La théorie des jeux et l'hypothèse de rationalité

Michael Eisermann
www-fourier.ujf-grenoble.fr/˜eiserm
UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER
SCIENCES. TECHNOLOGIE. SANTÉ

8 novembre 2007

Séminaire Mathématiques et Applications

Dans la série « comment écrire une thèse en maths puis décrocher le prix Nobel d'économie »

Plan de l'exposé (à moduler)

À quoi sert la théorie ?

La théorie des jeux analyse des situations de conflit et de coopération.

Schéma général — cercle d'interaction entre pratique et théorie :

Observation exemples (théoriques), expériences (empiriques)	abstraction →	**Modélisation** propriétés évidentes, formulation d'axiomes
↑ pratique — généralisation ? réfutation ?		↓ théorie
Retroaction application des résultats, vérification du modèle	← interprétation	**Analyse** propriétés moins évidentes, déduction de théorèmes

Comme toute théorie sociale, elle admet deux interprétations :

- descriptive — **décrit et explique** le comportement observé.
- normative — **prescrit et optimise** le comportement à adopter.

Quelques protagonistes : 1ère génération

☞ Jusqu'aux années 1930, l'économie manque de langage et de méthode scientifique pour exprimer et résoudre ses problèmes.

☞ Dans un souci axiomatique, John von Neumann et Oskar Morgenstern proposent la théorie des jeux dans leur œuvre fondateur :

The Theory of Games and Economic Behavior (1944).

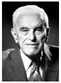
John von Neumann (Budapest 1903–Washington 1957)
Mathématicien américain d'origine hongroise, professeur à Berlin et à Hambourg (1926-1930) puis à Princeton (1930-1957). Il a apporté d'importantes contributions en mécanique quantique, analyse fonctionnelle, en théorie des ensembles, en informatique, en sciences économiques ainsi que dans beaucoup d'autres domaines des mathématiques et de la physique.

Oskar Morgenstern (Görlitz 1902 – Princeton 1977)
Mathématicien et économiste américain d'origine allemande, professeur à Vienne (1929-1938) puis à Princeton (1939-1970) et à l'université de New York (1970-1977). Il a travaillé sur l'application des mathématiques à l'économie et il est, avec John von Neumann, le fondateur de la théorie des jeux.

Quelques protagonistes : 2nde génération

John Forbes Nash (Bluefield/WV 1928 –)
Mathématicien américain, chercheur émérite à Princeton. Prix Nobel d'économie en 1994 pour ses travaux en théorie des jeux. Ses principales contributions sont apparues dans 4 brefs articles au début des années 1950, notamment la notion d'équilibre pour des jeux à n personnes (sa thèse en 1950).

Reinhard Selten (Breslau 1930 –)
Économiste allemand, professeur émérite à l'Université de Bonn. Prix Nobel d'économie en 1994 pour ses travaux sur la rationalité limitée et l'économie expérimentale.



John C. Harsanyi (Budapest 1920 – Berkeley/CA 2000)
Économiste hongrois, naturalisé américain. Prix Nobel d'économie en 1994 pour ses contributions à la théorie des jeux à information incomplète.

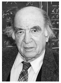
Quelques prix Nobel d'économie récents

2005 : pour l'analyse de conflit et de coopération en théorie des jeux

Robert J. Aumann
(Frankfurt 1930 –)

Thomas C. Schelling
(Oakland/CA 1950 –)

2007 : pour la théorie du *design des mécanismes*



Leonid Hurwicz
(Moscou 1917 –)

Eric S. Maskin
(New York/NY 1950 –)

Roger B. Myerson
(Boston/MA 1951 –)

Aspects formels d'un jeu

Nombre de joueurs :

1. un joueur : optimisation, théorie de contrôle.
2. deux joueurs : le cas classique et le mieux compris.
3. plusieurs joueurs : plus riche/compliqué à cause des coalitions.

Structure temporelle :

- tours alternés : échecs, go
- tours simultanés : pierre-papier-ciseaux, jeux en réseau.

Facteurs aléatoires :

- déterministe : échecs, go
- probabiliste : jeux de cartes, la bourse, déclaration des revenus

Accès aux informations :

- information complète : échecs, go, jeux à cartes ouvertes
- information partielle : poker, examen, recrutement, enchère

Jeux à un seul joueur

Commençons par le cas (très particulier) d'un seul joueur.

- On note S l'ensemble des stratégies à sa disposition.
- ☞ Ce sont les « actions » ou les « coups » qu'il peut jouer.
- On note $g\colon S \to \mathbb{R}$ le gain, aussi appelée *fonction d'utilité*.
- ☞ Vous pouvez penser à l'argent, ou à tout autre bien désirable.
  Il s'agit d'une *appréciation individuelle* qui dépend du joueur.
- Le joueur essaie de choisir s de sorte que $g(s)$ soit maximal.
- ☞ Selon la complexité ceci peut être un défi intellectuel :
  il est souvent difficile de choisir une stratégie optimale.

Exemple (faire un bon exposé)

S est l'ensemble des exposés d'une heure sur la théorie des jeux,
$g\colon S \to \mathbb{R}$ mesure l'enthousiasme (supposé) des auditeurs.
Je cherche $s \in S$ tel que $g(s)$ soit maximal, mais c'est difficile . . .

Plus généralement : maximisation des bénéfices et minimisation des coûts dans toute sorte d'activité humaine (économique, militaire, . . .)

Jeux à deux joueurs

Regardons ensuite un jeu à deux joueurs, nommés A et B.
C'est le cas classique sur lequel nous allons nous concentrer.

- On note S_A et S_B les ensembles des stratégies disponibles, et $g_A, g_B : S_A \times S_B \to \mathbb{R}$ les fonctions d'utilité respectives.
- ☞ Il s'agit de deux fonctions a priori sans aucun rapport.
- A essaie de maximiser $g_A(s_A, s_B)$ en choisissant $s_A \in S_A$ et B essaie de maximiser $g_B(s_A, s_B)$ en choisissant $s_B \in S_B$.
- ☞ Chaque joueur choisit sa propre stratégie mais ne contrôle pas celle de son adversaire. (Souvent celle-ci est encore inconnue.)

L'interaction résulte du couplage mutuel

En général $g_A(s_A, s_B)$ dépend de s_A et **aussi de** s_B.
De même, $g_B(s_A, s_B)$ dépend de s_B et **aussi de** s_A.

☞ Sans couplage on revient à deux jeux séparés à un joueur.

Exemples classiques (1/3)

Pierre-papier-ciseaux

Un jeu d'enfants classique :

A \ B	pierre	papier	ciseaux
pierre	0 \ 0	-1 \ +1	+1 \ -1
papier	+1 \ -1	0 \ 0	-1 \ +1
ciseaux	-1 \ +1	+1 \ -1	0 \ 0

C'est un jeu compétitif.

Ce jeu est *à somme zéro* et donc *strictement compétitif* : le gain de A augmente si et seulement si le gain de B diminue, et réciproquement.

Exemples classiques (2/3)

Bach ou Stravinski

Un couple (A et B, rebonjour) veut aller à un concert.
Il y a deux choix ce soir-là : Bach ou Stravinski ?

A \ B	Bach	Stravinski
Bach	1 \ 2	0 \ 0
Stravinski	0 \ 0	2 \ 1

C'est un jeu coopératif.

Ce jeu n'est pas strictement compétitif : pour chacun il vaut mieux d'arriver à un accord, il préfère aller ensemble plutôt qu'aller seul.

Exemples classiques (3/3)

Le dilemme du prisonnier

Deux complices attendent leurs procès dans deux cellules séparées.
Le procureur propose à chacun de dénoncer l'autre.

A \ B	se taire	dénoncer
se taire	-3 \ -3	-20 \ -1
dénoncer	-1 \ -20	-15 \ -15

Ce jeu n'est pas strictement compétitif.

Mais il n'incite pas non plus à la coopération.
C'est justement l'objectif du procureur . . .

Exemple pratique

Rester ou partir ?

Vous vivez un exposé abominable ; après 5 minutes tout le monde veut partir. Le caractère redoutable de l'orateur et la politesse empêchent toute communication entre les participants.

A \ B	rester	partir
rester	-5 \ -5	-5 \ -50
partir	-50 \ -5	10 \ 10

Question

Que se passera-t-il ? Qui osera le premier pas ?

Jeux à plusieurs joueurs

Définition (jeu sous forme stratégique = forme normale)

Un **jeu** est une fonction $g\colon S_1 \times \cdots \times S_m \to \mathbb{R}^m$.

- Ici $J = \{1, \dots, m\}$ est l'ensemble des joueurs.
- S_j est l'ensemble des stratégies disponibles au joueur j.
- Chaque joueur $j \in J$ choisit sa stratégie $s_j \in S_j$ librement.
- Le gain du joueur j est $g_j(s_1, \dots, s_m)$, qu'il essaie d'optimiser. En général g_j représente la *fonction d'utilité* pour le joueur j.
- Évidemment le joueur j ne contrôle que le paramètre s_j et non les stratégies $s_1, \dots, s_{j-1}, s_{j+1}, \dots, s_m$ des autres.

Limitations de ce modèle

Cette définition ne tient pas encore compte des aspects temporels, ni de facteurs aléatoires, ni d'une éventuelle asymétrie d'information.

Équilibre de Nash : qu'est-ce que c'est ?

Informellement, les stratégies $(s_1, \dots, s_m)$ sont en équilibre si aucun joueur ne peut augmenter son gain en changeant sa stratégie.

☞ Étant données les stratégies $(s_1, \dots, s_{j-1}, s_{j+1}, \dots, s_m)$ des autres, la stratégie s_j maximise le gain pour le joueur j.

☞ Les stratégies des autres joueurs sont fixées : le joueur j peut changer sa stratégie s_j mais non les stratégies des autres.

Définition (équilibre de Nash)

Soit $g\colon S_1 \times \cdots \times S_m \to \mathbb{R}^m$ un jeu. Un point $(s_1, \dots, s_m)$ dans $S_1 \times \cdots \times S_m$ est un **équilibre** si pour tout j et tout $x \in S_j$ on a $g_j(s_1, \dots, s_{j-1}, x, s_{j+1}, \dots, s_m) \le g_j(s_1, \dots, s_{j-1}, s_j, s_{j+1}, \dots, s_m)$.

- C'est la notion fondamentale et organisatrice de la théorie, introduite par John Nash en 1950, prix Nobel d'économie 1994.
- Il existe des raffinements pour les jeux avec structure supplémentaire (temporelle, aléatoire, informationnelle, etc).

Équilibre de Nash : à quoi ça sert ?

Paradigme : la notion d'équilibre est la clé pour comprendre un jeu.

Reformulation pour deux joueurs

Une paire de stratégies $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ est un équilibre ssi

$$g_1(s_1, s_2) = \max g_1(\bullet, s_2) \quad \text{et} \quad g_2(s_1, s_2) = \max g_2(s_1, \bullet).$$

- s_1 est une meilleure réponse à s_2 (par rapport à g_1), s_2 est une meilleure réponse à s_1 (par rapport à g_2).

☞ Supposons que joueur 1 insiste sur sa stratégie s_1 alors que joueur 2 insiste sur sa stratégie s_2. Dans ce cas la situation est figée : aucun joueur n'est incité à changer d'avis.

- Cette notion précise ce qui est un « équilibre de forces », ou une « situation stable », ou encore un « point fixe ».

☞ Un équilibre est un résultat plausible quand les acteurs ne peuvent pas communiquer ou ne veulent pas coopérer.

- Ceci ne veut pas dire qu'un équilibre soit désirable : il se peut qu'un équilibre soit le pire des cas !

Exemple (1/3) : un seul équilibre

Le dilemme du prisonnier

Ce jeu admet un unique point d'équilibre : (dénoncer,dénoncer).

A ╲ B	se taire	dénoncer
se taire	-3 ╲ -3	-20 ╲ -1
dénoncer	-1 ╲ -20	-15 ╲ -15

☞ Quelque soit la stratégie de l'autre, il vaut mieux dénoncer.
C'est précisément l'objectif visé par le procureur.

☞ Pour les prisonniers cet équilibre est peu désirable,
mais ils ne peuvent pas changer les règles du jeu.

☞ En particulier ils ne peuvent pas communiquer.
Seule le procureur contrôle la communication.

Exemple (2/3) : deux équilibres

Bach ou Stravinski

Ce jeu admet deux équilibres : (Bach,Bach) ou (Stravinski,Stravinski).

A ╲ B	Bach	Stravinski
Bach	1 ╲ 2	0 ╲ 0
Stravinski	0 ╲ 0	2 ╲ 1

☞ Plaçons-nous sur un des deux équilibres, disons (Bach,Bach) :
alors aucun joueur ne veut changer sa stratégie à lui tout seul.

☞ Ils pourraient changer simultanément s'ils concluaient un accord (en dehors du jeu) mais très probablement B ne serait pas d'accord.

☞ Pour se concerter il faut communiquer.
Sans communication on ne quittera pas l'équilibre.

Exemple (3/3) : aucun équilibre

Pierre-papier-ciseaux

Ce jeu n'admet aucun équilibre.

A ╲ B	pierre	papier	ciseaux
pierre	0 ╲ 0	-1 ╲ +1	+1 ╲ -1
papier	+1 ╲ -1	0 ╲ 0	-1 ╲ +1
ciseaux	-1 ╲ +1	+1 ╲ -1	0 ╲ 0

☞ Quelque soit la paire (s_1, s_2), au moins un des deux joueurs peut augmenter son gain en changeant sa stratégie.

☞ Exercice : que se passe-t-il si l'on ajoute « puits » comme quatrième possibilité ? Existe-t-il un équilibre dans ce cas ?

Complément : stratégies continues

Version continue de « rester ou partir »

$$S_A = S_B = [-1, 2] \subset \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad g_A(x, y) = g_B(x, y) = xy$$

Ce jeu admet trois équilibres : $(-1, -1)$ et $(0, 0)$ puis $(2, 2)$.
À noter que seul $g(2, 2) = (4, 4)$ réalise le maximum global.

Version continue du dilemme du prisonnier

$$S_A = S_B = [0, 1] \subset \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} g_A(x, y) = 10 + 10x - 20y \\ g_B(x, y) = 10 - 20x + 10y \end{cases}$$

Seul le point $(1, 1)$ est un équilibre.
À noter que $g(1, 1) = (0, 0)$ est inférieur à $g(0, 0) = (10, 10)$.

Stratégies mixtes : qu'est-ce que c'est ?

Regardons un jeu discret où S_j est un ensemble fini.
Pour emphase on appelle $s \in S_j$ une **stratégie pure**.
☞ Le joueur j pourra aussi appliquer une stratégie probabiliste :

Définition

Une **stratégie mixte** est une distribution de probabilité sur l'ensemble S_j des stratégies pures. On note $\bar{S}_j$ l'ensemble des stratégies mixtes.

Puisque $S_j = \{s^0, \dots, s^n\}$ est supposé fini, ceci revient à considérer les combinaisons convexes $\bar{s} = \sum_i p_i s^i$ avec $p_i \geq 0$ et $\sum_i p_i = 1$.

Définition

Tout jeu discret $g\colon S_1 \times \cdots \times S_m \to \mathbb{R}^m$ s'étend en $\bar{g}\colon \bar{S}_1 \times \cdots \times \bar{S}_m \to \mathbb{R}^m$ par interpolation linéaire : $\bar{g}(\dots, \sum_i p_i s^i, \dots) := \sum_i p_i g(\dots, s^i, \dots)$.

Interprétation probabiliste

Le joueur j choisit la stratégie $s^i \in S_j$ avec probabilité $p_i \in [0,1]$.
Alors $\bar{g}(\bar{s})$ est l'espérance du gain, moyenné sur la stratégie mixte $\bar{s}$.

Stratégies mixtes : à quoi ça sert ?

- On a l'inclusion naturelle $S \subset \bar{S}$ définie par $s \mapsto 1s$.
  ☞ Les stratégies pures restent disponibles.
- Tout joueur peut randomiser sa stratégie s'il le souhaite.
  ☞ C'est très naturel — et serait difficile à interdire.
- Chacun est content d'élargir ses stratégies.
  ☞ A priori, c'est mieux d'avoir plus de choix.

Le joueur j est-il vraiment content ? Les autres aussi élargissent leurs ensembles de stratégies. N'est-ce pas un inconvénient pour j ?

Observation

Si $(s_1, \dots, s_m)$ est un équilibre du jeu initial $g\colon S_1 \times \cdots \times S_m \to \mathbb{R}^m$ alors c'est encore un équilibre du jeu étendu $\bar{g}\colon \bar{S}_1 \times \cdots \times \bar{S}_m \to \mathbb{R}^m$.

L'extension ne déstabilise pas les équilibres déjà existants.

Démonstration.

Pour tout $s_j^i \in S_j$ on a $g_j(\dots, s_j^i, \dots) \leq g_j(\dots, s_j, \dots)$ donc
$\bar{g}_j(\dots, \sum_i p_i s_j^i, \dots) = \sum_i p_i g_j(\dots, s_j^i, \dots) \leq g_j(\dots, s_j, \dots)$. □

Le théorème de Nash

Paradigme : la notion d'équilibre est la clé pour comprendre un jeu.
Problème : certains jeux n'admettent aucun point d'équilibre.

Exemple

- ✘ Le jeu « pierre-papier-ciseaux » n'admet aucun équilibre dans les stratégies pures. C'est un défaut grave.
- ✓ Il admet un (unique) équilibre dans les stratégies mixtes : $(\bar{s}_A, \bar{s}_B)$ avec $\bar{s}_A = \bar{s}_B = \frac{1}{3}$pierre $+ \frac{1}{3}$papier $+ \frac{1}{3}$ciseaux.

Cet exemple simpliste illustre un résultat fondamental :

Théorème (existence d'équilibre, Nash 1950)

Soit $g\colon S_1 \times \cdots \times S_m \to \mathbb{R}^m$ un jeu discret avec $S_1, \dots, S_m$ finis, et soit $\bar{g}\colon \bar{S}_1 \times \cdots \times \bar{S}_m \to \mathbb{R}^m$ son extension aux stratégies mixtes.
Alors le jeu ainsi étendu $\bar{g}$ admet (au moins) un point d'équilibre.

☞ Ce résultat simple et génial frappe par sa généralité.
Cette découverte a valu Nash le prix Nobel d'économie en 1994.

Le théorème de Brouwer

Proposition

Tout convexe compact $X \subset \mathbb{R}^n$ à intérieur non vide est homéomorphe à la boule fermée $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$. □

Pour $S = \{s^0, \dots, s^n\}$ l'ensemble $\bar{S}$ satisfait aux hypothèses, donc $\bar{S} \cong D^n$.
De même pour le produit $\bar{S}_1 \times \cdots \times \bar{S}_m \cong D^{n_1 + \cdots + n_m}$.

Théorème (de point fixe, Brouwer 1909)

Toute application continue $f\colon D^n \to D^n$ admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in D^n$ tel que $f(x) = x$. □

Idée de la démonstration :

- En dimension $n = 1$ on a $D^1 = [-1, +1]$ et le théorème des valeurs intermédiaires suffit. (Exercice, niveau L1-L2)
- Cas général : lemme de Sperner (triangulations, niveau L2-L3) ou un argument de volume (analyse & intégration, niveau L3-M1) ou par la topologie algébrique (homologie, niveau M1-M2)

☞ Faux si X est non convexe : $X = D^n \setminus \{0\}$, $f(x) = -x$.

☞ Faux si X est non compact : $X = \mathbb{R}^n$, $f(x) = x + v$.

Un peu de folklore (autour du théorème de Brouwer)

La Widipédia nous relate la belle légende suivante :

Le mathématicien Luitzen Egbertus Jan Brouwer remarquait, en mélangeant son café au lait, que le point au milieu du tourbillon restait immobile. Voici comment il examina le problème : « À tout moment, il y a un point de la surface qui n'aura pas changé de place. Je peux formuler ce magnifique résultat autrement : je prends une feuille horizontale, une autre feuille identique que je froisse et que je replace en l'aplatissant sur l'autre. Un point de la feuille froissée est à la même place que sur l'autre feuille. »

À noter que le théorème de Brouwer est très différent du théorème de point fixe de Banach. Ce dernier s'applique à tout espace métrique complet mais exige que f soit contractante. En revanche il assure un *unique* point fixe et fournit une méthode de calcul : il est constructif (et d'ailleurs assez efficace).

Dans le théorème de Brouwer la boule fermée D^n est essentielle. Par contre on n'impose aucune condition sur f à part sa continuité. La preuve est non constructive et nécessite des techniques profondes et/ou astucieuses. . . D'ailleurs, les théorèmes de point fixe font un excellent sujet de stage.

Preuve du théorème de Nash

Théorème (existence d'équilibre, Nash 1950)

Le jeu étendu $\bar{g} \colon \bar{S}_1 \times \cdots \times \bar{S}_m \to \mathbb{R}^m$ admet un point d'équilibre.

Démonstration.

1. On fixe $\bar{s} = (\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_m) \in \bar{S}_1 \times \cdots \times \bar{S}_m$ puis on définit $\bar{g}_j^* \colon \bar{S}_j \to \mathbb{R}$ par $\bar{g}_j^*(x) := \bar{g}_j(\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_{j-1}, x, \bar{s}_{j+1}, \ldots, \bar{s}_m)$.
2. On définit $\delta_i \colon \bar{S}_j \to \mathbb{R}_+$ par $\delta_i(\bar{s}_j) := \begin{cases} \bar{g}_j^*(s_j^i) - \bar{g}_j^*(\bar{s}_j) & \text{si positif,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
3. Pour $\bar{s}_j = \sum_i p_i s_j^i$ on définit $\bar{s}_j' := \sum_i p_i' s_j^i$ par $p_i' := \frac{p_i + \delta_i(\bar{s}_j)}{1 + \sum_k \delta_k(\bar{s}_j)}$. On voit que $p_i' \geq 0$ et $\sum_i p_i' = 1$, donc $\bar{s}_j' \in \bar{S}_j$.
4. L'application $f \colon \bar{S}_1 \times \cdots \times \bar{S}_m \to \bar{S}_1 \times \cdots \times \bar{S}_m$ donnée par $f(\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_m) = (\bar{s}_1', \ldots, \bar{s}_m')$ est continue.
5. On a $f(\bar{s}) = \bar{s}$ si et seulement si $\bar{s}$ est un équilibre de Nash : (Preuve de "⇒") Pour $\bar{s}_j = \sum_i p_i s_j^i$ on a $\bar{g}_j^*(\bar{s}_j) = \sum_i p_i \bar{g}_j^*(s_j^i)$. Il existe donc i tel que $\bar{g}_j^*(s_j^i) \leq \bar{g}_j^*(\bar{s}_j)$ et ainsi $\delta_i(\bar{s}_j) = 0$. Puisque $p_i' = p_i$ on voit que $\delta_k(\bar{s}_j) = 0$ pour tout k.

On conclut en faisant appel au théorème de Brouwer. □

Le dilemme du prisonnier . . . réitéré

Relations commerciales

Deux commerçants profitent mutuellement s'ils coopèrent. Ce jeu se répète jour par jour ; seule la triche termine leur relation commerciale.

A \ B	coopérer	tricher
coopérer	1 \ 1	-10 \ 10
tricher	10 \ -10	0 \ 0

Inflation : les gains subissent un décompte $\delta \in]0, 1[$, disons $\delta = 0.95$. (L'argent demain a moins de valeur que la même somme aujourd'hui.)

- ⇒ Le gain d'une coopération à long terme est $\sum_{k=0}^{\infty} \delta^k = \frac{1}{1-\delta} = 20$.
- ⇒ A priori il est plus profitable de coopérer que de trahir.

Que va se passer ? Où intervient l'hypothèse de rationalité ?

L'hypothèse de rationalité . . . pure et simple

Observation

L'hypothèse de rationalité est omniprésente dans la théorie des jeux : sans elle mêmes les problèmes simples restent insolubles.

Explicitons donc cette hypothèse souvent tacite :

0. Chaque acteur maximise son gain (sa fonction d'utilité).
1. Chaque acteur connaît parfaitement les règles et il est capable d'en déduire toutes les conséquences.
2. Chaque acteur sait que tous les autres acteurs satisfont aux hypothèses (0) et (1).
3. Chaque acteur sait que tous les autres acteurs satisfont aux hypothèses (0) à (2). Et ainsi de suite. . .

Limitations de la rationalité

Si l'hypothèse (0) semble acceptable, l'hypothèse (1) est souvent un approximation grossière. C'est un peu plus réaliste pour des groupes, entreprises, nations, . . . qui ont les ressources nécessaires.

Une expérience socio-économique (prêt et remboursement)

☞ Le jeu suivant se joue entre deux personnes A et B. Pour simplifier on suppose qu'ils communiquent de façon anonyme par internet.

Début du jeu. — A reçoit $10€$ de la part du maître du jeu, tandis que B reçoit $0€$. Leurs comptes sont alors initialisés comme suit :

A : $10€$	B : $0€$

Premier tour. — A choisit une somme s qu'il veut envoyer à B, bien sûr dans les limites $0€ \leq s \leq 10€$. La somme s est déduite du compte A, et le maître du jeu ajoute **le triple** de la somme au compte B :

A : $10€ - s$	B : $0€ + 3s$

Second tour. — À son tour B choisit une somme t qu'il veut renvoyer à A, bien sûr dans les limites $0€ \leq t \leq 3s$. La somme t est déduite du compte B et ajoutée au compte A. Ainsi s'achève le jeu :

A : $10€ - s + t$	B : $0€ + 3s - t$

Question théorique : Quelle est le comportement rationnel ?
Question empirique : Quelle est le comportement observé ?

Analyse théorique de notre expérience

Proposition

Dans notre jeu « prêt et remboursement » le seul équilibre et $(0, 0)$.

Démonstration.

Supposons que (s, t) est un point d'équilibre.
Si $t > 0$ alors B gagnerait plus avec $(s, 0)$. Donc $t = 0$.
Si $s > 0$ alors A gagnerait plus avec $(0, 0)$. Donc $s = 0$. □

Interprétation rationnelle

B essaie de maximiser son profit : il est rationnel de niveau 1.
A aussi maximise son profit, et il anticipe en plus que B fera pareil : il est rationnel de niveau 2. C'est le point essentiel du raisonnement.

- Sous l'hypothèse de rationalité, l'analyse est très simple.
  L'interprétation normative prône une unique stratégie rationnelle.
- Dans des expériences on observe un tout autre comportement.
  Plus étonnant encore : le comportement irrationnel rapporte plus !
  Comment expliquer ce paradoxe ?

Économie expérimentale

Approche empirique

L'économie expérimentale mène des expériences socio-économiques de petite échelle dans un environnement contrôlé (laboratoire).
L'objectif est de tester et de calibrer des prévisions théoriques.

Le mardi 06/11/2007 nous avons effectué l'expérience ci-dessus avec le groupe des magistères en L3 :

1. Chaque joueur entre sa stratégie sur ordinateur.
2. On fait jouer les stratégies les unes contre les autres.
3. Les résultats des jeux deux-à-deux sont moyennés.
4. On affiche le classement des stratégies selon leur gain.

La situation est à peu près réaliste :

- plutôt anonyme (bien que pas complètement)
- gains désirables (malheureusement non réels)

Stratégies observées (premier tournoi)

	A	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
#1	5	1	2	4	5	7	9	10	16	18	20
#2	5	2	3	4	6	7	9	10	12	14	15
#3	3	2	1	3	4	6	5	3	2	4	5
#4	2	1	2	3	4	5	6	1	2	0	3
#5	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
#6	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
#7	1	2	1	1	2	4	3	3	3	3	3

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7
#1	12:08	12:08	11:09	10:10	10:10	10:10	09:11
#2	12:08	12:08	11:09	10:10	10:10	10:10	09:11
#3	11:05	11:05	10:06	10:06	10:06	10:06	08:08
#4	10:04	11:03	09:05	10:04	10:04	10:04	09:05
#5	12:08	12:08	11:09	10:10	10:10	10:10	09:11
#6	12:08	12:08	11:09	10:10	10:10	10:10	09:11
#7	10:02	11:01	11:01	10:02	10:02	10:02	11:01

GAIN	A	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
18.71	1	2	1	1	2	4	3	3	3	3	3
18.00	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
18.00	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
17.29	2	1	2	3	4	5	6	1	2	0	3
16.86	3	2	1	3	4	6	5	3	2	4	5
16.71	5	1	2	4	5	7	9	10	16	18	20
16.43	5	2	3	4	6	7	9	10	12	14	15

Stratégies observées (second tournoi)

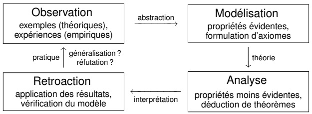
	A	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
#1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
#2	5	2	3	4	6	7	9	10	12	14	15
#3	1	2	3	1	2	2	3	4	1	3	2
#4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
#5	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
#6	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
#7	3	2	1	1	2	4	3	3	3	3	3
#8	2	0	1	0	1	1	3	4	3	3	3

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8
#1	09:05	11:03	11:03	09:05	10:04	10:04	09:05	09:05
#2	06:14	12:08	07:13	06:14	10:10	10:10	09:11	06:14
#3	10:02	11:01	11:01	10:02	10:02	10:02	11:01	09:03
#4	10:02	11:01	11:01	10:02	10:02	10:02	11:01	09:03
#5	06:14	12:08	07:13	06:14	10:10	10:10	09:11	06:14
#6	06:14	12:08	07:13	06:14	10:10	10:10	09:11	06:14
#7	08:08	11:05	08:08	08:08	10:06	10:06	08:08	07:09
#8	09:05	11:03	11:03	09:05	10:04	10:04	09:05	09:05

GAIN	A	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
18.25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
18.12	2	0	1	0	1	1	3	4	3	3	3
17.75	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
17.12	1	2	3	1	2	2	3	4	1	3	2
15.38	3	2	1	1	2	4	3	3	3	3	3
14.25	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
14.25	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12.88	5	2	3	4	6	7	9	10	12	14	15

Cercle d'interaction entre théorie et pratique

On a fait un premier tour complet :



Nous venons de découvrir des phénomènes empiriques qui ne sont pas expliqués par notre premier modèle. Celui-ci doit donc être raffiné : la quête continue . . .

Rappelons les deux interprétations possibles :

- descriptive — **décrit et explique** le comportement observé.
- normative — **prescrit et optimise** le comportement à adopter.

Est-il rationnel d'être irrationnel ?

Un héritage à prendre ou à laisser

Un testament prévoit un million d'euros pour deux héritiers A et B. Le testament exige que l'aîné A propose, devant notaire, un partage $(1000000 - x, x)$ de son choix. Ensuite le cadet B doit se décider :

- S'il accepte, le partage est $(1000000 - x, x)$ comme proposé.
- S'il refuse, l'héritage est perdu et le gain est $(0, 0)$.

Questions

Quelle est la solution sous l'hypothèse de rationalité ?
Est-il avantageux d'être irrationnel ? Y a-t-il un paradoxe ?

Négociation

Les deux alternent infiniment, avec un décompte $\delta \in]0, 1[$ modélisant l'inflation. Que se passera-t-il ?

Cette question a inspiré le deuxième article célèbre de Nash, *The Bargaining Problem* (Econometrica, 1950).

Est-il irrationnel d'être rationnel ?

Développement durable

Un lac est rempli de poissons à sa capacité maximale de 1000t. En dessous de ce seuil, le taux de régénération est de 10% par an.

Chacune des 20 familles riveraines consomme 1t par an. Elle peut pêcher jusqu'à 10t, le surplus étant vendu.

Questions

Que serait une stratégie raisonnable ? individuelle ? collective ?
Quel est le rôle de l'éthique, ou de la législation ?

Adam Smith (1723–1790) : « L'égoïsme d'un individu seul est nuisible, mais la confrontation des égoïsmes mène à l'intérêt général. »

Immanuel Kant (1724–1804) : « Agis selon la maxime qui peut en même temps se transformer en loi universelle. »

Proverbe indien : « La Terre ne vous a pas été donnée par vos parents, Elle vous a été prêtée par vos enfants. »

Et la morale ?

Les critiques d'une application pure et dure de la théorie des jeux à la vie réelle stigmatisent ses aspects néfastes :

La théorie des jeux appliquée à l'économie sert uniquement à maximiser les bénéfices. Elle manque de vision globale, elle ignore l'éthique, elle néglige le bien-être des êtres humains. C'est la théorie de l'égoïsme, qui nuit aux intérêts collectifs, et ainsi finalement aux intérêts de tous les individus.

Bref, il faut défendre la morale contre l'égoïsme.

Ses partisans rétorquent qu'il suffit de modéliser correctement le bien-être par la fonction d'utilité :

Certes, maximiser localement n'est pas forcément optimal, mais on peut difficilement changer le comportement des individus. C'est précisément le rôle de la morale : elle n'est pas un facteur extérieur et indépendant ; elle aussi s'explique par la théorie des jeux. L'éthique n'est rien d'autre qu'un cadre social pour restreindre les stratégies possibles à celles qui soient socialement acceptées.

Bref, il faut voir les choses comme elles sont.

À débattre. . . revoir à ce propos l'interprétation normative versus descriptive.

Résumé

1. La théorie des jeux est un langage universel pour décrire puis analyser des situations de conflit et de coopération.
2. La notion d'équilibre est la clé pour comprendre un jeu. Le théorème de Nash établit l'existence de points d'équilibre.
3. L'hypothèse de rationalité est primordiale pour la déduction. Sans cette hypothèse on n'arrive pas à raisonner.
4. En général, la réalité est plus complexe que l'on ne pense. La prudence et la modestie s'imposent.

Perspectives

- Raffinement des outils

☞ Le concept d'équilibre s'adapte et se raffine aux jeux avec une structure plus fine : temporelle, aléatoire, informationelle, . . .
Depuis 60 ans ces élaborations font couler beaucoup d'encre.

- Théorie des coalitions

☞ Les jeux à plus de deux joueurs sont *beaucoup* plus compliqués, car les joueurs peuvent former des coalitions.
La théorie reste à ce jour moins satisfaisante.

- Rationalité limitée

☞ Pour des applications réalistes l'hypothèse de rationalité doit être affaiblie. C'est assez délicat et fait l'objet d'intenses recherches.
Pour calibrer la théorie on fait appel à *l'économie empirique*.

- Design des mécanismes

☞ Comment fixer les règles (pour les négociations, les institutions, etc.) afin d'atteindre un objectif donné ?
C'est devenu un outil omniprésent en politique économique.

Références

- Ken Binmore : *Fun and Games*, Heath & Co, 1992.
- Duncan Luce, Howard Raiffa : *Games and decisions*, John Wiley & Sons, 1957 ; Dover reprint 1989.
- John Milnor : *A Nobel prize for John Nash*, Math. Intelligencer 17 (1995), 11-17.
- Sylvia Nasar, *A Beautiful Mind : A Biography of John Forbes Nash, Jr.*, Simon & Schuster, 1998.
- Wikipédia : `fr.wikipedia.org`, voir *Théorie des jeux*, *John von Neumann*, *Oskar Morgenstern*, *John Nash*, *Reinhard Selten*
- Nobel prize, `nobelprize.org`, voir *Nobel prizes* puis *John Nash* et *Reinhard Selten* et d'autres encore. . .

Merci de votre attention !

Design de mécanismes

Parfois le « maître du jeu » peut fixer les règles. Par exemple :

- Le procureur dans le « dilemme du prisonnier »
- Une maison d'enchère fixe sa réglementation (ebay, par exemple)
- L'université fixe le cadre des études (prérequis, examens, ...)
- L'état fixe la législation (pénale, fiscale, ...)

☞ En général le maître du jeu ignore les informations privées des acteurs.
A priori les acteurs ont intérêt à garder leurs informations pour eux-mêmes.

Mettons-nous à la place du maître du jeu.
Nous souhaitons faire un choix rationnel :

- Quels sont les objectifs que nous voulons atteindre ?
- Dans quelles limites pouvons-nous choisir les règles ?
- Ayant fixé les règles, quel sera le comportement des acteurs ?
- Quelles règles mènent à un comportement souhaitable ?

Il s'agit d'un problème d'optimisation. L'objectif peut se résumer comme
$f\colon \{\text{informations privées}\} \times \{\text{règles}\} \to \{\text{comportements}\}$.

Exemple : les enchères

Exemple

Nous voulons vendre un objet aux enchères.

Dans ce but, nous fixons les règles suivantes :

Chaque participant remet une enveloppe fermée annonçant la somme qu'il est prêt à payer. Le plus offrant obtient l'objet. (Dans le cas peu probable d'égalité on tire au sort entre les plus offrants.)

Deux variantes de paiement sont courantes :

1. Le gagnant paie la somme qu'il a annoncée.
2. Le gagnant paie la somme annoncée par le second.

Question

Nous, la maison d'enchère, avons le choix entre les deux mécanismes (et d'autres encore). Comment choisir ? Lequel est le meilleur ?

C'est le début de toute une théorie... et d'un autre exposé ?

Une deuxième expérience (une folle enchère)

Je mets un objet de valeur aux enchères, disons une pièce de 1€.

Ceci n'est plus un jeu théorique : puisque vous êtes maintenant devenus experts en théorie des jeux, on joue avec de vrai argent !

Les enchères se déroulent selon les règles suivantes :

- Chacun entre vous peut faire des enchères
  en annonçant la somme qu'il est prêt à payer.
- Le plus offrant gagne et obtient l'objet.
  Le deuxième et les suivants n'obtiennent rien.
- Attention : le premier **et le deuxième**
  paient la somme qu'ils ont annoncée.

Question

Est-ce un mécanisme raisonnable ? Qu'est-ce qui ne va pas ?

Complément : cinq corsaires joue à la démocratie

Cinq corsaires, nommés A, B, C, D, E, partagent leur butin de 100 pièces d'or selon leur coutume : le capitaine, A, propose un partage et tous les cinq passe au vote.

- Si la majorité accepte, le butin est partagé comme proposé.
- En cas de refus l'émeute s'éclate et A est jeté à la mer.
  Les quatre corsaires restants recommencent alors selon le même procédé, avec B comme capitaine, et ainsi de suite. Un vote à égalité est considéré comme acceptation.

Exercices

1. Analyser ce conflit sous l'hypothèse de parfaite rationalité et sans coalitions. Comment change le résultat si un vote à égalité compte pour un refus ? Quelle règle le capitaine A préfère-t-il ?
2. Discuter les possibles évènements lorsque les corsaires peuvent former des coalitions. En quoi est-ce plus ouvert ?
3. Quel mécanisme proposez-vous pour se mettre d'accord sur le partage ? (si possible plus humain, plus démocratique, etc...)