}{cccc} \hline a & \succ & b & :J \\ a & \approx & b & :U \\ b & \succ & a & :K \\ \hline a & \succcurlyeq & b & \end{array} \qquad \begin{array}{c} = \\ = \\ = \\ \Longleftrightarrow \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \hline J': & a & \succ' & b \\ U': & a & \approx' & b \\ K': & b & \succ' & a \\ \hline & a & \succcurlyeq' & b \end{array}$$

Sei $\{\, i \mid a \succcurlyeq_i b \,\} = \{\, i \mid a \succcurlyeq'_i b \,\}$ und $\{\, i \mid b \succcurlyeq_i a \,\} = \{\, i \mid b \succcurlyeq'_i a \,\}$. Dann gilt $a \succcurlyeq b$ genau dann, wenn $a \succcurlyeq' b$ gilt.

SYM: Symmetrie. Das Ergebnis ändert sich nicht bei Umordnung; $V(P_1, P_2, \dots, P_n) = V(P_{\tau 1}, P_{\tau 2}, \dots, P_{\tau n})$ für jede Umordnung τ.

Gilt dies, so nennen wir das Wahlverfahren V *symmetrisch*. Das extreme Gegenteil ist die Diktatur (wie oben erklärt).

Gute Eigenschaften / sinnvolle Forderungen

Bei nur zwei Alternativen ist UIA automatisch erfüllt. (Klar! Warum?) Für drei und mehr Alternativen jedoch ist es eine wichtige Eigenschaft.

Sie besagt: Für das Ergebnis zwischen a und b sind weitere Alternativen irrelevant. Wir können sie ausblenden und brauchen uns für (a, b) nur um die paarweisen individuellen Vergleiche von a und b kümmern.

Anders gesagt: Wenn sich das Verhältnis von a und b individuell nicht ändert, dann auch nicht das Ergebnis. Die Verhältnisse zu den anderen Alternativen dürfen sich beliebig ändern, für (a, b) spielt das keine Rolle.

Bei *Symmetrie* sind alle Individuen gleichberechtigt. Solche Verfahren heißen auch *anonym*, denn die Identität der Wähler spielt keine Rolle. Dies ist eine starke Forderung. Stimmgewichtung bricht die Symmetrie:

Beispiel: In einer Föderation unterschiedlich großer Länder kann die Stimme jedes Vertreters proportional zur Bevölkerung gewichtet werden.

Der US-Präsident wird indirekt gewählt, durch Wahlmänner; ungleiche Aufteilung auf die Bundesstaaten führt zu ungleichen Stimmgewichten: Ein Wahlmann repräsentiert von etwa $190\,000$ bis zu $670\,000$ Stimmen.

Mehrheitswahl mit Schranken

-1 $\quad \alpha = \beta = 0 \quad$ $+1$

Wir bilden die Differenz $\delta = \mu\{\, i \mid a \succcurlyeq_i b \,\} - \mu\{\, i \mid b \succcurlyeq_i a \,\}$ und setzen
$b \succ a$ falls $\delta < \beta$, $\quad a \approx b$ falls $\beta \le \delta \le \alpha$, $\quad a \succ b$ falls $\delta > \alpha$.

-1 $\quad \beta \quad$ α $\quad +1$

Wir nennen $M_\mu^{\alpha,\beta}$ das *qualifizierte Mehrheitswahlverfahren* bzgl. μ, α, β.
Beispiel: Bei $\alpha = \beta = 1/3$ benötigt Alternative a eine Zweidrittelmehrheit.

-1 $\quad \beta = \alpha = 1/3 \quad$ $+1$

Was kann eine Teilmenge $J \subseteq I$ mit Stimmgewicht $\mu(J) = 1/2$ erreichen?
Sie kann $b \succ a$ erzwingen, aber nicht $a \succ b$, nur $a \succcurlyeq b$ verhindern. (Veto)

Satz H2C (Kenneth May 1952)

*Sei $A = \{a, b\}$ und $\mathbb{S} = \{a \succ b, b \succ a\}$ die Menge strikter Präferenzen.
Erfüllt $V : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}$ Einhelligkeit und Monotonie und Symmetrie, dann ist
$V = M_\sharp^{\alpha,\beta}$ die Mehrheitswahl mit gewissen Schranken $-1 < \beta \le \alpha < 1$.*

Mehrheitswahl mit Schranken

Den zu erreichenden Stimmenanteil nennt man auch das *Quorum*.
Hierzu sei $-1 < \beta \le \alpha < 1$. Für $\alpha = \beta = 0$ erhalten wir M_μ wie zuvor.
Für $\beta = -\alpha$ werden beide Alternativen a und b gleich behandelt, man nennt solche Verfahren *neutral* oder *symmetrisch in den Alternativen*.

Bemerkung: Wir untersuchen später entscheidende Teilmengen $J \subseteq I$ (Definition H3D). Im obigen Beispiel $\alpha = \beta = 1/3$ der Zweidrittelmehrheit ist $J \subseteq I$ mit $\mu(J) = 1/2$ entscheidend für (b, a) aber nicht für (a, b).

Ich betone dies hier, weil es eine Besonderheit bei zwei Alternativen ist; bei drei und mehr Alternativen gilt genau das Gegenteil (Lemma H3E).

Typische Anwendung: In vielen Demokratien, auch in Deutschland, ist für Verfassungsänderungen eine Zweidrittelmehrheit erforderlich. Dies dient dem Minderheitenschutz, da ein Drittel der Stimmen genügt, um eine Verfassungsänderung zu verhindern. Einfache Gesetze hingegen werden mit geringerer Zustimmungsquote beschlossen.

Wahlverfahren für zwei Alternativen

Zusammenfassung wichtiger Wahlverfahren und ihrer Eigenschaften:

	UNA einhellig	MON monoton	~~DIC~~ nicht-diktatorisch	SYM symmetrisch
Diktatur D_k	✓	✓	✗	✗
Mehrheitswahl M	✓	✓	✓	✓
mit Gewichtung M_μ	✓	✓	(✓)	(✗)
mit Schranken $M_\mu^{\alpha,\beta}$	✓	✓	(✓)	(✗)

Eine **Präferenz** ist eine transitive und lineare Relation auf A.
Sei $\mathbb{P}$ die Menge aller Präferenzen auf der Menge A der Alternativen.

Ein **Wahlverfahren** ist eine Funktion $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$.
Das bedeutet, jeder möglichen Konstellation individueller Präferenzen $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathbb{P}$ wird als Ergebnis eine Präferenz $P \in \mathbb{P}$ zugeordnet.

Es gibt sehr viele Wahlverfahren; wir wollen die guten hervorheben:
Wir nennen V **perfekt**, wenn die Zuordnung $(P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$ einhellig, monoton und nicht-diktatorisch ist. Unsere Untersuchungen für $\sharp A = 2$ zeigen viele nützliche Beispiele von perfekten Wahlverfahren.

Zusammenfassung der wichtigsten Eigenschaften

Zur Erinnerung mögliche Eigenschaften eines Wahlverfahrens V:

UNA: Einhelligkeit. Gilt $a \succ_i b$ für alle $i \in I$, so folgt $a \succ b$.

MON: Monotonie. Angenommen, $(P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$ ergibt $a \succcurlyeq b$ und bei einem Vergleichswahlgang $(P_1', P_2', \dots, P_n') \mapsto P'$ wächst die Unterstützung für a und sinkt die Unterstützung für b. Dann gilt $a \succcurlyeq' b$.

UIA: Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen.
Sind bei $(P_1, \dots, P_n) \mapsto P$ und $(P_1', \dots, P_n') \mapsto P'$ alle individuellen Präferenzen zwischen a und b gleich, so auch das Ergebnis.

SYM: Symmetrie. Das Ergebnis ändert sich nicht bei Umordnung;
$V(P_1, P_2, \dots, P_n) = V(P_{\tau 1}, P_{\tau 2}, \dots, P_{\tau n})$ für jede Umordnung τ.
In diesem Sinne sind alle Individuen/Kriterien gleichberechtigt.

Im Verfahren V heißt $k \in I$ **Diktator**, wenn aus $x \succ_k y$ stets $x \succ y$ folgt.
DIC: Gibt es einen Diktator, so heißt das Verfahren V *diktatorisch*.
~~DIC~~: Gibt es keinen Diktator, so nennen wir V *nicht-diktatorisch*.

Nicolas de Condorcet (1743–1794)

Nicolas de Condorcet war ein französischer Philosoph, Mathematiker und Politiker der Aufklärung. Er studierte Mathematik bei d'Alembert und promovierte bereits mit 16 Jahren. Sein berühmtes Paradox beschrieb er 1785 in einer Arbeit über Wahrscheinlichkeit und Abstimmungen. Es geriet in Vergessenheit, wurde mehrfach wiederentdeckt und wieder vergessen; dauerhafte Anerkennung verschaffte ihm erst Kenneth Arrow 1951, indem er seinen allgemeinen Unmöglichkeitssatz daraus ableitete.

Bildquelle: www.wikipedia.org

Einige Werke: 1765: Du calcul intégral. 1767: Du problème des trois corps. 1768: Essai d'analyse. 1776: Fragments sur la liberté de la presse. 1778: Sur quelques séries infinies. 1780: Essai sur la théorie des comètes. 1781: Réflexions sur l'esclavage des nègres. 1784: Mémoire sur le calcul des probabilités. 1789: Vie de Voltaire. 1790: Sur l'admission des femmes au droit de cité.

Nicolas de Condorcet (1743–1794)

Condorcet schließt sich 1789 der Französischen Revolution an und vertritt die Sache der Liberalen. Im Jahr 1790 werden die Menschen- und Bürgerrechte verkündet; Condorcet tritt dafür ein, diese auch Frauen zu gewähren, er streitet für die Einführung des Frauenwahlrechts, die Gleichberechtigung der Schwarzen und die Abschaffung der Sklaverei.

Condorcet wurde 1791 als Pariser Abgeordneter in die Gesetzgebende Nationalversammlung gewählt, 1792 wurde er deren Präsident. In dieser Funktion entwarf er Pläne für das Bildungssystem (*l'instruction publique*). Bildungsunterschiede seien die Hauptursache der Tyrannei. Daher trat Condorcet schon früh für allgemein zugängliche Bildungseinrichtungen ein, die unabhängig von staatlichem Einfluss sein sollten.

Im *Comité de Constitution* arbeitet Condorcet mit an einer Verfassung. 1793 kommen die Jacobiner an die Macht und schlagen eine gänzlich andere Verfassung vor. Condorcet kritisiert diese und wird daraufhin wegen Verrats verurteilt. Er versteckt sich 8 Monate lang, im März 1794 wird er verhaftet und stirbt unter unklaren Umständen, vermutlich Suizid durch Gift. (`fr.wikipedia.org/wiki/Nicolas_de_Condorcet`)

Das Paradox von Condorcet

Können wir paarweise Stimmzählung auf drei Alternativen anwenden? Wir setzen $x \succcurlyeq y$ genau dann, wenn $\sharp\{\, i \mid x \succcurlyeq_i y \,\} \ge \sharp\{\, i \mid y \succcurlyeq_i x \,\}$

Aufgabe: Ist dies ein Wahlverfahren $C : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$? Analysieren Sie konkrete Beispiele, wie etwa folgende Abstimmung:

$40\%:$	a	$\succ$	b	$\succ$	c
$35\%:$	b	$\succ$	c	$\succ$	a
$25\%:$	c	$\succ$	a	$\succ$	b

Lösung: Nein! Es gibt Gegenbeispiele wie die obige Abstimmung. Stimmzählung: 65% sagen $a \succ b$, 75% sagen $b \succ c$, 60% sagen $c \succ a$. Sie kennen das von *Schere, Stein, Papier*. Das Wahlergebnis ist in diesem (und ähnlichen) Fällen nicht transitiv und daher unbrauchbar.

Satz H3A (Nicolas de Condorcet, 1785)

Für $\sharp A \ge 3$ ist die paarweise Stimmzählung kein Wahlverfahren $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$.

Aufgabe: Entwickeln Sie Wahlverfahren für drei und mehr Alternativen! Welche guten Eigenschaften können Sie erreichen? Gelingen alle?

Das Paradox von Condorcet

In vielen praktischen Anwendungen gibt jeder Wähler nur seinen Favoriten an, also den individuell Erstplatzierten. Daraus wird der Gesamterstplatzierte ermittelt. Dies entspricht einer Funktion

$$v \,:\, A^I \to A \,:\, (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x.$$

Beispiel: Wir wählen die Alternative mit den meisten Stimmen.

Aufgabe: Ist das besser? Wo liegt das Problem bei diesem Verfahren?

Lösung: Wenn jeder ehrlich abstimmt, dann gewinnt Kandidat a.

Die Präferenzen seien vor der Wahl bekannt, etwa durch Umfragen. Wähler der zweiten Gruppe sehen: Wenn sie ehrlich für b stimmen, so gewinnt a. Wenn sie strategisch für c stimmen, so gewinnt c; das ist in ihrer Sicht eine Verbesserung. Das Wahlverfahren veranlasst sie, zu spekulieren und unehrlich abzustimmen. Das ist gefährlich.

Wähler der ersten Gruppe könnten dies antizipieren, und schon bei den Umfragen unehrlich b als Favorit angeben. Diese denken, das jene denken, … es entsteht ein heilloses Durcheinander. Unehrlichkeit und Misstrauen sind keine tragfähige Grundlage für demokratische Wahlen.

Die Qual der Wahl des Wahlverfahrens

H305 Erläuterung

Szenario: Schülervertreter aus J1 und J2 wählen ihre beliebtesten Lehrer aus Astronomie (A), Biologie (B) und Chemie (C). Dazu nennt jeder Schüler seine Lieblingsreihenfolge von oben nach unten:

Votum J1

1	2	3	4	5	6	7
C	C	A	A	B	B	C
A	A	B	B	C	C	B
B	B	C	C	A	A	A

Ergebnis

Bor	Maj	Med	Duell	Dikt	Konst

Votum J2

1	2	3	4	5	6	7
A	A	B	B	B	B	C
C	C	A	C	C	C	B
B	B	C	A	A	A	A

Ergebnis

Bor	Maj	Med	Duell	Dikt	Konst

Alternatives Szenario: Die Arrow–Schule (A), die Borda–Schule (B) und die Cusanus–Schule (C) messen sich in sieben Sportarten $1, \dots, 7$.

Die Qual der Wahl des Wahlverfahrens

H306 Erläuterung

Borda–Verfahren (Bor): Jeder erste Platz zählt 3 Punkte, jeder zweite 2 Punkte, jeder dritte noch 1 Punkt. Die Punkte werden addiert und die Summen sortiert. Dieses Verfahren bezeichnen wir mit $B(3,2,1)$.

Mehrheitswahl (Maj): Es zählen nur die ersten Plätze, die Alternative mit den meisten ersten Plätzen ist die beste, die mit den zweitmeisten ersten Plätzen die nächstbeste, usw. Dies entspricht $B(1,0,0)$.

Medaillenspiegel (Med): Die Alternative mit den meisten ersten Plätzen ist die beste, haben zwei Alternativen gleich viele erste Plätze, dann zählen die zweiten Plätze, bei Gleichstand die dritten Plätze. Ebenso werden die anderen Plätze bestimmt. Dies entspricht hier $B(100,10,1)$.

Duell: Zuerst treten A und B im Duell an, es gilt die Mehrheitswahl. Der Gewinner tritt gegen C an. Gewinnt er hier wieder, dann gibt es noch ein Duell um Platz 2 und 3. (Man müsste zudem noch festlegen, was bei Gleichstand passieren soll; das kann uns hier aber nicht passieren).

Diktatur: Wir bestimmen Schüler 2 zum Diktator (Schülersprecher), bzw. die zweite Sportart (Handball). In obiger Notation ist dies D_2.

Konst: Das Gesamtergebnis ist immer A vor B vor C.

Die Qual der Wahl des Wahlverfahrens

H307 Erläuterung

Aufgabe: (1) Werten Sie jeweils die Ergebnisse von J1 bzw. J2 aus.

(2) Finden Sie für jedes Verfahren ein verletztes Axiom UNA, UIA, ~~DIC~~.

Diese Eigenschaften dienen uns als theoretische Hilfsmittel; sie sind keine willkürlichen Idealisierungen, sondern dringende Notwendigkeiten! Ist Monotonie MON nicht erfüllt, so ist das Wahlverfahren manipulierbar:

(3) Der Schulleiter des Cusanus–Gymnasiums möchte die Wahl des beliebtesten Lehrers in J1 beeinflussen. Dazu wählt er das Duell-Verfahren. Wie muss er die Reihenfolge der Duelle wählen, damit der Astronomie-Lehrer als beliebtester Lehrer gewählt wird?

(4) Die beste Schule soll im zweiten Jahr J2 mit einem modifizierten Borda–Verfahren $B(p,q,r)$ ermittelt werden. Dabei bekommt jeder erste Platz p Punkte, jeder zweite q Punkte und jeder dritte Platz r Punkte. Wie setzt der Schulleiter $p > q > r$, damit seine Schule gewinnt?

(5) Zur Vereinfachung werten wir hier strikte Präferenzen aus, aber die Ergebnispräferenz muss nicht strikt sein, da ein Gleichstand manchmal unvermeidbar ist. Wer möchte, kann sich überlegen, wie man diese Verfahren sinnvoll auf evtl. nicht-strikte Präferenzen erweitern kann.

Die Qual der Wahl des Wahlverfahrens

H308 Erläuterung

	UNA	UIA	MON	~~DIC~~	SYM
Bor					
Maj					
Med					
Duell					
Dikt					
Konst					

Jedes dieser Verfahren wurde kritisiert, weil es gewisse Anforderungen verletzt. Dutzende weitere Wahlverfahren wurden vorgeschlagen, doch fand niemand ein perfektes Wahlverfahren. Arrows Forschungsauftrag war 1948, ein solches Verfahren zu entwickeln; seine Lösung war vollkommen überraschend: Ein perfektes Verfahren existiert nicht!

That was it! It took about five days to write in September 1948.
When every attempt failed I thought of the impossibility theorem.

Sylvia Nasar, *A Beautiful Mind*, Faber & Faber, London 1999, S. 108

Arrows Satz vom Diktator

Bei nur zwei Alternativen, also $\sharp A = 2$, erfüllt die Stimmzählung alle drei wünschenswerten Eigenschaften: Einhelligkeit, Monotonie, Symmetrie.

Wir wünschen ein solches Wahlverfahren für drei und mehr Alternativen. Das Paradox von Condorcet zeigt, dass der naive Versuch fehlschlägt.

Schlimmer noch: Es gibt nachweislich überhaupt kein solches Verfahren! Kenneth Arrow bewies 1948 folgenden Satz, veröffentlicht 1951:

Satz H3B (Satz vom Diktator, Kenneth Arrow 1951)

Die Menge A bestehe aus drei oder mehr Alternativen. Erfüllt $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ die Forderungen der Einhelligkeit und Monotonie, so ist V diktatorisch.

Wir wünschen uns zwei harmlos anmutende Eigenschaften UNA und MON, daraus folgt zwingend die unerwünschte Eigenschaft DIC.

Statt Monotonie (MON) genügt es sogar, nur das schwächere Axiom der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen (UIA) zu fordern.

Arrows Satz vom Diktator

Mit schwächeren Voraussetzungen erhalten wir einen stärkeren Satz:

Satz H3C (Satz vom Diktator, Kenneth Arrow 1951)

Die Menge A bestehe aus drei oder mehr Alternativen. Erfüllt ein Wahlverfahren $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ die Forderungen der Einhelligkeit und Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen, so ist V diktatorisch.

Die Monotoniebedingung MON mag zuerst unnötig streng erscheinen. Wir verlangen zwei noch harmlosere Eigenschaften, UNA und UIA, und auch daraus folgt zwingend die unerwünschte Eigenschaft DIC.

Dieses negative Ergebnis ist höchst überraschend, gar schockierend. Gute Nachricht: Wir müssen es nicht *glauben*, wir können es *beweisen*. Der Beweis ist nicht schwer; dank unserer gründlichen Vorbereitung haben wir bereits alle nötigen Begriffe und Werkzeuge zur Hand.

Entscheidende Teilmengen

Definition H3D (entscheidende Teilmengen)

Sei $\mathbb{P} = \mathbb{P}(A)$ und $V : \mathbb{P}^I \to \mathbb{P}$ ein Wahlverfahren. Eine Teilmenge $J \subseteq I$ heißt **entscheidend** für das Paar $(a, b) \in A \times A$, wenn für jedes Votum $V : (P_1, \dots, P_n) \mapsto P$ gilt: Aus $a \succ_J b$ folgt $a \succ b$.

Beispiel: Dank Einhelligkeit ist I entscheidend für jedes Paar (a, b). Die leere Menge $\emptyset$ hingegen ist niemals entscheidend.

Bei der Diktatur $D_k : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ ist $J \subseteq I$ entscheidend gdw $k \in J$. Hier ist somit $J = \{k\}$ die minimale entscheidende Teilmenge.

Bei nur zwei Alternativen haben wir zudem die Wahlverfahren $M_\mu^{\alpha,\beta}$. Bei Mehrheitswahl $M_\mu : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ ist $J \subseteq I$ entscheidend gdw $\mu(J) > \frac{1}{2}$.

Mit Quorum $M_\mu^{\alpha,\beta}$ und $\delta = \mu(J) - \mu(I \smallsetminus J) = 2\mu(J) - 1 \in [-1, 1]$ ist J entscheidend für (a, b) gdw $\delta > \alpha$, und für (b, a) gdw $-\delta < \beta$.

Im Allgemeinen gibt es mehrere (minimale) entscheidende Teilmengen. Denken Sie zum Beispiel an mögliche Koalitionen in einem Parlament.

Entscheidende Teilmengen

Entscheidend zu sein ist zunächst eine Eigenschaft des Tripels (J, a, b). In Worten: Eine Teilmenge $J \subseteq I$ ist entscheidend für das Paar (a, b), wenn sie das Ergebnis $a \succ b$ erzwingen kann entgegen allen anderen.

Das einfachste und typische Beispiel ist die direkte Konfrontation:

$$\begin{array}{r|ccc} \hline J: & a & \succ & b \\ I \smallsetminus J: & b & \succ & a \\ \hline & a & \succ & b \end{array}$$

Dank Monotonie genügt dieser einfache Test: Das Votum von $I \smallsetminus J$ ist dann unerheblich. Wie üblich bezeichnet $I \smallsetminus J$ die Restmenge I ohne J. Zur Vereinfachung nutzen wir im Folgenden zunächst Monotonie.

Auch ohne Monotonie formulieren wir die Definition wie oben genannt. Neben der direkten Konfrontation fordern wir sie für alle Konstellationen. Die Abkürzung $a \succ_J b$ bedeutet $a \succ_i b$ für alle $i \in J$. Demnach ist J entscheidend für (a, b), wenn für jedes Votum $V : (P_1, \dots, P_n) \mapsto P$ gilt:

$$\big[\forall i \in J : (a, b) \in P_i \wedge (b, a) \notin P_i\big] \implies (a, b) \in P \wedge (b, a) \notin P$$

Entscheidend bedeutet allmächtig.

Lemma H3E (Entscheidend bedeutet allmächtig.)

Es gebe mindestens drei Alternativen, $\sharp A \ge 3$. Wie zuvor sei $\mathbb{P} = \mathbb{P}(A)$. Das Wahlverfahren $V : \mathbb{P}^I \to \mathbb{P}$ erfülle UNA und UIA. Entscheidet $J \subseteq I$ für ein Paar (a,b), so entscheidet J für alle Paare $(x,y) \in A \times A$.

Sei J entscheidend für (a,b). Da es mindestens drei Alternativen gibt, sei x eine weitere Alternative. Wir untersuchen folgende Abstimmung:

$$\begin{array}{rccccc}
\hline
J: & x & \succ & a & \succ & b \\
I \smallsetminus J: & x & \succ & a & & \\
\hline
\end{array}$$

Es folgt $x \succ a$ dank Einhelligkeit und $a \succ b$, denn J entscheidet für (a,b), also $x \succ b$ dank Transitivität. Dank UIA ist J entscheidend für (x,b).

Ebenso analysieren wir folgende Abstimmung:

$$\begin{array}{rccccc}
\hline
J: & a & \succ & b & \succ & y \\
I \smallsetminus J: & & & b & \succ & y \\
\hline
\end{array}$$

Es folgt $b \succ y$ dank Einhelligkeit und $a \succ b$, denn J entscheidet für (a,b), also $a \succ y$ dank Transitivität. Dank UIA ist J entscheidend für (a,y). $\boxed{\text{QED}}$

Entscheidend bedeutet allmächtig.

So fortfahrend können wir (a,b) zu jedem Paar (x,y) tauschen. Das beweist die Behauptung des Lemmas.

Wir betrachten hier ein beliebiges Wahlverfahren $V : \mathbb{P}^I \to \mathbb{P}$. Das Lemma beruht allein auf drei einfachen Eigenschaften:

- Es gibt mindestens drei Alternativen, also $\sharp A \ge 3$.
- Zu jedem Votum $V : (P_i)_{i \in I} \mapsto P$ ist das zugehörige Ergebnis $P \in \mathbb{P}$ eine Präferenz, also wie vereinbart $P \subseteq A \times A$ transitiv und linear.
- Das Wahlverfahren erfüllt die beiden Axiome der Einhelligkeit (UNA) und Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen (UIA).

Für das Lemma ist die Menge I beliebig, endlich oder unendlich. Den unendlichen Fall untersuchen wir später noch etwas genauer.

Für den nächsten Schritt setzen wir nun I als endlich voraus. Hierin sei $J \subseteq I$ eine entscheidende Teilmenge (für ein und somit für jedes Paar). Ist $J \smallsetminus \{j\}$ entscheidend, so können wir J verkleinern. Nach endlich vielen Schritten erhalten wir eine minimale entscheidende Menge.

Beweis des Satzes vom Diktator

Entscheidend für ein Paar bedeutet entscheidend für alle Paare (H3E). Mit dieser Vorbereitung beweisen wir Arrows Unmöglichkeitssatz H3B:

Sei $J \subseteq I$ entscheidend und minimal. Das bedeutet, die Teilmenge J ist entscheidend aber keine echte Teilmenge $J' \subsetneq J$ ist entscheidend. Wir wissen $J \ne \emptyset$ dank Einhelligkeit. Sei $k \in J$.

Wir untersuchen folgende Abstimmung (à la Condorcet):

$$\begin{array}{rccccc}
\hline
k: & a & \succ & x & \succ & b \\
J \smallsetminus k: & b & \succ & a & \succ & x \\
I \smallsetminus J: & x & \succ & b & \succ & a \\
\hline
\end{array}$$

Was finden wir? Zunächst folgt $a \succ x$, denn J ist entscheidend. Gälte $b \succ x$, so wäre $J \smallsetminus k$ entscheidend und J nicht minimal. Dank Linearität folgt somit $x \succcurlyeq b$. Dank Transitivität folgt $a \succ b$.

Nur das Individuum k wertet $a \succ b$, alle anderen werten $b \succ a$. Somit ist k entscheidend für das Paar (a,b), also für alle Paare. Da J minimal ist, gilt also $J = \{k\}$. Demnach ist k ein Diktator! $\boxed{\text{QED}}$

Beweis des Satzes vom Diktator

Erst in diesem letzten Schritt nutzen wir, dass die Menge I endlich ist. Benutzt haben wir tatsächlich nur die Voraussetzungen von Satz H3B:

- Es gibt mindestens drei Alternativen, also $\sharp A \ge 3$.
- Die Menge I der Individuen ist endlich, $\sharp I < \infty$.
- Das Wahlverfahren $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ erfüllt die beiden Axiome der Einhelligkeit (UNA) und der Monotonie (MON).

Allein aus diesen sehr geringen Forderungen folgt der Satz von Arrow.

Nochmal: Dieses negative Ergebnis ist überraschend, gar schockierend. Gute Nachricht: Wir müssen es nicht *glauben*, wir haben es *bewiesen*. Der Beweis ist nicht schwer; dank unserer gründlichen Vorbereitung haben wir bequem alle nötigen Begriffe und Werkzeuge zur Hand.

Zur Vereinfachung haben wir die starke (und somit bequeme) Forderung der Monotonie (MON) genutzt statt der schwächeren (mühsameren) Forderung der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen (UIA).

Aufgabe: Beweisen Sie ebenso Satz H3C. Modifizieren Sie hierzu den letzten Schritt des Beweises so, dass Sie statt MON nur UIA nutzen.

Zusammenfassung und Interpretation

Zum krönenden Abschluss möchte ich Arrows Satz zusammenfassen und dabei umformulieren, logisch äquivalent aber sprachlich griffiger.

Gegeben sei die Menge $I = \{1, 2, \dots, n\}$ der Individuen/Kriterien, $n \ge 2$, und die Menge $A = \{a, b, c, \dots\}$ der Alternativen/Kandidaten, $\sharp A \ge 2$.

Eine **Präferenz** ist eine transitive und lineare Relation auf A.
Sei $\mathbb{P} = \mathbb{P}(A)$ die Menge aller Präferenzen auf A.

Ein **Wahlverfahren** ist eine Funktion $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$.
Das bedeutet, jeder möglichen Konstellation individueller Präferenzen $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathbb{P}$ wird als Ergebnis eine Präferenz $P \in \mathbb{P}$ zugeordnet.

Es gibt sehr viele Wahlverfahren; wir wollen die guten hervorheben:
Wir nennen V **perfekt**, wenn die Zuordnung $(P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$ einhellig und monoton und nicht-diktatorisch ist.

Korollar H3F (Arrows Un/Möglichkeitssatz)

Für $\sharp A = 2$ gibt es (unendlich viele) perfekte Wahlverfahren.
Für $\sharp A \ge 3$ gibt es kein perfektes Wahlverfahren.

Zusammenfassung und Interpretation

Interpretation? Bei drei oder mehr Alternativen können die Präferenzen $(P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{P}^n$ extrem kompliziert sein, kontrovers und divergent. Das Wahlverfahren V soll hieraus eine einfache Antwort extrahieren; das ist im Allgemeinen unmöglich, oder eben nur zum Preis einer Diktatur.

In einfachen, klaren Fällen können wir manchmal ein Ergebnis ablesen. Das Wahlsystem soll aber allgemein gelten, also auch aus extremen, heterogenen, widersprüchlichen Voten eine gemeinsame Präferenz extrahieren. Die Gesellschaft kann extrem uneinig sind, und das Wahlverfahren soll es irgendwie richten. Das ist zuviel verlangt!

Konsens oder Kompromiss muss die Gesellschaft selbst herstellen; diese mühsame Arbeit kann ihr keine „magische Formel“ abnehmen.

Literatur:

- K.J. Arrow: *Social choice and individual values*, John Wiley & Sons, New York 1951. (Ausarbeitung seiner Dissertation)
- R.D. Luce, H. Raiffa: *Games and decisions*, John Wiley & Sons, New York 1957; Dover Publications, New York 1989. (Kapitel 14)
- S. Nasar: *A beautiful mind*, Faber & Faber, London 1998. (Kap. 12)

Zusammenfassung und Interpretation

Untersuchen Sie folgende Variante zur Wiederholung und Vertiefung:

Aufgabe: Das Ergebnis darf weiter in $\mathbb{P}$ liegen, da ein Unentschieden manchmal unvermeidbar ist. Aber bei der Stimmabgabe erlauben wir nur strikte Präferenzen $\mathbb{S} \subsetneq \mathbb{P}$. Das Wahlverfahren $V : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}$ muss also nur auf einer kleineren Menge definiert werden, das ist etwas einfacher.

Vermeiden wir so Arrows Unmöglichkeitssatz? Gibt es Wahlverfahren $V : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}$, die einhellig und monoton sind aber nicht diktatorisch? Gehen Sie alle Argumente sorgfältig durch und übertragen Sie sie.

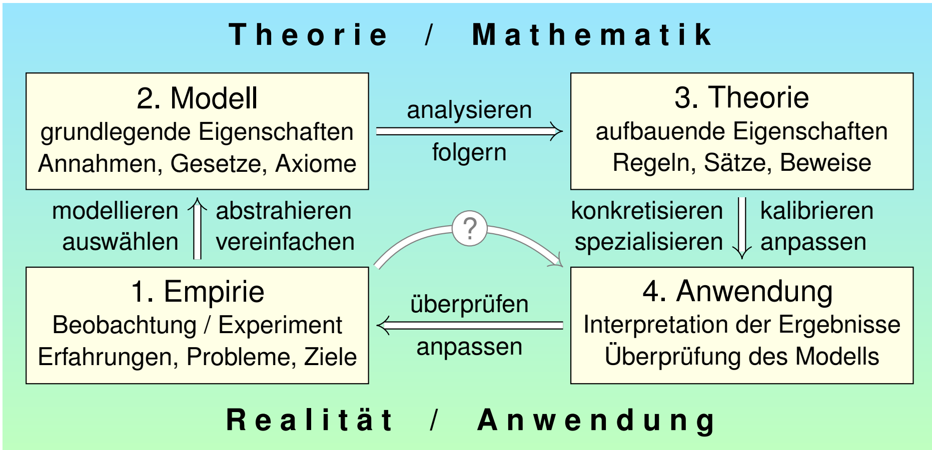
Lösung: Bitte versuchen Sie es selbst, Sie können dabei viel lernen!

Die Definition eines Diktators gilt weiterhin, ebenso Einhelligkeit, Monotonie und UIA. Für entscheidende Teilmengen und den Beweis des Satzes haben wir nur strikte Präferenzen genutzt, alle Argumente gelten also wörtlich genauso, und der Satz bleibt gültig für eingeschränkte Wahlverfahren $V : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}$. Das gleiche gilt dann natürlich auch für $V : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}$.

Aufgabe: Arrows Satz wird oft ungenau, gar falsch dargestellt. Prüfen Sie den Blog `blog.zeit.de/mathe/allgemein/mathe-wahl-diktator`.

Wozu dient Mathematik?

Alles Leben ist Problemlösen. (Karl Popper)



Mathematik untersucht sowohl abstrakte Strukturen als auch konkrete Anwendungen. Dies sind keine Gegensätze, sondern sie ergänzen sich!

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie. (Immanuel Kant)

Rückblick auf konkrete Beispiele

Abstraktion strukturiert und vereinfacht! Beispiele illustrieren.

Beispiel: Eine vierköpfige Familie $I = \{1, 2, 3, 4\}$ plant ihren Urlaub. Zur Wahl stehen $A = \{\, a = \text{Venedig},\ b = \text{London},\ c = \text{Paris}\,\}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
1: & b & \succ & c & \succ & a \\
2: & a & \succ & b & \approx & c \\
3: & a & \succ & c & \succ & b \\
4: & c & \succ & b & \succ & a
\end{array}$$

Beispiel: Berufung auf eine Professur, Kandidaten $A = \{a, b, c, \dots\}$. Die Kriterien sind Forschung, Lehre, Drittmittel, Administration, etc.

Beispiel: $A = \{a, b, c, \dots\}$ sind Universitäten, P_i ist das Ranking nach Kriterium i. Gesucht ist ein zusammengefasstes Ranking P.

Beispiel: $A = \{a, b, c, \dots\}$ sind die Piloten der Formel Eins, P_i ist die Zielreihenfolge beim Rennen i. Gesucht ist ein Gesamtclassement P.

Rückblick auf konkrete Beispiele

Jetzt ahnen Sie vielleicht, warum Abstimmungen kompliziert sind. Schon für das Votum über den skizzierten Familienurlaub gibt es die sagenhafte Anzahl von $13^{13^4} = 13^{28561} \approx 2 \cdot 10^{31815}$ Wahlverfahren. Die meisten davon sind kaum brauchbar, aber es sind Wahlverfahren.

Die Zeit drängt, der Urlaub naht, welche Entscheidung ist „die richtige“? Wir brauchen mindestens Platz 1, und für den Fall, dass das Wunschziel ausgebucht ist, müssen wir auch Platz 2 und 3 bestimmen. Wir suchen also „die gerecht ausgewählte“ Präferenz $P \in \mathbb{P}$, eine unter dreizehn.

Wir könnten die Alternative(n) wählen, die am häufigsten Platz 1 belegt, das wäre hier $a =$ Venedig. Im direkten Vergleich gewinnt dann c vor b.

Wir könnten ebenso gut die Alternative(n) streichen, die am häufigsten den letzten Platz belegt, hier a und b; dann gilt $c \succ b \approx a$ im Vergleich.

Oder wir machen kurzerhand Spieler 1 zum Diktator, oder er sich selbst, dann gewinnt b vor c vor a. Oder… oder… Es gibt viele Möglichkeiten!

Das darf doch nicht wahr sein! Ist das wirklich so kompliziert? Ja, ist es. Die Präferenzen können insgesamt sehr kompliziert und divergent sein. Eine perfekte Lösung im Sinne von Arrows Axiomen existiert nicht.

Rückblick auf konkrete Beispiele

Zur Berufung auf eine Professur erstellt die Kommission (mindestens) eine Dreierliste. Solche Verfahren dauern meist sehr lange, bei Absage des Erstplatzierten ermöglicht die Liste die Berufung des Zweit- und dann Drittplatzierten. Zur Vereinfachung dieses Beispiels nehmen wir (etwas unrealistisch) eine vollständige Reihung *aller* Kandidaten an.

Zur Illustration nehmen wir einen typischen Fall von $\sharp A = 10$ Kandidaten und $\sharp I = 15$ Kommissionsmitgliedern an. Dann gibt es $\sharp\mathbb{P} = 102\,247\,563$ Präferenzen und somit $\sharp\mathbb{P}^{\sharp\mathbb{P}^{\sharp I}} \approx 10^{10^{121}}$ Wahlverfahren. Diese Zahl hat 10^{121} Dezimalstellen, also weit mehr Ziffern als die geschätzten 10^{80} Elementarteilchen im Universum. Das ist mehr als ein Googolplex $(10^{10^{100}})$ mit nur einem Googol (10^{100}) Ziffern. Soweit zur Zahlenmystik.

Kein Wunder, dass Berufungsverfahren kompliziert und langwierig sind. Zur Vereinfachung legt sich die Kommission auf genau drei Kriterien fest: Forschung, Lehre, Drittmittel. Das reduziert das Problem auf $\sharp I = 3$. Aber selbst $\sharp I = 2$ wäre noch zu kompliziert. Schließlich wird allein die Forschung (Anzahl der Artikel) oder die Drittmittel (Summe in Euro) zum entscheidenden Kriterium bestimmt. Die Diktatur ist am einfachsten.

Rückblick auf konkrete Beispiele

Das Problem tritt natürlich ebenso für alle Wahlverfahren auf. Bei zwei Alternativen ist noch alles einfach und übersichtlich, doch schon ab drei Alternativen gilt Arrows Unmöglichkeitssatz.

Natürlich werden dennoch Wahlverfahren verwendet, etwa für das Gesamtclassement der Formel Eins oder das Ranking von Universitäten. Dabei kann es nie ganz gerecht zugehen im Sinne von Arrows Axiomen.

Es gibt viele Wahlverfahren, aber leider ist keines davon perfekt. Könnte man nicht zu Beginn über das Wahlverfahren abstimmen? Nun ja, es gibt mehr als drei Wahlverfahren, also… unmöglich! Wie wir es auch drehen und wenden, der Unmöglichkeitssatz besteht.

In einfachen, klaren Fällen können wir manchmal ein Ergebnis ablesen. Das Wahlsystem soll aber allgemein gelten, also auch aus extremen, heterogenen, widersprüchlichen Voten eine gemeinsame Präferenz extrahieren. Die Gesellschaft kann extrem uneinig sind, und das Wahlverfahren soll es irgendwie richten. Das ist zuviel verlangt!

Konsens oder Kompromiss muss die Gesellschaft selbst herstellen; diese mühsame Arbeit kann ihr keine „magische Formel“ abnehmen.

Nachlese: einige Fragen und Antworten

Die ernsthafte und redliche Auseinandersetzung mit einem Thema ist immer eine intellektuelle Herausforderung. Wie eingangs erklärt:

Mathematik ist nicht (nur) die sture *Anwendung* vorgefertigter Formeln, sondern (auch und vor allem) die *Entwicklung* neuer (Denk-)Werkzeuge. Sie ist ein schöpferischer Prozess zum Lösen von Problemen.

Sorgfalt und Ehrlichkeit sind mühsam, aber es lohnt sich!
Was Sie einmal als richtig erkannt und nachgewiesen haben, behält seine Gültigkeit, auch nach Jahrhunderten, für immer!

Im März 2017 habe ich diesen Vortrag vor etwa zwanzig Schülerinnen und Schülern gehalten, gemäß der Zielgruppe in angepasster Form. Das war für alle anstrengend aber doch sehr lohnend und mitreißend.

Anschließend gab es diverse Ideen und Fragen, die ich hier aufgreife, auch mehrere optimistische Vorschläge zur Lösung des Problems, z.B. die Auswahl der besten Alternative durch Stimmzählung, siehe S. H305.

Nachlese: einige Fragen und Antworten

Am Ende der Vortrags waren die SchülerInnen ungläubig, ich versprach mutig 1000 Euro für ein perfektes Wahlverfahren bei drei Alternativen.

Warum bin ich so sicher? Nicht nur, weil ein Nobelpreisträger behauptet, ein solches Verfahren könne es nicht geben. — Das wäre ein reines Autoritätsargument und als solches eher schwach. So beeindruckend oder einschüchternd dies auch sein mag, es ersetzt keinen Beweis.

Starke Antwort: Wir haben einen Beweis! Wir haben alle Argumente *sorgfältig* ausgeführt, jeder von uns kann sie nun *selbstständig* prüfen.

Es geht nicht um Autorität, sondern um nachvollziehbare Argumente. Das ist wissenschaftliche Ehrlichkeit und Transparenz, so soll es sein.

Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen!
Immanuel Kant, *Was ist Aufklärung?*, 1784

Nachlese: einige Fragen und Antworten

Ein pfiffiger Vorschlag der SchülerInnen für ein Wahlverfahren: Sind sich alle Wähler einig, also $P_1 = P_2 = \dots = P_n$, dann ist dies das Ergebnis. Andernfalls wird ein festes Ergebnis P_0 vereinbart, etwa $a \succ b \succ c$.

Aufgabe: Ist dies ein Wahlverfahren $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$? Ist es perfekt?
(a) für zwei Alternativen? Ist es eines unserer obigen Wahlverfahren?
(b) für drei und mehr Alternativen? Welche Forderung schlägt fehl?

Gelten Einhelligkeit, Monotonie, Nicht-Diktatur? Ich war zuversichtlich, dass mindestens eine fehlschlägt. Oder muss ich 1000 Euro zahlen?

Lösung: (a) Ja, für zwei Alternativen ist dieses Verfahren einhellig und monoton und nicht-diktatorisch. Es ist also ein perfektes Wahlverfahren. Es entspricht $M_\mu^{\alpha,\beta}$ für geeignete Schranken $-1 < \beta \le \alpha < 1$.

(b) Weiter gilt Nicht-Diktatur und Monotonie, nicht jedoch Einhelligkeit:

$$\begin{array}{c|ccccc}
1: & a & \succ & c & \succ & b \\
2: & c & \succ & a & \succ & b \\
\hline
 & a & \succ & b & \succ & c
\end{array}$$

In diesem Fall werten alle $c \succ b$, doch das Ergebnis besagt $b \succ c$.

Nachlese: einige Fragen und Antworten

Wir variieren das vorige Verfahren, wenden es aber nun paarweise an: Wir fixieren ein vorgegebenes Ergebnis P_0, etwa $a \succ b \succ c$. Sind sich zu zwei Alternativen alle einig, so wird P_0 entsprechend geändert.

Aufgabe: Ist dies ein Wahlverfahren $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$? Ist es perfekt?
(a) für zwei Alternativen? (b) für drei und mehr Alternativen?

Lösung: (a) Ja, für zwei Alternativen ist dieses Verfahren dasselbe wie in der vorigen Aufgabe. Es ist also sogar ein perfektes Wahlverfahren.

(b) Ab drei Alternativen ist dies leider kein Wahlverfahren:

$$\begin{array}{cccccc}
1: & c & \succ & a & \succ & b \\
2: & b & \succ & c & \succ & a
\end{array}$$

Zu a, b herrscht Uneinigkeit, es gilt das vorgegebene Ergebnis $a \succ b$.
Zu b, c herrscht Uneinigkeit, es gilt das vorgegebene Ergebnis $b \succ c$.
Zu c, a herrscht Einigkeit, als Ergebnis finden wir hier $c \succ a$.
Das Gesamtergebnis ist nicht transitiv, sondern zirkulär!

Aufgabe: Untersuchen Sie weitere Wahlverfahren, wenn Sie möchten. Sie kennen die nötigen Begriffe, Sie halten alle Werkzeuge in Händen.

Demarchie: Wahl durch Losverfahren

Das antike Griechenland, speziell Athen, gilt als Wiege der Demokratie. Öffentliche Ämter wurden damals durch Los unter den zugelassenen Kandidaten vergeben; dies sollte Korruption mindern und gewalttätige Wahlkämpfe verhindern… und den Willen der Götter berücksichtigen.

Jahrhundertelang wurde der Doge von Venedig durch aufwändige Losverfahren bestimmt, die Wahlmanipulation und Machtkonzentration ausschließen sollten. (`de.wikipedia.org/wiki/Doge_von_Venedig`)

In modernen Demokratien geriet diese Praxis in Vergessenheit oder galt als unbefriedigend: Nicht blinder Zufall sollte entscheiden, sondern die Tüchtigkeit der Bewerber. Doch wer entscheidet über die Tüchtigkeit?

Angewendet wird das Losverfahren heute bei Gericht zur Einsetzung von Laienrichtern (Schöffen), die gemeinsam mit Berufsrichtern die Gerichtsverhandlung führen. In vielen Ländern, zum Beispiel den USA, kommen bei Strafverfahren auch Geschworenenjurys zum Einsatz, die unabhängig vom Richter über die Schuldfrage entscheiden.

In den letzten Jahren wird auch die Anwendung des Losverfahrens zur parlamentarischen Vertretung diskutiert, z.B. auf europäischer Ebene.

Demarchie: Wahl durch Losverfahren

Das Losverfahren lässt sich auch auf unser Problem anwenden. Ein **deterministisches Wahlverfahren** ist eine Funktion

$$V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$$

Wir wollen dies nun randomisieren, also ein Zufallselement einführen. Wir betrachten $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ als Lostopf. Die Wahrscheinlichkeiten der Ziehung seien gleichverteilt, also $\mathbf{P}(1) = \mathbf{P}(2) = \cdots = \mathbf{P}(n) = 1/n$.

Die **Wahl durch Losverfahren** beschreiben wir durch die Funktion

$$L : \mathbb{P}^n \times \Omega \to \mathbb{P} : (P_1, P_2, \dots, P_n; k) \mapsto P_k$$

Praktisch bedeutet das: Jeder Wähler $i \in I$ gibt sein Votum $P_i \in \mathbb{P}$ ab. Anschließend wird ein Element $k \in \Omega$ ausgelost, das Wahlergebnis ist dann das Votum P_k. Das ist nicht diktatorisch, denn $k \in I$ ist zufällig. Als Konvexkombination schreiben wir $L = \frac{1}{n} D_1 + \frac{1}{n} D_2 + \cdots + \frac{1}{n} D_n$

Ist eine andere Verteilung gewünscht, so geben wir $\mathbf{P}(i) = \mu(i)$ vor; wie zuvor sei $\mu : I \to [0,1]$ eine Gewichtung mit $\mu(1) + \cdots + \mu(n) = 1$. Hierzu unterteilen wir das Intervall $[0,1]$ in n Intervalle $I_1, I_2, \dots, I_n$ der Länge $\mathrm{vol}_1(I_i) = \mu(i)$ und wählen ein Los $\omega \in [0,1]$ zufällig gleichverteilt.

Demarchie: Wahl durch Losverfahren

Wahl durch Losverfahren wirkt zunächst überraschend, gar irrational. Warum sollten wir den Zufall entscheiden lassen, wenn wir das Problem genauso gut mit einem deterministischen Verfahren lösen können? Deterministisch können wir es eben nicht, wie wir gesehen haben! Versuchen wir schließlich, das Losverfahren ebenso zu untersuchen:

Aufgabe: Welche Eigenschaften hat die Wahl durch Losverfahren L_μ? Gilt Einhelligkeit? In welcher Form gelten Monotonie und Symmetrie?

Lösung: Wir nutzen wie üblich die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Zu $a, b \in A$ erhalten wir im Ergebnis $a \succcurlyeq b$ mit der Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(a \succcurlyeq b) = \mu\{\, i \mid a \succcurlyeq_i b \,\}$. Entsprechend gilt $\mathbf{P}(a \succ b) = \mu\{\, i \mid a \succ_i b \,\}$.

Einhelligkeit: Aus $a \succ_i b$ für alle $i \in I$ folgt $\mathbf{P}(a \succ b) = 1$, das heißt: Mit Wahrscheinlichkeit 100% erhalten wir im Ergebnis $a \succ b$.

Monotonie: Aus $\{\, i \mid a \succcurlyeq_i b \,\} \subseteq \{\, i \mid a \succcurlyeq'_i b \,\}$ folgt $\mathbf{P}(a \succcurlyeq b) \le \mathbf{P}(a \succcurlyeq' b)$. Gilt zudem $\{\, i \mid b \succcurlyeq_i a \,\} \supseteq \{\, i \mid b \succcurlyeq'_i a \,\}$, so folgt $\mathbf{P}(a \succ b) \le \mathbf{P}(a \succ' b)$.

Symmetrie: Bei der Gleichverteilung $\mu = (1/n, 1/n, \dots, 1/n)$ sind im Losverfahren L_μ alle Wahrscheinlichkeiten invariant unter Umordnung.

Die Diktatur $D_k = L_\mu$ entspricht $\mu(k) = 1$ und $\mu(i) = 0$ für $i \neq k$.

Demarchie: Wahl durch Losverfahren

Interpretation? Bei drei oder mehr Alternativen können die Präferenzen $(P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{P}^n$ extrem kompliziert sein, kontrovers und divergent. Das Wahlverfahren V soll hieraus eine einfache Antwort extrahieren; das ist deterministisch unmöglich, oder eben nur zum Preis einer Diktatur.

Durch Randomisierung können wir gezielt ein Zufallselement einführen. Das erscheint zunächst ungewöhnlich, erweist sich aber als vorteilhaft:

Satz H3G (Wahl durch Losverfahren)

Die Wahl durch Losverfahren erfüllt (im Sinne der Wahrscheinlichkeit) all unsere Forderungen: Einhelligkeit, Monotonie und Symmetrie.

Im deterministischen Modell haben wir für jedes Paar $a, b \in A$ nur die 0–1–Wahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}(a \succ b), \mathbf{P}(a \approx b), \mathbf{P}(b \succ a) \in \{0, 1\}$. Einhelligkeit und Monotonie sind hier nur durch Diktatur zu erfüllen.

Randomisierung $\mathbf{P}(a \succ b), \mathbf{P}(a \approx b), \mathbf{P}(b \succ a) \in [0, 1]$ ist flexibler und liefert weitere Verfahren, eventuell bessere. Auch sie sind nicht perfekt, da nicht deterministisch, aber sie bieten praktisch brauchbare Lösungen.

Es ist immer gut, die Beschränkungen und Möglichkeiten zu kennen!

Wahlverfahren für unendliche Gesellschaften

Weiterhin sei $\sharp A \geq 3$ und $\mathbb{P} = \mathbb{P}(A)$. Die Menge I sei nun beliebig.
Anders als zuvor setzen wir also I nicht mehr als endlich voraus.
Dank H3E ist „entscheidend“ weiterhin unabhängig vom Paar (a, b).

Aufgabe: Sei $V : \mathbb{P}^I \to \mathbb{P}$ ein Wahlverfahren, einhellig und monoton.
Welche Eigenschaften hat $\mathscr{F} = \mathscr{F}_V := \{ J \subseteq I \mid J \text{ entscheidet in } V \}$?

(F1) Es gilt $\emptyset \notin \mathscr{F}$ und $I \in \mathscr{F}$.
(F2) Für alle $J, K \in \mathscr{F}$ gilt $J \cap K \in \mathscr{F}$.
(F3) Aus $J \in \mathscr{F}$ und $J \subseteq K \subseteq I$ folgt $K \in \mathscr{F}$.
(F4) Für $I = J \sqcup K$ gilt entweder $J \in \mathscr{F}$ oder $K \in \mathscr{F}$.

Die Rechenregeln (F1–4) sind einfach, elegant und fundamental.
Wir interpretieren $J \in \mathscr{F}$ als: J enthält „fast alle“ Elemente von I.
Die verbleibenden Elemente $I \smallsetminus J$ sind vernachlässigbar.

Lösung: (F1) Dank Einhelligkeit ist I entscheidend, $\emptyset$ hingegen nicht.
(F3) Ist J entscheidend, so auch jeder Obermenge dank Monotonie.

Wahlverfahren für unendliche Gesellschaften

(F2) Wir untersuchen folgende Abstimmung (à la Condorcet):

$J \cap K$:	a	$\succ$	x	$\succ$	b
$J \smallsetminus K$:	b	$\succ$	a	$\succ$	x
$K \smallsetminus J$:	x	$\succ$	b	$\succ$	a

Es folgt $a \succ x$, denn J ist entscheidend.
Es folgt $x \succ b$, denn K ist entscheidend.
Transitivität erzwingt $a \succ b$. Doch nur $J \cap K$ wertet $a \succ b$.
Also ist $J \cap K$ entscheidend für das Paar (a, b), somit für alle (H3E).

(F4) Sei $I = J \sqcup K$. Angenommen, K ist nicht entscheidend für (a, b):

J :	a	$\succ$	x	$\succ$	b
K :	b	$\succ$	a	$\succ$	x

Es folgt $x \succcurlyeq b$. Zudem gilt $a \succ x$, denn I ist entscheidend. Transitivität erzwingt $a \succ b$. Also ist J entscheidend für (a, b), somit für alle (H3E).

Wahlverfahren und Ultrafilter

Definition H3H (Filter und Ultrafilter)

Sei $I \neq \emptyset$ eine Menge. Ein Mengensystem $\mathscr{F} \subset \mathfrak{P}(I)$ mit Eigenschaften (F1–3) heißt **Filter** auf I. Gilt (F1–4), so heißt $\mathscr{F}$ ein **Ultrafilter** auf I.

Satz H3I (Jeder Ultrafilter definiert ein Wahlverfahren.)

Jeder Ultrafilter $\mathscr{F} \subset \mathfrak{P}(I)$ auf der Menge I definiert ein Wahlverfahren $V : \mathbb{P}^I \to \mathbb{P} : (P_i)_{i \in I} \mapsto P$ durch die Einigkeit „fast aller“ Individuen:

$$(P_i)_{i \in I} \mapsto P := \Big\{ (x, y) \in A \times A \;\Big|\; \{ i \in I \mid (x, y) \in P_i \} \in \mathscr{F} \Big\}$$

Dieses Wahlverfahren erfüllt Einhelligkeit und Monotonie.

Beispiel H3J (der unsichtbare Diktator)

Sei $A \neq \emptyset$ beliebig. Die Menge I der Individuen sei unendlich.
Wir betrachten den **koendlichen Filter** $\mathscr{E} = \{ J \subseteq I \mid I \smallsetminus J \text{ endlich} \}$.
Dieser liegt in einem maximalen Filter / Ultrafilter $\mathscr{F}$ mit $\mathscr{E} \subset \mathscr{F} \subset \mathfrak{P}(I)$.
Das Verfahren $V_{\mathscr{F}}$ ist einhellig und monoton und nicht diktatorisch.

Wahlverfahren und Ultrafilter

Aufgabe: Prüfen sie Konstruktion und Eigenschaften sorgfältig nach!

Lösung: Die Relation P ist transitiv: $x \succcurlyeq y$ und $y \succcurlyeq z$ bedeutet nach Definition $J = \{ i \in I \mid x \succcurlyeq_i y \} \in \mathscr{F}$ und $K = \{ i \in I \mid y \succcurlyeq_i z \} \in \mathscr{F}$.
Es folgt $J \cap K \subseteq \{ i \in I \mid x \succcurlyeq_i z \}$, dank (F2) und (F3) also $x \succcurlyeq z$.

Die Relation P ist linear: Wir zerlegen $I = J \sqcup K \sqcup L$ gemäß $J = \{ i \mid x \succ_i y \}$ und $K = \{ i \mid x \approx_i y \}$ und $L = \{ i \mid y \succ_i x \}$.
Dank (F4) gilt entweder $J \in \mathscr{F}$ oder $K \in \mathscr{F}$ oder $L \in \mathscr{F}$,
also die Trichotomie entweder $x \succ y$ oder $x \approx y$ oder $y \succ x$.

Dank (F1) gilt $I \in \mathscr{F}$, also Einhelligkeit. Dank (F3) gilt Monotonie.

Beispiel: Der koendliche Filter $\mathscr{E}$ besteht aus allen Mengen $J \subseteq I$, die „fast alle“ Individuen enthalten, also alle bis auf endlich viel. Aus $J \in \mathscr{E}$ können wir endliche viele Elemente entfernen und behalten immer noch $K = J \smallsetminus \{i_1, \dots, i_n\} \in \mathscr{F}$. Diese Eigenschaft bleibt auch für $\mathscr{F}$ erhalten: Das zugehörige Wahlverfahren V ist nicht diktatorisch. Der Ultrafilter $\mathscr{F}$ möchte gegen ein Element $k \in I$ konvergieren, dies wäre der Diktator, liegt aber nicht in I. Stattdessen entscheiden seine Umgebungen $J \in \mathscr{F}$.

Filter und Ultrafilter

Das Semester neigt sich dem Ende, wir räumen unser Scherzlager, alle Witze müssen raus, egal ob gut oder schlecht: Alles muss gehen!

Bildquelle: www.cc97.de

Wie nennt man die Einlasskontrolle vor dem Fußballstadion? — Ultrafilter!

Filter und Ultrafilter

Satz H3K (Charakterisierung von Ultrafiltern)

Sei I eine Menge und $\mathscr{F} \subseteq \mathfrak{P}(I)$. Dann sind äquivalent:

1. *$\mathscr{F}$ ist ein Ultrafilter auf I, erfüllt also (F1–4).*
2. *$\mathscr{F}$ ist ein Filter auf I und maximal. Ausführlich bedeutet das: Für jeden Filter $\mathscr{F}'$ mit $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}' \subset \mathfrak{P}(I)$ gilt $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$.*
3. *Es gibt einen surjektiven Halbring-Homomorphismus $h : (\mathfrak{P}(I), \cap, \cup) \to (\{0,1\}, \wedge, \vee)$ mit $\mathscr{F} = \{\, A \subseteq X \mid h(A) = 1 \,\}$.*
4. *Für $I = J \sqcup K \sqcup L$ gilt entweder $J \in \mathscr{F}$ oder $K \in \mathscr{F}$ oder $L \in \mathscr{F}$.*

Aufgabe: Beweisen Sie diese Äquivalenzen.

Ein Filter $\mathscr{F} \subset \mathfrak{P}(I)$ auf I ist nichts weiter als ein echtes Ideal in der Mengenalgebra $(\mathfrak{P}(I), \cap, \cup)$, hier als Halbring betrachtet. Ultrafilter sind demnach maximale Ideale. Wenn Sie Ideale aus der Algebra kennen und lieben, dann werden Ihnen auch Filter gefallen.

Filter und Ultrafilter

Ein **Hauptfilter** ist von der Form $\mathscr{F} = \langle K \rangle := \{\, J \subseteq I \mid K \subseteq J \,\}$ für eine nicht-leere Teilmenge $K \subseteq I$. Dies ist ein Ultrafilter gdw $K = \{k\}$.

Ein **fixierter Ultrafilter** ist von der Form $\mathscr{F} = \langle k \rangle := \{\, J \subseteq I \mid k \in J \,\}$ für ein festes Element $k \in I$. Jeder weitere Ultrafilter heißt **frei**.

Aufgabe: (1) Auf jeder endlichen Menge I gilt:
(1a) Jeder Filter ist Hauptfilter. (1b) Jeder Ultrafilter ist fixiert.
(1c) Folgern Sie daraus erneut Arrows Satz vom Diktator H3B
(2) Auf jeder unendlichen Menge I existieren freie Ultrafilter.
(3) Allgemeiner: Jeder Filter $\mathscr{F}$ liegt in einem Ultrafilter $\mathscr{F}'$.

Lösung: (1a) Ist I endlich, so auch $\mathscr{F} \subseteq \mathfrak{P}(I)$. Betrachte $K := \bigcap \mathscr{F}$. Dank (F2) gilt $K \in \mathscr{F}$. Dies ist also das kleinste Element von $\mathscr{F}$. Dank (F1) gilt $K \neq \emptyset$. Dank (F3) folgt $\mathscr{F} = \{\, J \subseteq I \mid K \subseteq J \,\}$.

Filter und Ultrafilter

(1b) Wir wissen $\mathscr{F} = \langle K \rangle$ dank (1a). Gilt zudem (F4), so folgt $K = \{k\}$.

(1c) Die Familie $\mathscr{F}$ aller entscheidenden Mengen ist ein Ultrafilter. Ist zudem I endlich, so gilt $\mathscr{F} = \langle k \rangle$, und somit ist k der Diktator.

(2) Wir betrachten $\mathscr{F} = \{\, J \subseteq I \mid I \smallsetminus J \text{ endlich} \,\}$. Dies ist ein Filter. Dank (3) existiert hierzu ein Ultrafilter $\mathscr{F}'$ mit $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}' \subset \mathfrak{P}(I)$. Dieser ist nicht fixiert: Wäre $\mathscr{F} = \langle k \rangle$, dann wäre $K = \{k\} \in \mathscr{F}$ und $J = I \smallsetminus K \in \mathscr{F}$, also $\emptyset = K \cap J \in \mathscr{F}$, im Widerspruch zu (F1).

(3) Wir nutzen die Charakterisierung H3K als maximaler Filter. Jede Kette von Filtern hat eine obere Schranke: ihre Vereinigung. Nach dem Lemma von Zorn existieren maximale Elemente.

Kapitel I

Implementierungstheorie und Satz von Gibbard–Satterthwaite

Wähle deine Wünsche mit Bedacht,
denn sie könnten in Erfüllung gehen!

Inhalt dieses Kapitels

Motivation und Überblick

Aus dem vorigen Kapitel kennen wir Arrows Satz vom Diktator.
Wir untersuchen hierzu **Wahlverfahren** von der Form $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$.
Zur Vereinfachung beschränken wir uns auf strikte Präferenzen $\mathbb{S} \subset \mathbb{P}$.
Wenn wir zudem Indifferenzen im Ergebnis aufbrechen, so erhalten wir:

$$V \;:\; \mathbb{S}^n \to \mathbb{S} \;:\; (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P.$$

Zu Recht wenden Sie ein, dass viele Wahlverfahren nicht so verlaufen.
Wir untersuchen daher ebenso **Auswahlverfahren** von der Form

$$W \;:\; \mathbb{S}^n \to A \;:\; (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto a.$$

Jedes Wahlverfahren V definiert ein Auswahlverfahren $W = \max V$.
Wenn wir also ein geeignetes V haben, dann automatisch auch W.
Wir wissen bereits, dass es kein perfektes Wahlverfahren V gibt.
Unsere Hoffnung ist daher: Das Verfahren W hat es hier leichter,
es muss nur *einen* Gewinner ermitteln, nicht das *gesamte* Ranking
Wir zeigen im Folgenden, dass selbst die leichtere Aufgabe unlösbar ist:
Jedes Auswahlverfahren $W : \mathbb{S}^n \twoheadrightarrow A$ ist manipulierbar oder diktatorisch.

Motivation und Überblick

Das Ziel der **Implementierungstheorie** ist, gewünschtes Verhalten durch ein geeignetes Spiel zu erzwingen / ermutigen / ermöglichen.

Ein berühmtes Beispiel ist Nashs axiomatische Verhandlungslösung und Rubinsteins strategische Implementierung als alternierende Angebote. Hier gelingen beide Ansätze und unterstützen sich gegenseitig.

Ein analoges Beispiel liegt in diesem Kapitel vor: Arrows axiomatisch begründeter Satz vom Diktator wird nun implementativ gestützt durch den strategisch orientierten Satz von Gibbard–Satterthwaite (I1B).

Gesucht ist also ein geeignetes Spiel, dass zu dem gewünschten Verhalten führt. Dass ist allerdings nicht immer möglich, denn die Anreize müssen mit den Zielsetzungen der Spieler vereinbar sein.

Andernfalls droht **Manipulierbarkeit**. Wir beginnen mit einem einfachen aber typischen Beispiel, das Sie bereits aus den Übungen kennen. Anschließend führen wir die formale Definition und Beweisführung aus.

Auswahlverfahren

Aufgabe: Alice, Bob und Chuck wollen gemeinsam ins Kino gehen. Zur Auswahl stehen die drei Filme X = *X-Men* oder Y = *The Last Yeti* oder Z = *Zombie Apocalypse*. Alice hätte am liebsten X vor Y vor Z, Bob favorisiert Y vor Z vor X, und Chuck sieht Z vor X vor Y.

Chuck ist Wahlleiter und legt als Wahlmodus fest: Im ersten Wahlgang wird per Mehrheitswahl zwischen X und Y abgestimmt, der Gewinner tritt dann im zweiten Wahlgang per Mehrheitswahl gegen Z an.

(1) Welche der Alternativen X, Y, Z wird gewählt, wenn jeder in jedem Wahlgang ehrlich nach seiner Präferenz abstimmt?

(2) Ist dies ein Gleichgewicht? Lohnt es sich, strategisch zu wählen? Nennen Sie mindestens ein teilspielperfektes Gleichgewicht.

(3) Hat Chuck für seine Ziele den Wahlmodus gut gewählt? Welchen Wahlmodus würden Sie ihm raten?

Auswahlverfahren

(1) Der erste Wahlgang $X : Y$ ergibt $2 : 1$. Der zweite Wahlgang $X : Z$ ergibt $1 : 2$. Es gewinnt Z. Man könnte den Eindruck gewinnen, das Chuck das Wahlverfahren so gewählt hat, dass sein Favorit gewinnt.

(2) Nein, die ehrliche Abstimmung ist kein Gleichgewicht! Alice könnte $P_1' : Y \succ X \succ Z$ vorgeben statt ihrer wahren Präferenz $P_1 : X \succ Y \succ Z$. Der erste Wahlgang $X : Y$ ergibt $1 : 2$. Der zweite Wahlgang $Y : Z$ ergibt $2 : 1$. Es gewinnt Y. Das ist für Alice eine Verbesserung!
Für Alice lohnt es sich, strategisch zu wählen, also zu lügen.

(3) Chucks erster Plan geht auf, wenn alle Spieler ehrlich abstimmen. Wenn sie strategisch denken, werden sie unehrlich abstimmen, um das Ergebnis zu ihren Gunsten zu ändern. Hierzu muss jeder spekulieren, wie die anderen abstimmen, die anderen werden ebenfalls spekulieren, usw. Das ist für demokratische Wahlen keine gute Grundlage!

Auswahlverfahren

Gegeben sei die Menge $I = \{1, 2, \dots, n\}$ der Individuen/Kriterien, $n \ge 2$, sowie die Alternativen/Kandidaten $A = \{a, b, c, \dots\}$, wobei $2 \le \sharp A < \infty$. Wie zuvor sei $\mathbb{S} = \mathbb{S}(A)$ die Menge aller strikten Präferenzen $P \subset A \times A$. Wir schreiben $x \succcurlyeq y$ für $(x, y) \in P$, sowie $x \succ y$ falls zudem $x \ne y$. Es gilt $a = \max P := \max(A, \succcurlyeq)$, falls $a \succcurlyeq x$ für alle $x \in A$ gilt.

Definition I1A (Auswahlverfahren)

Ein **Auswahlverfahren** W ist eine Funktion (= Zuordnung = Abbildung)

$$W \;:\; \mathbb{S}^n \to A \;:\; (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto a.$$

Das Verfahren W ist durch Spieler $i \in I$ **manipulierbar**, wenn

$$W(P_i'; P_{-i}) \succ_i W(P_i; P_{-i})$$

für einen Präferenzvektor $P \in \mathbb{S}^n$ und einseitige Abweichung $P_i' \in \mathbb{S}$.

Das Verfahren W ist **nicht-manipulierbar** (engl. *strategy-proof*), wenn

$$W(P_i; P_{-i}) \succcurlyeq_i W(P_i'; P_{-i})$$

für alle Spieler $i \in I$ sowie $P \in \mathbb{S}^n$ und $P_i' \in \mathbb{S}$ gilt.

Auswahlverfahren

Wir haben für diverse Probleme, etwa Verhandlungen oder Wahlen, gewisse Axiome als logische (Mindest-)Anforderungen formuliert. Dies dient ganz praktisch und konkret zur Qualitätssicherung: Wir wollen fehlerbehaftete Verfahren erkennen und vermeiden.

Bei Wahlen ist die Manipulierbarkeit ein sehr ernstes Problem. Die Verletzung grundlegender Qualitätskriterien kann dazu führen, dass Wähler nicht ihre wahre Entscheidung zum Ausdruck bringen, sondern wahltaktisch-strategisch wählen. Das ist gefährlich.

Verletzte Qualitätskriterien ermöglichen zudem (ganz legale) Methoden zur gezielten Beeinflussung und Manipulation des Wahlergebnisses, etwa durch die Wahl der Reihenfolge bei paarweisen Abstimmungen.

Wir wünschen uns daher ein Auswahlverfahren $W : \mathbb{S}^n \to A$, das nicht manipulierbar ist. Selbst diese Minimalforderung ist leider nicht erfüllbar, wie der folgende Satz zeigt.

Satz von Gibbard–Satterthwaite

Satz I1B (Gibbard 1973, Satterthwaite 1975)

Es gebe mindestens drei Alternativen, $\sharp A \ge 3$. Jedes surjektive Auswahlverfahren $W : \mathbb{S}^n \to A$ ist entweder manipulierbar oder diktatorisch.

Wir nennen $k \in I$ **Diktator**, wenn stets $W(P_1, \dots, P_n) = \max P_k$ gilt.

Lemma I1C (Muller–Satterthwaite 1977)

Ist ein Auswahlverfahren $W : \mathbb{S}^n \to A$ surjektiv und nicht-manipulierbar, dann ist W einhellig und monoton.

UNA: Einhelligkeit. $W(P_1, \dots, P_n) = a$ falls $a = \max P_i$ für alle $i \in I$.

MON: Monotonie. Sei $W(P_1, \dots, P_n) = a$. Für alle Alternativen $b \in A$ gelte $\{\, i \mid a \succ_i b \,\} \subseteq \{\, i \mid a \succ'_i b \,\}$. Dann folgt $W(P'_1, \dots, P'_n) = a$.

Satz I1D (Muller–Satterthwaite 1977)

Es gebe mindestens drei Alternativen, $\sharp A \ge 3$. Erfüllt $W : \mathbb{S}^n \to A$ Einhelligkeit und Monotonie, dann ist W diktatorisch.

Satz von Gibbard–Satterthwaite

Zur Existenz eines Diktators setzen wir unseren Sprachgebrauch fort:
DIC: Gibt es einen Diktator, so heißt das Verfahren W *diktatorisch*.
~~DIC~~: Gibt es keinen Diktator, so nennen wir W *nicht-diktatorisch*.

Die Axiome der Einhelligkeit, Monotonie und Nicht-Diktatur kennen wir aus Arrows axiomatischer Behandlung von Wahlverfahren $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$.

Hier jedoch betrachten wir Auswahlverfahren $W : \mathbb{S}^n \to A$, daher müssen wir die Begriffe übertragen und im neuen Kontext präzise formulieren.

Einhelligkeit ist klar, wie zuvor, Monotonie braucht etwas Gewöhnung. Es ist das stärkste und daher auch umstrittenste der Axiome.

Die Diktatur $D_k : (P_1, \dots, P_n) \mapsto \max P_k$ ist nicht manipulierbar:
Der Diktator kann durch Abweichung sein Ergebnis nur verschlechtern.
Alle anderen Spieler können das Ergebnis überhaupt nicht beeinflussen.

Wir zeigen nun umgekehrt: Wenn $W : \mathbb{S}^n \to A$ nicht manipulierbar ist, dann ist es einhellig und monoton, und im Falle $\sharp A \ge 3$ diktatorisch.

Beweis des Lemmas

Beweis des Lemmas I1C: Vorgelegt sei $W : \mathbb{S}^n \to A$.
Dieses Auswahlverfahren sei surjektiv und nicht-manipulierbar.

(0) Sei $W(P_i; P_{-i}) = a$ und $P'_i \in \mathbb{S}$. Für alle $b \in A$ gelte $a \succ_i b \Rightarrow a \succ'_i b$.
Wir behaupten $W(P'_i; P_{-i}) = a$. Angenommen $W(P'_i; P_{-i}) = b \ne a$.
Dank Nicht-Manipulierbarkeit gilt dann $a \succ_i b$, also auch $a \succ'_i b$.
Damit wäre W manipulierbar wegen $W(P_i; P_{-i}) \succ'_i W(P'_i; P_{-i})$.

(1) Monotonie:
Sei $W(P_1, \dots, P_n) = a$. Für alle Alternativen $b \in A$ und alle $i \in I$ gelte $a \succ_i b \Rightarrow a \succ'_i b$. Dank (0) können wir P_i durch P'_i ersetzen, ohne das Ergebnis zu ändern. Damit folgt $W(P'_1, \dots, P'_n) = a$, also Monotonie.

(2) Einhelligkeit:
Sei $a \in A$. Da $W : \mathbb{S}^n \to A$ surjektiv ist, existiert $P \in \mathbb{S}^n$ mit $W(P) = a$.
Wir rücken a in jeder Präferenz P_i nach oben, sodass $a = \max P_i$.
Dank Monotonie (1) gilt weiterhin $W(P) = a$, also Einhelligkeit.

Beweis des Lemmas

Das Lemma I1C verbindet zwei grundlegende Sichtweisen:
Strategisch gesehen steht Nicht-Manipulierbarkeit im Vordergrund.
Axiomatisch gesehen sind Einhelligkeit und Monotonie zentral.

Aufgabe: Gilt in Lemma I1C auch die Umkehrung? Das heißt:
Aus einhellig und monoton folgt surjektiv und nicht-manipulierbar.

Lösung: Im Falle $\sharp A \ge 3$ greift der Satz I1D von Muller–Satterthwaite:
Das Auswahlverfahren W ist diktatorisch und somit nicht-manipulierbar.

Im Falle $\sharp A = 2$ prüfen wir die vermutete Implikation direkt nach:
Einhelligkeit von $W : \mathbb{S}^n \to A$ garantiert, dass W surjektiv ist.

Monotonie impliziert Nicht-Manipulierbarkeit: Gilt $W(P_i; P_{-i}) = b$, aber $a \succ_i b$, dann kann Spieler i das Ergebnis nicht verbessern, also nicht das für ihn bessere Ergebnis $W(P'_i; P_{-i}) = a$ erreichen.

Dasselbe Argument gilt allgemein für $\sharp A \ge 2$, auch ohne Satz I1D.
Hierzu rücken wir das Paar a, b in jeder Präferenz ganz nach oben und argumentieren dann wie zuvor für $\sharp A = 2$.

Satz von Muller–Satterthwaite

Wir untersuchen der Reihe nach folgende Präferenzvektoren:

$$P^0 = \left\{ \begin{array}{rccccccc} 1 & : & a & \succ & \dots & \succ & b \\ & : & a & \succ & \dots & \succ & b \\ n & : & a & \succ & \dots & \succ & b \end{array} \right\} \mapsto a$$

$$P^1 = \left\{ \begin{array}{rccccccc} <k & : & b & \succ & a & \succ & \dots \\ k & : & a & \succ & b & \succ & \dots \\ >k & : & a & \succ & \dots & \succ & b \end{array} \right\} \mapsto a$$

$$P^2 = \left\{ \begin{array}{rccccccc} <k & : & b & \succ & a & \succ & \dots \\ k & : & b & \succ & a & \succ & \dots \\ >k & : & a & \succ & \dots & \succ & b \end{array} \right\} \mapsto b$$

$$P^3 = \left\{ \begin{array}{rccccccc} <k & : & b & \succ & \dots & \succ & a \\ k & : & b & \succ & a & \succ & \dots \\ >k & : & \dots & \succ & a & \succ & b \end{array} \right\} \mapsto b$$

Satz von Muller–Satterthwaite

Wir untersuchen der Reihe nach folgende Präferenzvektoren:

$$P^4 = \left\{ \begin{array}{rccccccc} <k & : & b & \succ & \dots & \succ & a \\ k & : & a & \succ & b & \succ & \dots \\ >k & : & \dots & \succ & a & \succ & b \end{array} \right\} \mapsto a \quad \text{nicht} \quad b$$

$$P^5 = \left\{ \begin{array}{rccccccc} <k & : & \dots & \succ & b & \succ & a \\ k & : & a & \succ & b & \succ & \dots \\ >k & : & \dots & \succ & a & \succ & b \end{array} \right\} \mapsto a$$

$$P^6 = \left\{ \begin{array}{rccccccccc} <k & : & \dots & \succ & c & \succ & b & \succ & a \\ k & : & a & \succ & c & \succ & b & \succ & \dots \\ >k & : & \dots & \succ & c & \succ & a & \succ & b \end{array} \right\} \mapsto a$$

$$P^7 = \left\{ \begin{array}{rccccccccc} <k & : & \dots & \succ & c & \succ & b & \succ & a \\ k & : & a & \succ & c & \succ & b & \succ & \dots \\ >k & : & \dots & \succ & c & \succ & b & \succ & a \end{array} \right\} \mapsto a \quad \text{nicht} \quad b$$

Satz von Muller–Satterthwaite

Beweis des Satzes von Muller–Satterthwaite I1D:
Vorgelegt sei ein Auswahlverfahren $W : \mathbb{S}^n \to A$, einhellig und monoton. Wir untersuchen die gezeigten Präferenzvektoren $P^\ell = (P^\ell_1, \dots, P^\ell_n)$ und berechnen allein mit Einhelligkeit und Monotonie die Auswahl $W(P^\ell)$:

(0) Dank Einhelligkeit gilt anfangs $W(P^0) = a$.

(1) Wir rücken b schrittweise nach oben solange $W(P^1) = a, \dots$

(2) bis schließlich $W(P^2) = b$. Dank Einhelligkeit geschieht dies irgendwann. Dank Monotonie geschieht es beim Tausch $a \leftrightarrow b$.

(3) In allen Präferenzen P^2_i mit $i \neq k$ rücken wir a nach unten. Dank Monotonie bleibt das Ergebnis $W(P^3) = b$ erhalten.

(4) In Präferenz P^3_k tauschen wir die Alternativen $a \leftrightarrow b$. Dank Monotonie ist das Ergebnis hier $W(P^4) \in \{a, b\}$. Wäre $W(P^4) = b$, dann auch $W(P^1) = b$ dank Monotonie. Dies ist ein Widerspruch zu (1), also gilt $W(P^4) = a$.

Satz von Muller–Satterthwaite

(5) In allen Präferenzen P^4_i mit $i < k$ rücken wir b nach unten. Dank Monotonie bleibt das Ergebnis $W(P^5) = a$ erhalten.

(6) Wir betrachten nun eine dritte Alternative $c \in A \smallsetminus \{a, b\}$. Diese rücken wir in P^6 jeweils in die angegebene Position. Dank Monotonie bleibt das Ergebnis $W(P^6) = a$ erhalten.

(7) In allen Präferenzen P_i mit $i > k$ tauschen wir $a \leftrightarrow b$. Dank Monotonie ist das Ergebnis $W(P^7) \in \{a, b\}$. Es kann nicht b sein, denn überall gilt $c \succ b$. (Andernfalls rücke das Paar $c \succ b$ überall ganz nach oben; dank Monotonie und Einhelligkeit gälte dann $W(P) = c$, Widerspruch.)

In der speziellen Konstellation P^7 setzen alle Wähler die Alternative a ans Ende, nur k nach vorne, dennoch gilt $W(P^7_1, \dots, P^7_n) = \max P^7_k$. Dank Monotonie gilt dies für alle Präferenzvektoren $(P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{S}^n$.

Das bedeutet, Spieler k ist Diktator für das Verfahren W. $\boxed{\text{QED}}$

Kapitel J

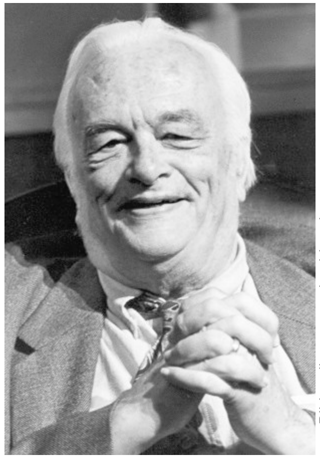
Auktionen und Satz von Vickrey

Höre ich mehr?

Inhalt dieses Kapitels

William Vickrey (1914–1996)

William Vickrey (1914–1996) war ein US-amerikanischer Ökonom. Er nutzte als erster Methoden der Spieltheorie, um die Dynamik von Auktionen zu untersuchen. In seiner bahnbrechenden Arbeit *Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders* bewies er 1961 Gleichgewichte für Auktionen und damit die grundlegende Erlösäquivalenz. Dieses Prinzip und spätere Verallgemeinerungen sind bis heute der Grundstein der Auktionstheorie. Zu seinen Ehren heißt die Zweitpreisauktion auch Vickrey–Auktion.



Bildquelle: www.columbia.edu

Vickrey erhielt gemeinsam mit James Mirrlees den Wirtschaftsnobelpreis 1996 für seine Beiträge zur ökonomischen Theorie von Anreizen bei unterschiedlichen Graden von Information der Marktteilnehmer.
Er starb kurz nach Bekanntgabe des Preises.

Motivation und Überblick

Auktionen werden seit der Antike als ökonomisches Instrument genutzt. In den letzten Jahrzehnten, speziell im Internet, gewinnen sie verstärkt an Bedeutung. Auktionstheorie ist eine erfolgreiche und prominente Anwendung der Spieltheorie, insbesondere des Mechanismendesigns.

Auktionen sind Marktinstrumente; die Verfahrensregeln bestimmen aus den Geboten der Teilnehmer die Zuteilung und den Preis der Ressource. Die Bieter / Käufer kennen die Regeln und verhalten sich strategisch. Der Auktionator / Verkäufer kann die Spielregeln wählen und dadurch das Verhalten der Spieler lenken. Insbesondere kann er versuchen, gewisse Ziele zu implementieren, etwa seinen Erlös zu maximieren.

Wir erkennen hierin viele Themen der vorangegangenen Kapitel wieder: Auktionen sind Spiele, meist dynamisch mit unvollständiger Information. Sie ähneln Verhandlungen oder kollektiven Entscheidungen in einem präzise umrissenen ökonomischen Rahmen. Sie sind zentrale Beispiele von Mechanismendesign und Implementierungstheorie. Last not least, Auktionen sind eine reiche Quelle empirischer Daten zu ökonomischen Verhalten und erlauben, die spieltheoretischen Vorhersagen zu testen.

Auktionen: heutige Beispiele

J101 Erläuterung

Weit verbreitet und allgemein bekannt sind Internetauktionen; eBay nutzt eine Zweitpreisauktion / Englische Auktion, ähnlich einer Saalauktion.

Viele Zentralbanken nutzen Auktionen, um Staatsanleihen zu vergeben, etwa die Deutsche Bundesbank, die Europäische Zentralbank oder auch das Finanzministerium der Vereinigten Staaten von Amerika (*Treasury*).

Öffentliche Aufträge werden oft durch Erstpreisauktion vergeben. Die Rollen sind vertauscht, es gewinnt der Bieter mit dem niedrigsten Gebot.

Die Bundesnetzagentur versteigerte bislang zweimal, 2000 und 2010, UMTS-Lizenzen (Frequenzblöcke) an zugelassene Mobilfunkanbieter zur Nutzung durch das Universal Mobile Telecommunications System. Im Jahr 2000 versteigerte sie 12 Frequenzblöcke für einen Gesamterlös von 50 Mrd Euro. Vodafone, EPlus, O2, TMobile zahlten jeweils etwa 16.5 Mrd Euro, Mobilcom und Quam gaben später ihre Lizenzen zurück. Durch die hohen Investitionskosten mussten die Firmen Fremdkapital aufnehmen und gerieten zwischenzeitlich stark unter Druck. Die Kosten werden bis heute an die Endkunden weitergegeben. Die Versteigerung weiterer Frequenzen im Jahre 2010 erbrachte weniger als 5 Mrd Euro.

Auktionen: historische Beispiele

J102 Erläuterung

Kunstobjekte und Antiquitäten werden seit jeher in Auktionen versteigert. Auch frische Handelsware wird traditionell so verkauft, etwa Tabak, Fisch oder Blumen, aber auch Rohstoffe bis hin zu Altmetall. Gleiches gilt für natürliche Ressourcen, etwa Forstrechte oder Ölbohrlizenzen.

Ihre vielleicht wichtigste Rolle spielten Auktionen bei der Privatisierung von Transportsystemen oder anderen ehemals staatlichen Betrieben. Die UMTS-Lizenzen sind ein weiterer Höhepunkt dieser langen Reihe.

Das römische Kaiserreich erlebte oft turbulente Zeiten. Im Jahre 193 wurden nacheinander vier Männer zum Kaiser ausgerufen: Pertinax (Januar bis März 193), Didius Julianus (März bis Juni 193), Septimius Severus (193-211) und als Gegenkaiser Pescennius Niger (193-194).

Die Prätorianergarde tötete am 28. März den Kaiser Pertinax (126–193) und versteigerte kurzerhand das Römische Imperium. Didius Julianus gab das Höchstgebot von 25000 Sesterzen pro Mann der Garde und wurde daraufhin Kaiser — und zwei Monate später enthauptet, da er seine Geldversprechen nicht einhalten konnte. Ihm folgte Septimius Severus, der sich auf die Mehrheit der römischen Legionen stützte.

Auktionen: vereinfachende Grundannahmen

J103

Wir betrachten eine **Auktion** mit folgenden Grunddaten:

1. Die Spieler $i \in I = \{1, \dots, n\}$ sind die Käufer, genauer **Bieter**.
2. Es wird genau ein **Objekt** verkauft (nicht etwa mehrere zugleich).
3. Private Information: Spieler i schätzt den **Wert** des Objekts auf s_i gemäß einer **Zufallsvariablen** $S_i : (\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}_{\ge 0} : \omega \to s_i$.

Zur Vereinfachungen nehmen wir zusätzlich an:

5. Die **Verteilung** von $(S_1, \dots, S_n) : (\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}^n$ ist öffentlich bekannt.
6. Die Variablen $S_1, \dots, S_n$ sind **unabhängig und identisch verteilt**.
7. Jeder Spieler ist **risikoneutral**, optimiert also den Erwartungswert.

Der Verkäufer / Auktionator legt das **Verfahren** der Auktion fest...

Spieltheorie: Wie bieten die Spieler? Rationalität? Gleichgewichte?

Allokation: An wen geht das Objekt? den Bieter mit höchstem Wert?

Effizienz: Was ist der erwartete Erlös für den Auktionator?

Mechanismendesign: Welches Verfahren wählt der Auktionator?

Auktionen: vereinfachende Grundannahmen

J104 Erläuterung

Ich präzisiere die Grundannahmen, damit wir bequem rechnen können. Manche dieser Annahmen scheinen plausibel und leicht zu akzeptieren, andere jedoch sind stark einschränkend und praktisch selten erfüllt: Die Anzahl der teilnehmenden Bieter kann zufällig und unbekannt sein, es können mehrere Objekte versteigert werden, evtl. in Paketen, etc.

Wesentlich für das Modell sind die Wertschätzungen $S_i : (\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}_{\ge 0}$. Zur Vereinfachung nehmen wir sie als unabhängig an. Das ist halbwegs realistisch bei Objekten von rein privatem Wert. Es ist unrealistisch bei Wirtschaftsobjekten wie natürlichen Ressourcen, etwa Schürfrechten, Forstlizenzen, etc: Die Schätzungen sind hier stark positiv korreliert.

Wir untersuchen hier zunächst nur das Grundmodell; Verfeinerungen ergeben realistischere Modelle und enthüllen weitere Phänomene.

📖 V. Krishna: *Auction Theory*, Academic Press 2009.
P. Klemperer: *Auctions Theory and Practice*, PUP Princeton 2004.
P. Milgrom: *Putting Auction Theory to Work*, CUP Cambridge 2004.
F.M. Menezes, P.K. Monteiro: *An Introduction to Auction Theory*, OUP Oxford 2008.

Auktionen: klassische Verfahren

Für Auktionen mit einem Objekt gibt es mehrere klassische Verfahren. Die einfachsten und häufigsten sind die beiden folgenden Typen:

Erstpreisauktion, *first price (sealed bid) auction*:
Jeder Bieter gibt verdeckt sein verbindliches Gebot ab.
Der Bieter mit dem höchsten Gebot erhält das Objekt und bezahlt das höchste Gebot (also sein eigenes).
Typisches Beispiel: Vergabe öffentlicher Aufträge.
Strategisch äquivalent zur **Holländischen Auktion**.

Zweitpreisauktion, *second price (sealed bid) auction*:
Jeder Bieter gibt verdeckt sein verbindliches Gebot ab.
Der Bieter mit dem höchsten Gebot erhält das Objekt und bezahlt das zweithöchste Gebot (nach seinem eigenen).
Typisches Beispiel: Internetauktion, etwa bei eBay.
Strategisch äquivalent zur **Englischen Auktion**.

Die Zweitpreisauktion heißt auch **Vickrey–Auktion**, nach dem Nobelpreisträger William Vickrey, der sie theoretisch untersucht hat.

Auktionen: klassische Verfahren

Um die theoretische Untersuchung von Auktionen zu vereinfachen, gehen wir zunächst von verdeckten und einmaligen Geboten aus. Das ist eine dramatische Vereinfachung, aber für das Erste hilfreich: Diese Sichtweise ist vollkommen nüchtern und blendet die komplizierte Dynamik von wechselseitigem Bieten und Überbieten zunächst aus.

Warum ist das sinnvoll? Erstaunlicherweise beruht das auf unserer obigen Annahme der stochastisch unabhängigen Wertschätzung! Beim wechselseitigen Bieten fließen offensichtlich Informationen. Da wir die Wertschätzungen $(S_1, \dots, S_n)$ als unabhängig annehmen, kann jeder Bieter alle Informationen der anderen getrost ignorieren.

Anders gesagt: Je nach Auktionsform können die Spieler interagieren, aufgrund der Unabhängigkeit haben sie aber keinerlei Vorteil davon. Im hier vorgestellten Grundmodell rechnet jeder Spieler kühl und rational seine Bietstrategie *vor* der Auktion aus und lässt sich anschließend nicht von möglichem Brimborium *während* der Auktion beeindrucken.

Viele reale Auktionen verlaufen erfahrungsgemäß deutlich anders, deshalb betone ich hier die einschneidenden Vereinfachungen.

Auktionen: klassische Verfahren

Die klassische Englische Auktion ist eine Vorwärtsauktion: Die Bieter steigern ihre Gebote, etwa durch Zuruf oder Handzeichen, bis das Höchstgebot feststeht oder die vorgegebene Zeit abläuft.

Das ist strategisch äquivalent zur Zweitpreisauktion. Allerdings nur unter der Annahme, dass die Bieter trotz größerer Interaktionsmöglichkeiten stur dieselbe Bietstrategie verfolgen. Das ist eine sehr starke und oft unrealistische Rationalitätsforderung: Aufgrund der Unabhängigkeit lassen die Spieler sich vom Auktionsverlauf nicht beeinflussen, sondern ignorieren alle Signale der anderen Spieler als irrelevant.

Das Auktionsportal eBay nutzt eine Variante dieser Auktionsform. Im einfachsten Falle nennt der Spieler sein Höchstgebot einem Agenten, der stur gemäß dieser Anweisung in einer englischen Auktion bietet. Allerdings wird als Zwischenstand das aktuelle Höchstgebot angezeigt, was viele Spieler zur nachträglichen Erhöhung ihres Gebotes animiert. Dieses Verhalten ist von eBay durchaus beabsichtigt. Es ist vermutlich oft irrational, kann aber auch zur Neueinschätzung des Wertes dienen.

Auktionen: klassische Verfahren

Die Holländische Auktion (engl. *Dutch auction*) hingegen ist eine Rückwärtsauktion mit fallenden Preisen. Der Auktionator gibt einen (hohen) Startpreis vor und senkt diesen schrittweise bis zum Zuschlag.

Das ist strategisch äquivalent zur Erstpreisauktion.

Ein Vorteil der holländischen Auktion besteht in ihrer Geschwindigkeit. Im Gegensatz zu einer gewöhnlichen Saalauktion wird das Auktionsgut rasch verkauft, die Entscheidung fällt schon bei der ersten Zustimmung eines Interessenten. Die Bieter können nicht aufeinander reagieren, Bietergefechte sind ausgeschlossen. Somit können große Mengen von Auktionsgütern in kurzer Zeit verkauft werden. Die Bieter stehen dabei unter hohem Entscheidungsdruck: Wenn ein Interessent taktiert und auf einen günstigeren Preis wartet, besteht die Gefahr, dass das Auktionsgut an einen Konkurrenten verkauft wird, der schneller zugreift.

Zahlreiche Varianten sind möglich. Zum Beispiel kann der Verkäufer ein Mindestgebot fordern oder hat die Option, das Objekt nicht zu verkaufen.

Perfide Auktion als Glücksspiel: Jeder zahlt.

Beispiel: Die Jeder-Bieter-zahlt-Auktion funktioniert wie folgt:

- Jeder Bieter gibt verdeckt sein verbindliches Gebot ab.
- Der Bieter mit dem höchsten Gebot erhält das Objekt.
- Jeder Bieter bezahlt sein eingereichtes Gebot.

Aufgabe: Was sagt die Theorie? Was geschieht im Experiment?

Lösung: Der Erlösäquivalenzsatz J1C klärt die theoretische Seite. Solche Auktionen werden wir anschließend selbst als Experiment durchführen und sowohl empirisch als auch theoretisch diskutieren.

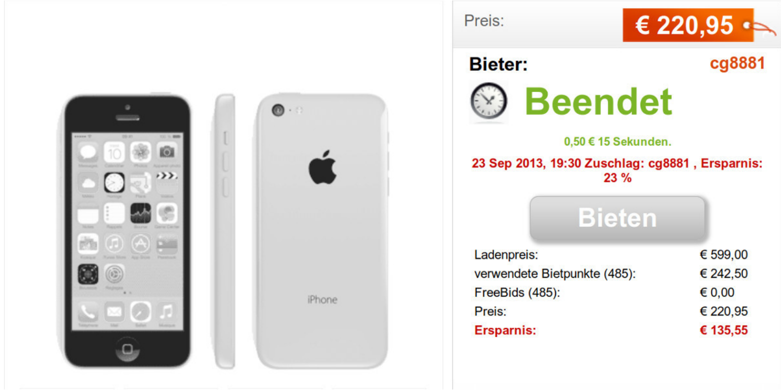
Variante: Mit öffentlich ausgerufenen Geboten ist die Auktion lebhafter, allerdings ist die Dynamik komplizierter und schwieriger zu analysieren. Die Gebote sind Signale, dadurch fließt Information, die Bieter können aufeinander reagieren, anders als im statischen Fall verdeckter Gebote.

Solche Auktionen scheinen zunächst sonderbar. In manchen Situationen sind sie durchaus realistisch, etwa als Modell für politisches Lobbying. Ebenso könnte ein gieriger Auktionator dieses Verfahren vorschlagen, und hoffen, dadurch einen besonders hohen Erlös zu erzielen.

Perfide Auktion als Glücksspiel: Jeder zahlt.

Bei einer **Pennyauktion** ist jedes Gebot kostenpflichtig, so dass alle Teilnehmer bezahlen, auch wenn sie den Artikel gar nicht erwerben. Das Verfahren gilt als Glücksspiel und ist in manchen Ländern verboten.

Reales Beispiel: Ein iPhone steigert bis 220.95€. Hierzu sind 22095 Gebote abgegeben worden: Jedes kostet sofort 50 Cent und erhöht den Preis um einen Cent. Insgesamt wurde also der Preis für mehr als 18 iPhones bezahlt, es stand aber nur ein einziges Gerät zum Verkauf.



Perfide Auktion als Glücksspiel: Jeder zahlt.

Ebenso funktionieren **Wettbewerbe** mit aufwändigen Einsendungen wie Architekturwettbewerbe oder Exzellenzwettbewerbe von Universitäten. Solche Verfahren erfreuen sich bei den Veranstaltern großer Beliebtheit, auf Seiten der Bewerber vernichten sie Tausende von Arbeitsstunden.

Alle Teilnehmer müssen zunächst mit viel Arbeit in Vorleistung gehen, um das für den Wettbewerb geforderte aufwändige Material zu erstellen. Je mehr Arbeit investiert wird, desto besser werden die Erfolgschancen. Doch nur ein glücklicher Bewerber gewinnt, die anderen gehen leer aus.

Wenn zudem mehrfach überboten werden kann, so droht eine Eskalation und Bietspirale, wie das nachfolgende Experiment eindrücklich belegt.

Ein ähnliches Beispiel dieser Art sind risikobehaftete **Warteschlangen**, etwa für rare Tickets zu einem begehrten Konzert oder Sportevent.

Ein drastisches Beispiel mit nur *einem* Objekt ist der gemeinsame **Maklertermin** zur Besichtigung und Bewerbung um eine Wohnung.

Bei langen militärischen Konflikten spricht man von **Abnutzungskrieg**, engl. *war of attrition*. Die Verluste übersteigen die möglichen Gewinne.

Perfide Auktion als Glücksspiel: Jeder zahlt.

Ein weiteres Beispiel hierzu sind **politische Kampagnen**, besonders eindrücklich ist die Finanzierung des US-Präsidentschaftswahlkampfs.

Traditionell sammeln Lobbygruppen große Spendensummen für ihren Kandidaten, um Einfluss auf die zukünftige Politik der USA zu nehmen. Manche Großkonzerne oder (einfluss)reiche Personen spenden auch, um sich die Gunst der (vermeintlich) zukünftigen Regierung zu sichern.

Zur Einschätzung der Größenordnung die bisherigen Rekorde: Im Jahr 2012 waren dies 853 Mio Dollar, im Jahr 2016 gar über 1 Mrd Dollar. Darunter machen nur zehn Personen über 20% der Spenden aus. Es handelt sich also nicht um basisdemokratisches *crowd funding*.

Bemerkenswerterweise gingen 704 Mio an Clinton, aber nur 323 Mio an Trump. Clinton galt vielen bis zur Wahl als wahrscheinliche Siegerin.

Dieses Geld wird im Wahlkampf in Kampagnen investiert, also verbrannt, doch nur der Wahlsieger erhält schließlich als Preis die Präsidentschaft. Neben Inhalten entscheiden auch Spenden: Geld kauft mediale Präsenz und damit größere Gewinnchancen. Dies entspricht einer Auktion.

Zweitpreisauktion: spieltheoretische Analyse

Aufgabe: Spieler i kennt nur seine eigene Schätzung $s_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
(1) Was sind Strategien B_i für Spieler i? Was ist sein Erlös $u_i(B \mid s)$?
(2) Finden Sie ein Gleichgewicht in (schwach) dominanten Strategien!
(3) Welchen Erlös erzielt der Verkäufer / Auktionator?

Lösung: (1) Spieler i bietet gemäß seiner Strategie

$$B_i \;:\; \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \;:\; s_i \mapsto b_i = B_i(s_i).$$

Seine Auszahlung berechnet sich aus den Werten s_i und Geboten b_i:
Sei $c_i := \max_{j \neq i} b_j$ das Höchstgebot aller anderen Bieter. Dann gilt

$$u_i(B_1, \dots, B_n \mid s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} s_i - c_i & \text{falls } b_i > c_i, \\ 0 & \text{falls } b_i < c_i. \end{cases}$$

Bei Gleichstand $b_i = c_i$ wird unter den höchsten Geboten gelost.

Für $i \in I$ sind $C_i := \max_{j \neq i} B_j(S_j)$ und $T_i := \max_{j \neq i} S_j$ Zufallsvariablen.
Sind alle $B_1 = \dots = B_n = B$ gleich und monoton, so gilt $C_i = B(T_i)$.

Zu T_i berechnet sich die kumul. Verteilung $G_i(t) = \mathbf{P}[T_i \leq t]$ aus der Verteilung von $(S_1, \dots, S_n)$. Bei Unabhängigkeit gilt $G_i = \prod_{j \neq i} F_j$.

Zweitpreisauktion: spieltheoretische Analyse

Wir beginnen unsere Untersuchung mit der Zweitpreisauktion, denn sie ist spieltheoretisch besonders leicht zu analysieren. Zudem erweist sie sich gleich als das zentrale Referenzmodell: Alle Auktionen, die gewissen Mindestanforderungen genügen, sind erlösäquivalent zur Zweitpreisauktion (Satz von Vickrey).

Ihre zentrale Rolle verdankt die Zweitpreisauktion der folgenden bemerkenswerten Eigenschaft: Die Spieler brauchen hier nicht zu taktieren, zu analysieren oder zu spekulieren, jeder Spieler erreicht seine optimale Gewinnerwartung durch wahrheitsgemäßes Bieten.

Diese Besonderheit nennen wir die **Offenbarungseigenschaft**, engl. *revelation principle*. Sie ist bemerkenswert und überaus nützlich.

Wir können dies nun explizit nachrechnen! Dazu müssen wir zunächst die Auktion explizit als Spiel ausschreiben (1), und dann sorgfältig alle Gleichgewichtserlöse bestimmen (2). Dies führt zu folgendem Satz.

Zweitpreisauktion: spieltheoretische Analyse

Satz J1A (Offenbarungseigenschaft und Erlös)

In der Zweitpreisauktion ist die Strategie $B_i = \mathrm{id}$ schwach dominant: Spieler i bietet gemäß $B_i(s_i) = s_i$ den wahren Wert seiner Schätzung.

Sein Gebot s_i erhält somit den Zuschlag mit Wkt $\mathbf{P}\big[T_i \leq s_i\big] = G_i(s_i)$. Der Auktionserlös ist dann $\int_{t=0}^{s_i} t\, g_i(t)\, \mathrm{d}t = \mathbf{E}\big[T_i \mid T_i \leq s_i\big]\, \mathbf{P}\big[T_i \leq s_i\big]$.

Beweis: Angenommen, Spieler i bietet $b_i > s_i$ statt s_i. Drei Fälle:

$c_i > b_i > s_i$: Auszahlung $u_i' = 0 = u_i$.

$b_i > s_i > c_i$: Auszahlung $u_i' = s_i - c_i = u_i$.

$b_i > c_i > s_i$: Auszahlung $u_i' = s_i - c_i < 0 = u_i$.

Angenommen, Spieler i bietet $b_i < s_i$ statt s_i. Drei Fälle:

$c_i > s_i > b_i$: Auszahlung $u_i' = 0 = u_i$.

$s_i > b_i > c_i$: Auszahlung $u_i' = s_i - c_i = u_i$.

$s_i > c_i > b_i$: Auszahlung $u_i' = 0 < s_i - c_i = u_i$.

In jedem Falle erzielt $B_i = \mathrm{id} : s_i \mapsto s_i$ das beste Ergebnis. $\boxed{\text{QED}}$

Zweitpreisauktion: spieltheoretische Analyse

Aufgabe: Wir untersuchen hier die Abweichungen $b_i > s_i$ bzw. $s_i > b_i$ und sortieren den Wert c_i auf die drei möglichen Weisen ein. Es bleiben noch zwei Gleichheitsfälle: Was passiert hier?

Lösung: Es passiert nichts wesentlich neues, aber auch diese Fälle müssen diskutiert werden.

Bei der Zweitpreisauktion (Vickrey–Auktion) sind die Regeln so gestaltet, dass es für jeden Bieter eine beste Strategie ist, wahrheitsgetreu zu bieten, also genau so viel, wie ihm das Objekt tatsächlich wert ist.

Anders gesagt: Spieler i offenbart seine private Information s_i. Das ist allgemein ein wichtiges Prinzip für das Mechanismendesign, der Nachweis seiner Gültigkeit ist jeweils ein erster Schritt zur Lösung.

Wenn es einen Mechanismus gibt, der eine soziale Auswahlfunktion implementiert, dann gelingt dies ebenfalls mit einen wahrheitsgemäßen Mechanismus. Solche Mechanismen heißen auch anreizkompatibel.

Erstpreisauktion: spieltheoretische Analyse

Aufgabe: Spieler i kennt nur seine eigene Schätzung $s_i \in \mathbb{R}_{\ge 0}$.
(1) Was sind Strategien B_i für Spieler i? Was ist sein Erlös $u_i(B \mid s)$?
(2) Finden Sie alle symmetrischen Nash–Gleichgewichte!
(3) Welchen Erlös erzielt der Verkäufer / Auktionator?

Lösung: (1) Spieler i bietet gemäß seiner Strategie

$$B_i \;:\; \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0} \;:\; s_i \mapsto b_i = B_i(s_i).$$

Seine Auszahlung berechnet sich aus den Werten s_i und Geboten b_i:
Sei $c_i := \max_{j \ne i} b_j$ das Höchstgebot aller anderen Bieter. Dann gilt

$$u_i(B_1, \dots, B_n \mid s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} s_i - b_i & \text{falls } b_i > c_i, \\ 0 & \text{falls } b_i < c_i. \end{cases}$$

Bei Gleichstand $b_i = c_i$ wird unter den höchsten Geboten gelost.

Für $i \in I$ sind $C_i := \max_{j \ne i} B_j(S_j)$ und $T_i := \max_{j \ne i} S_j$ Zufallsvariablen.
Sind alle $B_1 = \dots = B_n = B$ gleich und monoton, so gilt $C_i = B(T_i)$.

Zu T_i berechnet sich die kumul. Verteilung $G_i(t) = \mathbf{P}[T_i \le t]$ aus der Verteilung von $(S_1, \dots, S_n)$. Bei Unabhängigkeit gilt $G_i = \prod_{j \ne i} F_j$.

Erstpreisauktion: spieltheoretische Analyse

(2) Jede Zufallsvariable S_i sei stetig verteilt mit Dichte f_i, kumuliert F_i.
Die Zufallsvariablen $S_1, \dots, S_n$ seien unabhängig identisch verteilt.

Symmetrisches Gleichgewicht $B_1 = \dots = B_n = B \;:\; \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$.
Vereinfachende Annahmen: B sei stetig diff'bar, $B(0) = 0$ und $B' > 0$.

Zum Wert s_i und Gebot $b_i = B(s_i)$ ist dann der erwartete Gewinn:

$$\begin{aligned} u_i(b_i \mid s_i) &= (s_i - b_i)\, \mathbf{P}\big[\forall j \ne i : B(S_j) < b_i\big] \\ &= (s_i - b_i)\, \mathbf{P}\big[\forall j \ne i : S_j \le B^{-1}(b_i)\big] \\ &= (s_i - b_i)\, \mathbf{P}\big[T_i := \max\nolimits_{j \ne i} S_j \le B^{-1}(b_i)\big] \\ &= (s_i - b_i)\, G_i(B^{-1}(b_i)) \quad \to \quad \max! \end{aligned}$$

Dank Unabhängigkeit gilt $G_i := \prod_{j \ne i} F_i$, dank Symmetrie $G := F^{n-1}$.
Wir lassen fortan alle Indizes weg. Wir maximieren die Erlösfunktion

$$h(b) = (s - b)\, G(B^{-1}(b)).$$

Ihre erste Ableitung ist

$$h'(b) = -G(B^{-1}(b)) + (s - b)\, \frac{g(B^{-1}(b))}{B'(B^{-1}(b))}.$$

Erstpreisauktion: spieltheoretische Analyse

Für $h'(b) = 0$ und $b = B(s)$ finden wir die Differentialgleichung

$$G(s) B'(s) = (s - B(s))\, g(s).$$

🙂 Dies ist eine inhomogene lineare DG. Wir schreiben sie um zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big[G(s) B(s)\big] = s\, g(s).$$

Mit Anfangswert $B(0) = 0$ wird sie gelöst durch

$$B(s) = \frac{1}{G(s)} \int_{t=0}^{s} t\, g(t)\, \mathrm{d}t = \mathbf{E}\big[T \mid T \le s\big]$$

🙂 Das ist die optimale Bietstrategie. Anschaulich ist das plausibel: $B(s)$ ist der Erwartungswert des höchsten Gebotes T aller anderen Bieter, unter der Bedingung $T \le s$. Der Auktionserlös ist demnach

$$G(s) B(s) = \int_{t=0}^{s} t\, g(t)\, \mathrm{d}t = \mathbf{E}\big[T \mid T \le s\big]\, \mathbf{P}\big[T \le s\big]$$

🙂 Die Erstpreisauktion bringt also keinen größeren Erlös als die Zweitpreisauktion: Beide Auktionsverfahren sind erlösäquivalent!

Erstpreisauktion: spieltheoretische Analyse

Satz J1B (Erlösäquivalenz zwischen Erst- und Zweitpreisauktion)

Unter den genannten Bedingungen gilt: In der Erstpreisauktion erwarten Bieter und Auktionator denselben Erlös wie in der Zweitpreisauktion.

Bemerkenswerterweise kann der Verkäufer mit der Erstpreisauktion nicht mehr einnehmen: Rationale Spieler passen ihr Verhalten dem Auktionsverfahren an und spekulieren auf das Verhalten der anderen. Es gibt ein eindeutiges symmetrisches Nash–Gleichgewicht, das wir hier berechnet haben, und der zugehörige Erlös ist exakt derselbe wie zuvor.

Die Differenz zwischen höchster und zweithöchster Wertschätzung geht dem Auktionator auch hier verloren. Diese Ineffizienz ist unvermeidlich. Sie ist der Preis für seine unvollständige Information: Der Verkäufer kennt keine der privaten Informationen $s_1, \dots, s_n$. Kennte er sie alle, so könnte er das Objekt tatsächlich für $\max\{s_1, \dots, s_n\}$ verkaufen, indem er es zum höchsten Preis anbietet (oder knapp darunter).

Versteigerungen sind eine praktikable Approximation an dieses Ideal. Können wir noch bessere Implementierungen finden? Theoretisch: nein!

Der Erlös-Äquivalenz-Satz

Wir machen weiterhin folgende Annahmen:

1. Die Variablen $S_1, \dots, S_n$ sind unabhängig und identisch verteilt.
2. Jeder Spieler ist risikoneutral, optimiert also den Erwartungswert.

Wir betrachten Auktionsverfahren mit folgenden Eigenschaften:

3. Es existiert ein symmetrisches Gleichgewicht $(B_1, \dots, B_n)$.
4. Zur Wertschätzung $s_i = 0$ ist der Erlös $u_i(B \mid s) = 0$.
5. Die höchste Wertschätzung erhält den Zuschlag.

Satz J1C (Erlösäquivalenz, Vickrey 1961)

In all solchen Auktionsverfahren erwarten Bieter und Auktionator denselben Erlös wie in der Zweitpreisauktion (Vickrey–Auktion).

🙂 Der Verkäufer will seinen Erlös maximieren. Die Zweitpreisauktion scheint zunächst ineffizient, doch jede andere Auktion liefert dasselbe.

Dies gilt unter den genannten Bedingungen, also präzise eingegrenzt. Insbesondere Rationalität und Unabhängigkeit sind starke Forderungen.

Der Erlös-Äquivalenz-Satz

Beweis: Sei $B_1 = \dots = B_n = B : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ die Bietstrategie. Wie zuvor sei B stetig differenzierbar mit $B(0) = 0$ und $B' > 0$.

Für jeden Bieter $i \in I$ sei $Z(s_i)$ die erwartete Zahlung (zum Beispiel Erstpreis, Zweitpreis, etc.) bei Wertschätzung s_i. Es gilt $Z(0) = 0$. Sei $T_i = \max_{j \ne i} S_j$ mit kumulativer Verteilung $G_i = G = F^{n-1}$.

Angenommen, Spieler i bietet b statt $b_i = B(s_i)$. Dies entspräche der geänderten Wertschätzung $s = B^{-1}(b)$. Sein erwarteter Gewinn ist

$$\begin{aligned} h(s) &= s_i\, G(s) - Z(s), \\ h'(s) &= s_i\, g(s) - Z'(s). \end{aligned}$$

Im Gleichgewicht wird der erwartete Gewinn maximiert durch $s = s_i$, demnach gilt $h'(s_i) = 0$, also $Z'(s_i) = s_i\, g(s_i)$. Wir integrieren dies zu

$$Z(s_i) = Z(0) + \int_{t=0}^{s_i} t\, g(t)\, \mathrm{d}t = \mathbf{E}\big[T_i \mid T_i \le s_i\big]\, \mathbf{P}\big[T_i \le s_i\big].$$

🙂 Das ist genau der Erlös der Vickrey–Auktion (Satz J1A). $\boxed{\text{QED}}$

Wie formalisieren wir Auktionsverfahren?

Der gerade erklärte Satz lässt noch zu viel Interpretationsspielraum: Was bedeutet der Allquantor „In all solchen Auktionsverfahren…“? Um die berühmt-berüchtigte **mathematische Präzision** zu erreichen, müssen wir erklären, was wir unter einem Auktionsverfahren verstehen.

Aufgabe: (1) Formalisieren Sie das Verfahren als Funktion der Gebote: Wer bekommt das Objekt mit welcher Wkt und wieviel muss er zahlen?

(2) Führen Sie dies explizit aus für die Erst- und Zweitpreisauktion.

(3) Erklären Sie wünschenswerte Eigenschaften von Auktionsverfahren, speziell Symmetrie, Monotonie, Stetigkeit, Neutralität, Einhelligkeit.

(4) Was sind Bietstrategien? Wie folgt daraus der erwartete Gewinn?

(5) Führen Sie damit den obigen Beweis möglichst explizit aus: Die Idee bleibt, aber die Notation ist nun präziser.

Wie formalisieren wir Auktionsverfahren?

Lösung: (1) Die Spieler geben ihre **Gebote** $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ ab. Das Auktionsverfahren definiert die **Zahlung** und die **Zuteilungswkt**:

$$\begin{aligned} Z_i &: \mathbb{R}^n_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0} : (b_1, \dots, b_n) \mapsto Z_i(b_1, \dots, b_n) \\ P_i &: \mathbb{R}^n_{\ge 0} \to [0,1] : (b_1, \dots, b_n) \mapsto P_i(b_1, \dots, b_n) \\ & \qquad \forall b \in \mathbb{R}^n_{\ge 0} : \textstyle\sum_{i=1}^n P_i(b) \le 1 \end{aligned}$$

Zu jedem Gebotsvektor $b \in \mathbb{R}^n_{\ge 0}$ ist $Z_i(b)$ die von Spieler i zu leistende Zahlung und $P_i(b)$ die Wkt, dass Spieler i das Objekt zugeteilt wird. Wir könnten $\sum_{i=1}^n P_i(b_1, \dots, b_n) = 1$ erwarten bzw. axiomatisch fordern, aber auch < 1 ist eventuell sinnvoll, wenn das Objekt nicht verkauft wird.

Umgekehrt wird das **Auktionsverfahren** (Z, P) festgelegt durch

$$Z, P : \mathbb{R}^n_{\ge 0} \to \mathbb{R}^n_{\ge 0} \quad \text{mit} \quad \textstyle\sum_{i=1}^n P_i \le 1.$$

🙂 Das ist alles, was ein rationaler Bieter wissen will und wissen muss, Kosten und Nutzen: „Was muss ich zahlen? Was bekomme ich dafür?“ Alle weiteren Informationen sind dekorative Schnörkel und überflüssig.

⚠ Für nicht (vollständig) rationale Bieter spielen die Einkleidung und Dekoration oft eine große Rolle, wie zahlreiche Experimente belegen.

Formalisierung: Erst- und Zweitpreisauktion

(2) Gegeben sei der Gebotsvektor $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n_{\ge 0}$.
Die Menge aller Höchstbietenden bezeichnen wir mit

$$M := \operatorname{Arg\,Max}\{\, i \mapsto b_i \,\} = \{\, i \in I \mid b_i = \max_{j \in I} b_j \,\}.$$

Die Erstpreisauktion (Z^1, P^1) ist charakterisiert durch

$$\begin{aligned} i \in M &\implies Z^1_i(b) = \frac{b_i}{\sharp M}, \quad P^1_i(b) = \frac{1}{\sharp M}, \\ i \notin M &\implies Z^1_i(b) = 0, \qquad P^1_i(b) = 0. \end{aligned}$$

Sei $i \in I$ und $c_i := \max_{j \ne i} b_j$ das Höchstgebot aller anderen.
Die Zweitpreisauktion (Z^2, P^2) ist charakterisiert durch

$$\begin{aligned} i \in M &\implies Z^2_i(b) = \frac{c_i}{\sharp M}, \quad P^2_i(b) = \frac{1}{\sharp M}, \\ i \notin M &\implies Z^2_i(b) = 0, \qquad P^2_i(b) = 0. \end{aligned}$$

☺ Das löst den Gleichstand auf, den wir oben vernachlässigt haben:
Gibt es nur einen Höchstbieter, $M = \{i\}$, so bekommt i den Zuschlag.
Gibt es hingegen $\sharp M \ge 2$ Höchstbietende, so wird gleichverteilt gelost.

Formalisierung: gute Eigenschaften

(3) Für Auktionsverfahren (Z, P) wünschen wir uns gute Eigenschaften:

SYM: Symmetrie. Für $b \in \mathbb{R}^n_{\ge 0}$ und jede Permutation $\tau : I \xrightarrow{\sim} I$ gilt

$$\begin{aligned} Z_i(b_{\tau 1}, \dots, b_{\tau i}, \dots, b_{\tau n}) &= Z_i(b_1, \dots, b_i, \dots, b_n), \\ P_i(b_{\tau 1}, \dots, b_{\tau i}, \dots, b_{\tau n}) &= P_i(b_1, \dots, b_i, \dots, b_n). \end{aligned}$$

MON: Monotonie. Für jeden Spieler $i \in I$ und $b_i \le b'_i$ gilt

$$\begin{aligned} Z_i(b_1, \dots, b_i, \dots, b_n) &\le Z_i(b_1, \dots, b'_i, \dots, b_n), \\ P_i(b_1, \dots, b_i, \dots, b_n) &\le P_i(b_1, \dots, b'_i, \dots, b_n). \end{aligned}$$

CNT: Stetigkeit. Die Kostenfunktion $b \mapsto Z_i(b)$ ist stetig.
Hingegen ist die Wkt $b \mapsto P_i(b)$ im Allgemeinen unstetig.

NEU: Neutralität. Für Gebote $b \in \mathbb{R}^n_{\ge 0}$ mit $b_i = 0$ gilt $Z_i(b) = 0$.
Wir erlauben $P_i(b) > 0$, d.h. das Objekt darf verschenkt werden.

UNA: Einhelligkeit. Gilt $b_i > \max_{j \ne i} b_j$, so folgt $P_i(b) = 1$.
Gibt es nur einen Höchstbieter, so erhält dieser den Zuschlag.

☺ Die Erst- und Zweitpreisauktion haben diese guten Eigenschaften.

Formalisierung: Wie wird geboten?

(4) Jeder Spieler $i \in I$ bietet gemäß seiner gewählten **Strategie**

$$B_i : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0} : s_i \mapsto b_i = B_i(s_i).$$

Wir haben die Wertschätzung $S : (\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}^n_{\ge 0}$ und dazu spielerweise Gebote $B : \mathbb{R}^n_{\ge 0} \to \mathbb{R}^n_{\ge 0}$ sowie das Auktionsverfahren $Z, P : \mathbb{R}^n_{\ge 0} \to \mathbb{R}^n_{\ge 0}$.
Zu gegebener **Wertschätzung** $s = S(\omega)$ hat Spieler i den Gewinn

$$u_i(B \mid s) = s_i P_i(B(s))) - Z_i(B(s)).$$

Zusammenfassend ist der **Gewinn** für Spieler i somit die Zufallsvariable

$$u_i(B_1, \dots, B_n) = S_i P_i(B_1(S_1), \dots, B_n(S_n)) - Z_i(B_1(S_1), \dots, B_n(S_n))$$

Sei $\mathcal{B}_i$ die Menge der hierzu betrachteten Bietstrategien für Spieler i.
Das Auktionsverfahren definiert die **stochastische Nutzenfunktion**

$$\tilde{u} : \mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_n \times \Omega \to \mathbb{R}^n : (B, \omega) \mapsto u(B \mid S(\omega)).$$

Im Erwartungswert erhalten wir die **Nutzenfunktion in Normalform**

$$u : \mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_n \to \mathbb{R}^n : B \mapsto \mathbf{E}\big[\omega \mapsto u(B \mid S(\omega))\big].$$

☺ Hierzu können wir nun Nash–Gleichgewichte untersuchen.

Formalisierung: Vereinfachung durch Symmetrie

Beweis: Sei $B_1 = \dots = B_n = B : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ die Bietstrategie.
Wie zuvor sei B stetig differenzierbar mit $B(0) = 0$ und $B' > 0$.

Für jeden Bieter $i \in I$ sei $Z(s_i)$ die erwartete Zahlung (zum Beispiel Erstpreis, Zweitpreis, etc.) bei Wertschätzung s_i. Es gilt $Z(0) = 0$.
Sei $T_i = \max_{j \ne i} S_j$ mit kumulativer Verteilung $G_i = G = F^{n-1}$.

Angenommen, Spieler i bietet b statt $b_i = B(s_i)$. Dies entspräche der geänderten Wertschätzung $s = B^{-1}(b)$. Sein erwarteter Gewinn ist

$$\begin{aligned} h(s) &= s_i\, G(s) - Z(s), \\ h'(s) &= s_i\, g(s) - Z'(s). \end{aligned}$$

Im Gleichgewicht wird der erwartete Gewinn maximiert durch $s = s_i$, demnach gilt $h'(s_i) = 0$, also $Z'(s_i) = s_i\, g(s_i)$. Wir integrieren dies zu

$$Z(s_i) = Z(0) + \int_{t=0}^{s_i} t\, g(t)\, \mathrm{d}t = \mathbf{E}\big[T_i \mid T_i \le s_i\big]\, \mathbf{P}\big[T_i \le s_i\big].$$

☺ Das ist genau der Erlös der Vickrey–Auktion (Satz J1A). $\boxed{\text{QED}}$

Beispiel: Versteigerung eines Euro

Beispiel: Versteigerung eines Euro:

- Das höchste Gebot gewinnt den Euro.
- Geboten / überboten wird in ganzen Cent.
- Das höchste und das zweithöchste Gebot werden gezahlt.

Zugegeben, dieses Auktionsverfahren ist etwas sonderbar, aber es ist ein mögliches Verfahren, und der Auktionator hat es nun mal gewählt.

Mit öffentlich ausgerufenen Geboten ist die Auktion mitunter sehr lebhaft, es eignet sich bestens als mathematisches Partyspiel… je nach Party.

Dieses berühmt-berüchtigte Spiel stammt von Martin Shubik: *The Dollar Auction Game*, Journal of Conflict Resolution 15 (1971) 109-111.

Aufgabe: Sammeln Sie praktische Erfahrung, spielen Sie dieses Spiel! Was beobachten Sie empirisch im Experiment? Was sagt die Theorie?

Lässt sich Satz J1C zur Erlösäquivalenz auf diese Auktion anwenden? Welche der Voraussetzungen sind (vermutlich) erfüllt, welche nicht?

Beispiel: Versteigerung eines Euro

Wir haben dieses Spiel zum Ende der Spieltheorie-Vorlesung gespielt, ohne vorherige Erklärung, zum Staunen und Lernen aller Beteiligten!

Wer dabei war, spricht vermutlich noch länger verwundert davon; alle anderen muss ich auf weniger lebhafte, schriftliche Quellen verweisen. Das beobachtete Verhalten ist rational kaum erklärlich. Shubik schreibt:

In playing this game, a large crowd is desirable. Furthermore, experience has indicated that the best time is during a party when the spirits are high and the propensity to calculate does not settle in until at least two bids have been made.

Es gelingt auch in einer Mathematikvorlesung mit etwa 30 Teilnehmern. Einmal in Fahrt wird es lustig, lebhaft, emotional, mitunter verbissen. Zwei zusätzliche Einschränkungen sind erfahrungsgemäß sinnvoll:

- Jedes Überbieten wird auf maximal zehn Cent beschränkt, um die Dynamik der Interaktion möglichst lange zu erhalten.
- Man setzt ein Höchstgebot, etwa zehn Euro in der Gesamtsumme, um allzu große Eskalation und finanziellen Schaden zu vermeiden.

Eine ausführliche Diskussion bietet László Mérö: *Moral Calculations*, Springer New York 1998. *Optimal entschieden*, Springer Basel 1998.

Beispiel: Versteigerung eines Euro

Shubiks *Versteigerung eines Euro* ist experimentell gut untersucht. Die empirischen Befunde konsolidieren unser Miniaturexperiment:

- Bei 10 oder mehr Spielern kommt das Spiel recht sicher in Gang. Einmal in Fahrt, endet es meist oberhalb des Objektwerts 1€.
- In mehr als der Hälfte der Fälle liegt der Erlös deutlich darüber. Manche Spieler setzen alles Geld, das sie gerade bei sich haben.
- Im Durchschnitt bieten Männer etwas mehr als Frauen, weil bei Männern die Eskalation leichter auszulösen ist.

Dieses Spiel gilt daher als ein Musterbeispiel für irrationales Verhalten. Dies wird noch gesteigert, wenn das Objekt ein konkreter Gegenstand mit geringem, aber bekanntem Wert ist. Die Bietspirale überschreitet schnell den objektiven Wert und ist kaum zu stoppen, da der eigentliche Objektwert völlig aus dem Blick gerät (im Gegensatz zu einem Euro).

This simple game is a paradigm for escalation. Once the contest has been joined, the odds are that the end will be a disaster to both. When this is played as a parlor game, this usually happens. […] A total of payments between three and five dollars is not uncommon.

Beispiel: Versteigerung eines Euro

Auch die psychologischen Aspekte wurden eingehend untersucht. Typische Phänomene zeigten sich bereits in unserem Experiment:

- Zu Beginn überwiegt der Anreiz, leicht Geld zu verdienen. Im weiteren Verlauf nimmt die Bedeutung des Geldes schnell ab.
- Die Schuld der Eskalation wird meist dem Gegner zugeschrieben; der habe irrational agiert, man selbst habe darauf rational reagiert. Es kommt zu Wortgefechten, wenn die Möglichkeit hierzu besteht.
- Am Ende wollen Teilnehmer vor allem den Schaden begrenzen, aber nicht für dumm oder schwach gehalten werden (Selbstwert), das Gesicht wahren oder Zuschauern imponieren (Image, Prestige), Überlegenheit beweisen oder dem Gegner schaden (Bestrafung).

Manche Versuchspersonen zeigen im Spielverlauf Stressreaktionen (Adrenalinschub), die Bietspirale setzt sie emotional unter Druck.

Die starken Emotionen der Eskalation schränken die Rationalität ein, Einsicht in die Konsequenzen des eigenen Handelns ist erschwert. Selbst erfahrene Spieler entgehen oft nicht der Eskalationsfalle.

Bedeutung im Alltag: Verhaltensökonomie

J205 Erläuterung

Viele Spieler verkennen ihre Mitschuld und die Symmetrie des Spiels. Hilfreich wäre ein Perspektivwechsel: Wie sieht das eigene Verhalten aus Sicht des Gegenübers aus? Natürlich genauso! Erst diese ehrliche und selbstkritische Antwort eröffnet die Einsicht, dass man selbst dem Gegner in der Eskalation kaum andere Handlungsoptionen lässt.

Wie könnte eine gemeinsame / kooperative / konstruktive Lösung aussehen? Wie können Spieler die Bietspirale durchbrechen?

Beide könnten sich eine gemeinsame Höchstgrenze setzen, etwa 50 Cent, und bei eventuellem Gleichstand das Objekt verlosen oder teilen. (Gleichstand haben die obigen Regeln perfiderweise ausgeschlossen.)

Die Spieler könnten vereinbaren, den gesamten Gewinn bzw. Verlust zu teilen, also eine Koalition gegen den Verkäufer bilden. (Bieterkartelle sind andernorts illegal, hier jedoch scheinen sie moralisch geboten.)

Kooperation erfordert Absprache und gegenseitiges Vertrauen; gerade bei größerer Teilnehmerzahl ist das riskant (Streikbrecher). Insbesondere erfordert eine Koalition die schnelle und präzise Analyse, und zudem effiziente Kommunikation, bevor die Eskalation losbricht.

Bedeutung im Alltag: Verhaltensökonomie

J206 Erläuterung

Wer es noch nicht erlebt hat und zum ersten Mal hört, wird behaupten: „Das gibt es nur hypothetisch, in der Spieltheorie, nicht in Wirklichkeit!" Erstaunlich viele Alltagssituationen folgen ganz ähnlichen Mechanismen; ihre empirische Untersuchung ist Grundlage der Verhaltensökonomie.

Streik: Eine Verhandlungslösung ermöglicht Ausgleich und Stabilität, Eskalation und Kampf hingegen vernichten Werte: Der Verdienstausfall für die Arbeitnehmer übersteigt rasch den geforderten Zugewinn, ebenso ist der Schaden für den Arbeitgeber schnell größer als die Forderungen.

Dennoch versucht jede Seite, die Eskalation etwas länger durchzuhalten, weil der Verlierer sonst für seinen Verlust gar keinen Ersatz bekäme. Die Debatte verlagert sich von Geld- zu Grundsatzfragen. Am Ende geht es nur noch um Prestige: Wer zeigt Schwäche und muss nachgeben?

In diesem verfahrenen Dilemma kann ein geschickter Vermittler helfen. Eine bewährte Strategie ist, die Debatte auf eine neue, unverbrauchte Grundsatzfrage zu lenken. Hierüber können sich beide Parteien leicht einigen, und beide können den Streik ohne Gesichtsverlust beilegen.

Bedeutung im Alltag: Verhaltensökonomie

J207 Erläuterung

Rüstungsspirale während des kalten Krieges und ähnlicher Konflikte, etwa Nahost-Konflikt, allgemein „Erbfeindschaft" zwischen Nachbarn. Auch das deutsch-französische Verhältnis bis zum zweiten Weltkrieg wurde so beschrieben, das Ende markierte 1963 der Élysée–Vertrag.

Vietnamkrieg: Die Reden des US-Präsidenten Lyndon B. Johnson von 1964-68 verschieben sich ebenso von positiven Zielen wie „Demokratie, Freiheit, Gerechtigkeit" hin zu „Kommunismus bekämpfen" (Feindbild) bis schließlich „Ehre und Stärke des Vaterlandes beweisen" (Selbstbild).

Schlägerei: Keiner will weitere Schläge kassieren, aber jeder will dem Gegner noch einen letzten verpassen; der reagiert umgekehrt genauso.

Rosenkrieg: Verbitterte Partner machen einander das Leben zur Hölle; verfilmt als *The War of the Roses* (1989) und *Mr. & Mrs. Smith* (2005).

Tulpenwahn: Aufgrund von Knappheit und Spekulation wurden 1637 die teuersten Tulpensorten für $10\,000$ Gulden pro Zwiebel verkauft. Das war damals der Preis für teuerste Häuser an einer Amsterdamer Gracht.

Kunstmarkt: Mitunter entbrennen Bietergefechte bei Kunstauktionen. Ist das rational? Vielleicht, doch höchstens bis die Kunstblase platzt.

Bedeutung im Alltag: Verhaltensökonomie

J208 Erläuterung

Concorde-Falle: Die britisch-französische *Concorde* war das erste Überschallflugzeug für Passagiere im Linienflugdienst, betrieben von 1976 bis 2003. Früh war abzusehen, dass das Unternehmen niemals Gewinn machen würde, dennoch wurde das hochpolitische Projekt aus Gründen des nationalen Prestiges fortgesetzt. Slogan: „Too late to stop." Die gegenteilige Warnung: „Don't throw good money after bad [money]!"

Großprojekte: Bei Großprojekten wie dem Bahnhof Stuttgart 21 wird oft argumentiert, bisherige Ausgaben verbieten Aufgabe oder Alternativen. Üblicherweise explodieren die Kosten und die Rentabilität schwindet, doch bisherige Investitionen müssen mit weiteren „gerettet" werden. Am Ende geht es nur noch um Prestige, durchhalten und Stärke zeigen.

Reformen: Auch Bildungsreformen (G8, Bachelor-Master) werden als unumkehrbar dargestellt. Die Mechanismen ähneln der Concorde-Falle: Selbst wenn das Scheitern absehbar ist und schließlich manifest wird, das Projekt wird aus Gründen des politischen Prestiges durchgezogen. Nicht die Einsicht, nur ein Generationenwechsel erlaubt die Umkehr.

Diese Themen sind zugegeben kontrovers, die Mechanismen bleiben.

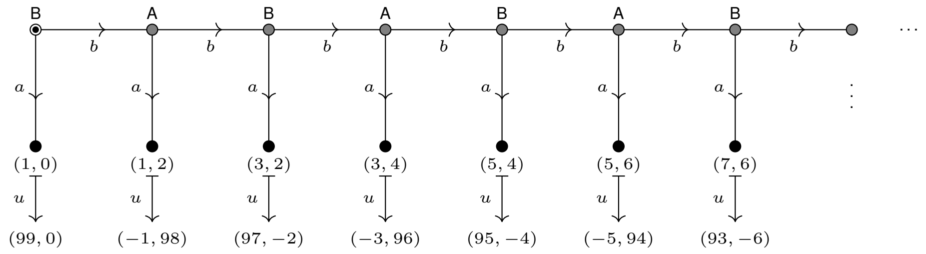
Analyse: Versteigerung eines Euro

Was sagt die Spieltheorie dazu? Nach den empirisch-psychologischen Erläuterungen wollen wir diese Auktion als Spiel genauer untersuchen.

Aufgabe: (1a) Formalisieren Sie diese Auktion als extensives Spiel! Vereinfachungen: Es gibt nur zwei Bieter. Das Startgebot ist $(1,0)$ Cent. Überboten wird abwechselnd, jeweils minimal um genau einen Cent. (1b) Finden Sie zwei teilspielperfekte Gleichgewichte! (1c) Sind das alle?

(2) Variante: Die Auktion endet bei $(1000, 1000)$ mit Halbierung. Das garantiert Endlichkeit und wahrt halbwegs die guten Sitten.

Lösung: (1a) Die Auktionsregeln definieren folgenden Spielbaum:



Analyse: Versteigerung eines Euro

🙂 Das erinnert an das Hundertfüßler-Spiel, siehe Seite E307. Glücklicherweise verfügen wir über eine effiziente Formalisierung.

Die Spielermenge ist hier vereinfacht $I = \{1 = \text{Alice}, 2 = \text{Bob}\}$. Wir formalisieren den Spielbaum durch $X = \{ b^n, b^n a, b^\infty \mid n \in \mathbb{N} \}$.

Wurzel ist das Wort $b^0 = \emptyset$, und $b^\infty = bbb\dots$ ist die konstante Folge. Aktive Zustände $X^\circ = \{ b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$, terminal $\partial X = \{ b^n a, b^\infty \mid n \in \mathbb{N} \}$.

Die Auszahlung ist $u(b^\infty) = (-\infty, -\infty)$ sowie

$$u(b^n a) = \begin{cases} (99-n, -n) & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ (-n, 99-n) & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die Aktionsmenge für Spieler $i \in I$ im aktiven Zustand $x = b^n$ ist

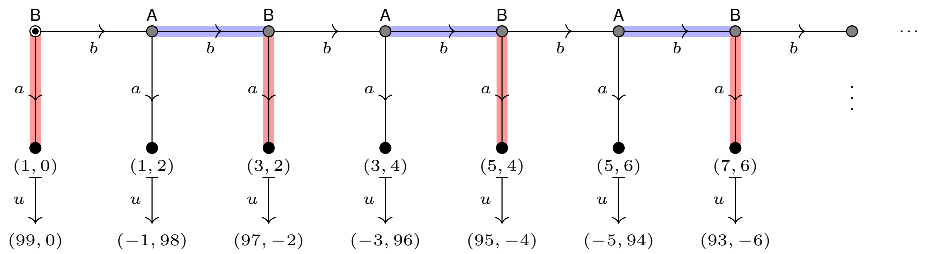
$$A_x^i = \begin{cases} \{a = \text{aussteigen}, b = \text{überbieten}\} & \text{falls } i \equiv n \bmod 2, \\ \{\text{warten}\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Fortsetzung $f : \bigcup_{x \in X^\circ} \{x\} \times A_x \to X$ ist kanonisch $f(x,w) = x * w$. Damit ist das dynamische Spiel $\Gamma = (X, u, f)$ vollständig beschrieben.

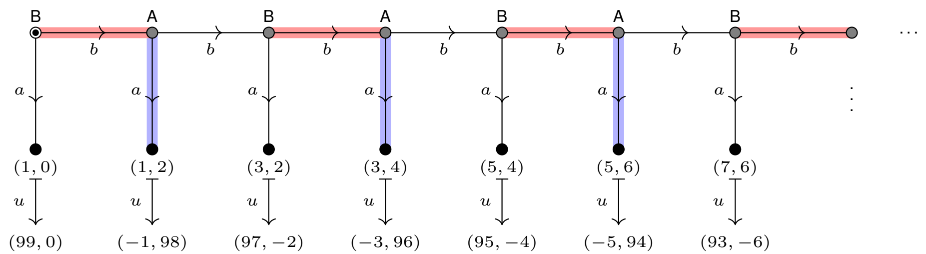
Analyse: Versteigerung eines Euro

(1b) Wir vermuten leicht zwei teilspielperfekte Gleichgewichte.

Erste Lösung: Alice überbietet immer, Bob gibt immer nach.



Zweite Lösung: Bob überbietet immer, Alice gibt immer nach.



Analyse: Versteigerung eines Euro

(1b) Sind dies tatsächlich teilspielperfekte Gleichgewichte? Ja!

Beweis: Wir prüfen zunächst den ersten Vorschlag, dieselbe Analyse gelingt anschließend für den zweiten Vorschlag mit vertauschten Rollen.

Zunächst kann Alice sich nicht verbessern, nur strikt verschlechtern. Aber auch Bob kann sich nicht verbessern, nur strikt verschlechtern.

⚠ Hierzu muss man alle Alternativen auflisten und vergleichen: Versuchen Sie es als Übung in Geduld und Sorgfalt!

☹ Das Prinzip der einmaligen Abweichung F1D ist hier zunächst nicht direkt anwendbar, da mit $-\infty$ nicht alle Auszahlungen in $\mathbb{R}$ liegen.

🙂 Für Auszahlungen in $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = [-\infty, +\infty] \cong [-1, 1]$ kompaktifizieren wir die Zahlengerade $\mathbb{R}$, die Auszahlungen sind stetig, und das Prinzip der einmaligen Abweichung ist formal wieder in Kraft.

🙂 Das Prinzip der einmaligen Abweichung vereinfacht die Analyse wie immer enorm! Damit wird die Diskussion aller Fälle ein Kinderspiel.

⚠ Bei fehlender Absprache ist nicht festgelegt und keineswegs klar, welche der beiden Gleichgewichtsstrategien gespielt wird / werden soll.

Analyse: Versteigerung eines Euro

(1c) Haben wir mit diesen beiden alle Gleichgewichte gefunden? Ja!

Beweis: Ewiges Überbieten $b^\infty = bbb\dots$ ist sicher kein Gleichgewicht: Jeder Spieler kann sich, sobald er zieht, durch Aussteigen verbessern! In jedem Gleichgewicht muss mindestens ein Spieler einmal aussteigen.

- Angenommen, Bob steigt beim Gebot $(z+1, z)$ aus. Per Rückwärtsinduktion finden wir dann *davor* die erste Lösung, und zwar eindeutig: Alice überbietet immer, Bob gibt immer nach.
- Angenommen, Alice steigt beim Gebot $(z, z+1)$ aus. Per Rückwärtsinduktion finden wir dann *davor* die zweite Lösung, und zwar eindeutig: Bob überbietet immer, Alice gibt immer nach.

Jetzt kommt der Clou: Dieses Argument gilt genauso für *jedes* Teilspiel! Daher ist jedes teilspielperfekte Gleichgewicht entweder die erste oder die zweite Lösung, weitere Gleichgewichte gibt es nicht!

🙂 Damit kennen wir alle teilspielperfekten Gleichgewichte des Spiels; diese beiden beschreiben / erklären das mögliche rationale Verhalten.

Analyse: Versteigerung eines Euro

🙂 Damit haben wir diese Versteigerung spieltheoretisch formalisiert und analysiert — und verstehen so das mögliche rationale Verhalten. Zunächst sind die Gleichgewichte nicht offensichtlich, doch unsere vage Ahnung können wir nun beweisen, auf Grundlage der Formalisierung.

Interessanterweise gibt es genau zwei Gleichgewichte, das war auf den ersten Blick nicht sofort ersichtlich. Beide Gleichgewichte zeigen strikt entgegengesetzte Rollenverteilungen beim Überbieten bzw. Nachgeben.

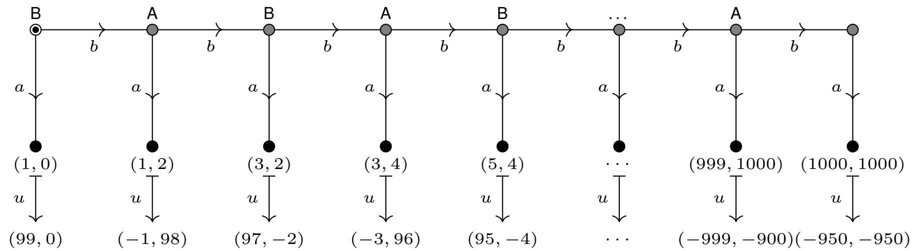
🙂 Das erklärt auch das beobachtete (irrationale) Verhalten der Spieler, zumindest teilweise: Jeder Spieler wählt / wünscht / erhofft egozentrisch das ihm vorteilhafte Gleichgewicht. Leider sind beide Gleichgewichte vollkommen inkompatibel und führen zur beobachteten Bietspirale.

Auch im Rückblick hält jeder Spieler sein eigenes Verhalten für rational, das des Gegenübers jedoch für irrational. Das ist nachvollziehbar vom eigenen voreingenommenen Standpunkt „des“ rationalen Verhaltens, doch leider sieht der Kontrahent das symmetrisch entgegengesetzt.

🙂 Die logische Falle liegt (vor allem) in der mangelnden Eindeutigkeit! Sozio-psychologische Phänomene kommen noch verstärkend hinzu.

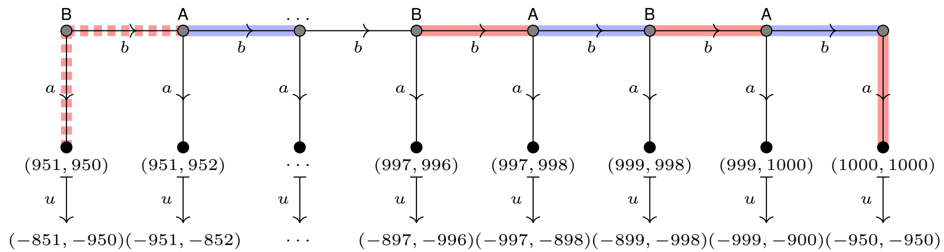
Analyse: Versteigerung eines Euro

(2a) Wir erhalten nun wirklich ein Tausendfüßler-Spiel (vergleiche E307):



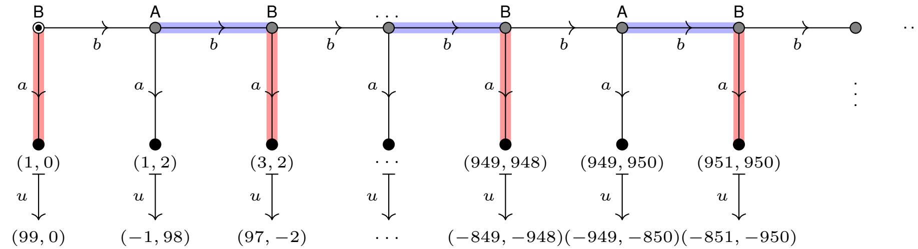
🙂 Mit dem Auktionator ist dies ein Drei-Personen-Nullsummenspiel.

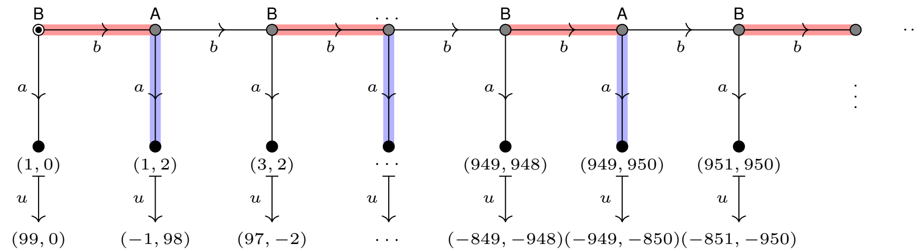
(2b/c) Dieses Spiel ist endlich, wir nutzen Rückwärtsinduktion E2D:



Beispiel: Versteigerung eines Euro

Beim Stand $x = (951, 950 \mid 2)$ ist Bob indifferent zwischen a und b. Bobs Wahl bestimmt eindeutig alle Aktionen *vor* diesem Zustand:





🙂 Auch das endliche Spiel hat zwei entgegengesetzte Gleichgewichte.

Versteigerung von vier Euro (Klausur 2018)

Aufgabe: Wir untersuchen eine eng begrenzte, sehr kurze Auktion:

Versteigert werden 4 Euro. Alice und Bob bieten abwechselnd in Euro: Alice beginnt mit dem Startgebot $(1,0)$, Bob kann auf $(1,2)$ erhöhen, Alice auf $(3,2)$ usw. bis $(7,8)$ und zuletzt schließlich $(8,8)$ Gleichstand. Wird nicht weiter erhöht, zahlen *beide* ihr zuletzt abgegebenes Gebot. Das Objekt der Auktion, die 4 Euro, gehen an den Höchstbietenden. Beim Gleichstand $(8,8)$ wird geteilt, und beide bekommen 2 Euro.

(1) Zeichnen Sie den Spielbaum Γ mit allen relevanten Informationen.

(2) Nennen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte $s \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$.

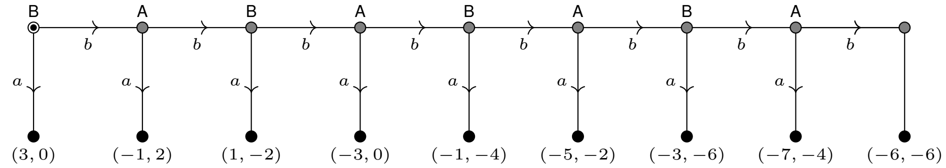
(3) Welche Auszahlungen sind teilspielperfekt erreichbar?

(4) Untersuchen Sie zusätzlich auch gemischte Strategien.

🙂 Das ist eng angelehnt an unsere vorherige Untersuchung. Der Spielbaum ist nochmal wesentlich kleiner und übersichtlicher. Dieses Beispiel dient uns hier als einfache und schöne Illustration.

Versteigerung von vier Euro (Klausur 2018)

Lösung: (1) Die Aufgabenstellung kodiert folgenden Spielbaum:

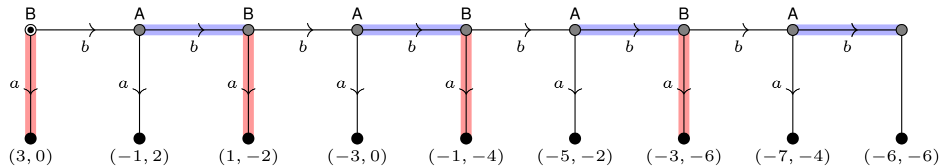


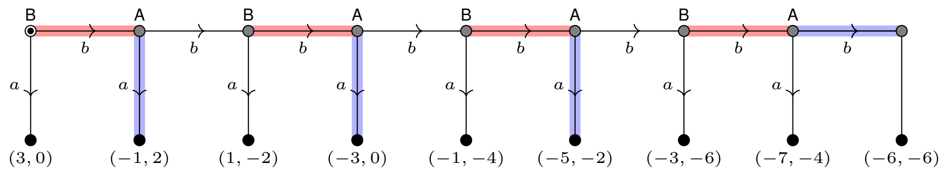
Formal ist dies der Baum $X = \{\emptyset, a, b, ba, b^2, b^2a, \dots b^7a, b^8\}$. Auf den terminalen Zuständen $\partial X = \{a, ba, b^2a, \dots, b^7a, b^8\}$ gelten die angegebenen Auszahlungen gemäß Aufgabenstellung. In den aktiven Zuständen $X^\circ = \{\emptyset, b, b^2, \dots, b^7\}$ sind abwechselnd Bob und Alice am Zug, jeweils mit Aktionsmenge $A_x^i = \{a, b\}$.

🙂 Diese Fragestellung übt die Übersetzung vom Text zum Baum und dann zu den Gleichgewichten. Das ist der kritische Übergang von der verbal-prosaischen Beschreibung zur formal-algebraischen Darstellung. Erst die sorgfältige Formalisierung ermöglicht die Analyse. Sie enthüllt auch eventuelle Lücken oder Widersprüche in der Spielbeschreibung.

Versteigerung von vier Euro (Klausur 2018)

(2) Wir finden genau zwei teilspielperfekte Gleichgewichte:





🙂 Dies ist eine vereinfachte Variante der Versteigerung eines Euro. Wir konstruieren alle Gleichgewichte durch Rückwärtsinduktion E2D:

Im letzten Zug entscheidet Alice immer für b. Im vorletzten Zug ist Bob indifferent zwischen a und b. Jede dieser beiden Wahlen führt dann eindeutig per Rückwärtsinduktion zu dem angegebenen Gleichgewicht.

Versteigerung von vier Euro (Klausur 2018)

(3) Die einzigen Gleichgewichtsauszahlung sind $(3,0)$ und $(-1,2)$.

Es gibt genau zwei Gleichgewichte, tragischerweise sind beide von Anfang an entgegengesetzt. Alice wünscht die Auszahlung $(3,0)$ und Bob die Auszahlung $(-1,2)$. Das erklärt das empirisch beobachtete (irrationale) Verhalten der Spieler, zumindest teilweise: Jeder Spieler wählt / wünscht / erhofft egozentrisch das ihm vorteilhafte Gleichgewicht.

(4) Im letzten Zug muss Alice b spielen, denn dies dominiert a strikt. Im vorletzten Zug kann Bob eine gemischte Strategie $s_t = (1-t)a + tb$ mit $t \in [0,1]$ spielen. Für $t < 2/3$ finden wir das erste Gleichgewicht, für $t > 2/3$ das zweite, wie zuvor per Rückwärtsinduktion.

Bei $t = 2/3$ ist Alice indifferent im vorvorletzten Zug. Auch sie kann dann eine gemischte Strategie spielen, usw. Die Erweiterung zu gemischten Strategien beschert uns unendlich viele weitere Gleichgewichte.

Wenn Sie möchten, führen Sie dies als Übung genauer aus!

Zum Kontrast eine Erbschaft (Klausur 2018)

Aufgabe: Alice und Bob erben bis zu 10 Mio Euro. Das Testament bestimmt folgendes Verfahren: Der Notar schlägt Alice die Auszahlung $(1,1)$ vor, in Mio Euro, der Rest geht als Spende an wohltätige Zwecke. Bei Ablehnung schlägt er Bob $(0,3)$ vor. Bei Ablehnung schlägt er Alice $(2,2)$ vor. Bei Ablehnung schlägt er Bob $(1,4)$ vor, usw. Zustimmung entscheidet jeweils endgültig. Bei Ablehnung wird dem Ablehnenden eine Mio subtrahiert und dem anderen zwei Mio addiert. Das geht so weiter bis zum letzten Vorschlag $(5,5)$, der ungefragt entschieden wird.

(1) Zeichnen Sie den Spielbaum Γ mit allen relevanten Informationen.

(2) Nennen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte $s \in \mathrm{SPE}(\Gamma)$.

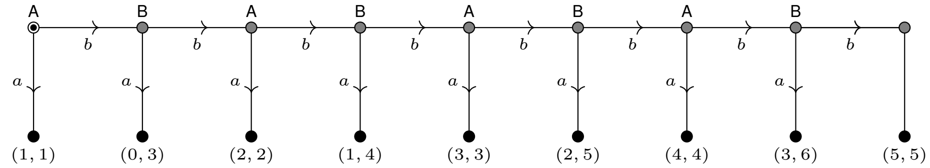
(3) Welche Auszahlungen sind teilspielperfekt erreichbar?

(4) Untersuchen Sie zusätzlich auch gemischte Strategien.

☺ Das ähnelt auf den ersten Blick der vorigen Auktion, doch die genauere Analyse zeigt ein anderes, überraschendes Verhalten.

Zum Kontrast eine Erbschaft (Klausur 2018)

Lösung: (1) Die Aufgabenstellung kodiert folgenden Spielbaum:

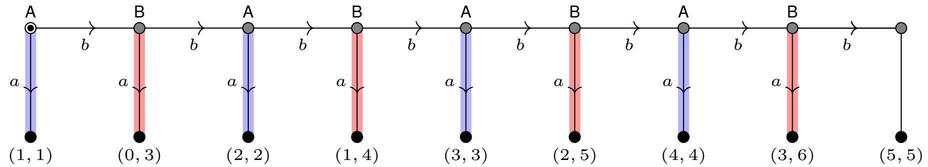


Formal ist dies der Baum $X = \{\emptyset, a, b, ba, b^2, b^2a, \dots b^7a, b^8\}$.
Auf den terminalen Zuständen $\partial X = \{a, ba, b^2a, \dots, b^7a, b^8\}$ gelten die angegebenen Auszahlungen gemäß Aufgabenstellung.
In den aktiven Zuständen $X^\circ = \{\emptyset, b, b^2, \dots, b^7\}$ sind abwechselnd Alice und Bob am Zug, jeweils mit Aktionsmenge $A_x^i = \{a, b\}$.

☺ Diese Fragestellung übt die Übersetzung vom Text zum Baum und dann zu den Gleichgewichten. Das ist der kritische Übergang von der verbal-prosaischen Beschreibung zur formal-algebraischen Darstellung. Erst die sorgfältige Formalisierung ermöglicht die Analyse. Sie enthüllt auch eventuelle Lücken oder Widersprüche in der Spielbeschreibung.

Zum Kontrast eine Erbschaft (Klausur 2018)

(2) Wir finden genau ein teilspielperfektes Gleichgewicht:



☺ Wir konstruieren alle Gleichgewichte durch Rückwärtsinduktion E2D:

- Im letzten Zug muss Bob akzeptieren (a).
- Im vorletzten Zug muss demnach Alice akzeptieren (a).
- Im vorvorletzten Zug muss demnach Bob akzeptieren (a), usw.

Egal wer am Zug ist, jeder stimmt dem aktuellen Angebot zu.

☺ Diese Konstruktion ist leicht. Der Satz von Zermelo E2D garantiert: Dies ist ein teilspielperfektes Gleichgewicht, und zudem das einzige.

Zum Kontrast eine Erbschaft (Klausur 2018)

(3) Die einzige Gleichgewichtsauszahlung ist demnach $(1,1)$:
Jeder bekommt nur eine Million, acht Millionen werden gespendet.

(4) Wenn wir gemischte Strategien zulassen, erhalten wir dasselbe Ergebnis: Die oben genannten Aktionen sind jeweils strikt dominant.

☺ Sie kennen analoge Fälle aus zahlreichen Beispielen und Übungen, vom Gefangenendilemma über diverse ähnliche soziale Dilemmata bis hin zu dynamischen Spielen wie diesem oder weiteren Varianten des Hundertfüßlerspiels. Wenn man es recht bedenkt, ist das Ergebnis doch immer etwas überraschend, beim ersten Kontakt wirkt es sogar paradox:

Mit Kooperation könnten beide Spieler wesentlich besser abschneiden. Doch hier ist Zusammenarbeit kein Gleichgewicht, auch können sie keine bindenden Absprachen treffen. Daher greift allein die individuelle Gewinnmaximierung, und Rückwärtsinduktion ergibt das obige Gleichgewicht als einzige Lösung.