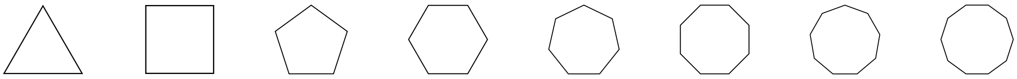


CONSTRUCTION DE POLYGONES RÉGULIERS — LA GÉOMÉTRIE RENCONTRE L'ALGÈBRE

MICHAEL EISERMANN

RÉSUMÉ. Ce document est issu du stage « modélisation, recherche, preuve » mis au point par l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM / Institut Fourier, UJF Grenoble), dans le plan académique de formation des enseignants (PAF).

Ce stage ouvre avec un atelier sur la construction à la règle et au compas, un sujet qui fascine depuis l'antiquité et qui reste très présent dans l'éducation mathématique. Sur le plan pratique, il est intéressant de savoir comment construire certaines configurations concrètement. Sur le plan théorique, il est intéressant de savoir quelles sont les constructions possibles, ou dans le cas contraire lesquelles sont impossibles et pourquoi.

Nous en discutons trois problèmes célèbres, pour lesquels ce document veut servir de support : la construction de polygones réguliers, la duplication du volume d'un cube, la trisection de l'angle. Avec un peu de persévérance ces problèmes sont résolubles par des outils parfaitement élémentaires, mobilisant des connaissances variées de niveau lycée.

PREMIÈRE PARTIE. — PRÉSENTATION DU PROBLÈME

1. QUE POUVONS-NOUS CONSTRUIRE À LA RÈGLE ET AU COMPAS ?

Soient $1, a, b$ trois longueurs tracées dans le plan.

(1) Comment construire la longueur $a+b$? et $a-b$? puis ab ? et a/b ?

(2) Étant donnée une longueur $a > 0$, peut-on construire la longueur $\sqrt{a}$?

Ces questions incitent à explorer plus … Voici trois problèmes qui, durant des siècles, ont inspiré des générations de chercheurs et d'amateurs :

(3) Quels polygones réguliers sont constructibles à la règle et au compas ?

(4) Le nombre $\sqrt[3]{2}$ est-il constructible à la règle et au compas ?

(5) Géométriquement, qu'est-ce que ces constructions au juste ?
Algébriquement, comment les formuler en coordonnées cartésiennes ?
Toute longueur constructible s'obtient-elle par les cinq opérations de (1) et (2) ?

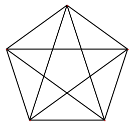
Ces questions suggèrent de réfléchir sur l'interaction entre la géométrie et l'algèbre. Les problèmes semblent assez naturels et on peut espérer les résoudre, au moins partiellement, par des techniques élémentaires, mobilisant des connaissances variées de niveau lycée.

Comme toujours, bien sûr, *élémentaire* ne veut pas forcément dire *facile*. Prenons donc du courage et soyons créatifs !

Date: décembre 2008. `www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm`, mis à jour le 26 novembre 2009.
Université Joseph Fourier • IREM / Institut Fourier • Groupe « modélisation, recherche, preuve ».

2. CONTEXTE HISTORIQUE

La question (3) sur les *n-gones réguliers* est la plus attrayante pour entrer dans le sujet. Les différents cas $n = 3,4,5,6,7,8,9,10\dots$ présentent des difficultés très variées. Mais soyez rassurés : l'efficacité des arguments mis en œuvres et la beauté des résultats à notre portée, même à un niveau élémentaire, récompensent tout investissement !



Histoire. — Le pentagramme fut le symbole de l'école pythagoricienne, qui croyait au caractère absolu des nombres entiers, et qui ne considérait donc que des grandeurs commensurables. Hippase, un disciple de Pythagore, découvrit (à l'aide du pentagramme ?) l'irrationalité de $\sqrt{5}$ et du nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Cette découverte provoquait une crise profonde chez les mathématiciens grecs. D'après une légende Hippase fut jeté à la mer par ses condisciples.

Moins illustre que le pentagone, l'heptagone régulier apparaît moins souvent dans la vie courante. Toutefois, on peut l'admirer sur la pièce de 20 centimes d'euro, par exemple, ou les pièces britanniques de 20 et de 50 pence.

Carl Friedrich Gauß (1777–1855) réussit à construire le 17-gone régulier, d'après son journal le 29 mars 1796, un mois avant son 19ème anniversaire. Ce fut la première grande avancée dans ce domaine depuis l'ère grecque.

L'approche algébrique utilisée par Gauß permit à Pierre Wantzel (1814–1848) d'établir en 1837 un critère de non-constructibilité et d'ainsi terminer l'étude de Gauß sur les polygones constructibles.

La question (4), la *duplication du volume d'un cube*, est un des trois grands problèmes mathématiques de l'antiquité, avec la quadrature du cercle et la trisection de l'angle.

Histoire. — Le problème a son origine dans une légende rapportée par Ératosthène. Les habitants de Délos, victime d'une épidémie de peste, demandèrent à l'oracle de Delphes comment faire cesser l'épidémie. La réponse de l'oracle fut qu'il fallait doubler l'autel consacré à Apollon, autel dont la forme était un cube parfait. Les architectes demandèrent à Platon comment faire. Ce dernier leur répondit que le dieu n'avait certainement pas besoin d'un autel double, mais qu'il leur faisait reproche, par l'intermédiaire de l'oracle, de négliger la géométrie.

La question (5) établit un lien important entre géométrie et algèbre. Cette approche, appelée *géométrie analytique*, utilise des coordonnées et calcule avec des nombres réels. La *géométrie synthétique*, par contre, se base uniquement sur des axiomes géométriques et s'abstient de tout calcul.

Histoire. — François Viète (1540–1603) puis René Descartes (1596–1650) proposèrent de résoudre des problèmes géométriques par le calcul algébrique. Ainsi la géométrie analytique change radicalement le point de vue et les outils mis en œuvre. De nos jours elle peut être vue comme un élargissement naturel et justifié par son succès, mais tout le long du 17e au 20e siècle elle a provoqué de vives controverses. Au niveau didactique, ces points de vue opposés ont aussi laissé des traces dans les programmes scolaires successifs.

3. L'IMPORTANCE DE LA MODÉLISATION

La formulation du problème (3) est délibérément ouverte : *Quels polygones réguliers sont constructibles à la règle et au compas ?* Une partie essentielle de l'approche est de *développer* le problème : *d'abord* il faut préciser la question et modéliser ce que l'on cherche à analyser ; *ensuite* on essaie de résoudre les questions soulevées.

Ajoutons que parfois, en cours de route, il faut revenir en arrière et préciser des questions, changer de point de vue, ou changer les outils mis en œuvres, ...

Soyons honnêtes : c'est sous cette forme ouverte que la plupart des problèmes se présentent dans la vie. Ce n'est que dans des sujets d'examens, excessivement artificiels, que l'on trouve des « problèmes » coupés en petites rondelles et parfaitement préstructurés. (Je suis ici, au moins partiellement, les mêmes habitudes en structurant l'introduction de cette présentation par des questions bien réfléchies...)

La modélisation et la structuration d'un problème sont des prérequis pour sa résolution. Ainsi la trilogie « modélisation, recherche, preuve » résume des étapes indissociables. Quel que soit le niveau du problème, ce sont des compétences indispensables pour une approche réaliste et efficace.

4. ON APPREND EN FAISANT !

L'objectif principal de ce document n'est pas de parachuter une présentation toute faite. Le but est plutôt de *lancer* le débat et *d'inciter* à un développement approfondi. Toute personne sensible aux problèmes évoqués dans l'introduction profitera de s'acharner assez longtemps sur ces questions avant de lire la suite. Surtout ne vous privez pas du plaisir de (re)découvrir vous-mêmes les constructions des questions (1)–(2) !

Les paragraphes suivants esquissent une démarche possible pour résoudre les problèmes (3)–(5) évoqués dans l'introduction. Je ne prétends pas qu'elle soit la plus courte, ni la plus élégante, ni la plus profitable. Son seul mérite est d'être parfaitement élémentaire. Je me borne ici à indiquer les arguments que j'estime délicats. Ainsi j'omets toutes les belles constructions géométriques. Comme toujours, le mieux serait que vous développiez votre propre approche !

SECONDE PARTIE. — DÉVELOPPEMENT MATHÉMATIQUE

5. NOMBRES CONSTRUCTIBLES

Dans la suite le mot *construction* veut dire *construction à la règle et au compas*. Afin de travailler sérieusement avec ce concept, il faut le préciser : c'est la question (5) de l'introduction. Pour la pratique ceci sert à fixer les idées. Pour la théorie cette précision devient obligatoire si l'on veut prouver qu'une certaine construction est impossible.

Définition 5.1. Soit E un ensemble de points du plan. On note $\mathscr{D}(E)$ l'ensemble des droites du plan passant par deux points distincts de E. On note $\mathscr{C}(E)$ l'ensemble des cercles du plan de centre un point de E et de rayon la distance entre deux points distincts de E. Un point du plan est dit *constructible en une étape* à partir de E s'il est intersection

- de deux droites distinctes de $\mathscr{D}(E)$, ou
- de deux cercles distincts de $\mathscr{C}(E)$, ou
- d'une droite de $\mathscr{D}(E)$ et d'un cercle de $\mathscr{C}(E)$.

Définition 5.2. Un point P du plan est dit *constructible en n étapes* à partir de E s'il existe une suite finie $P_1,\dots,P_n = P$ de points du plan telle que chaque point P_k soit constructible en une étape à partir de $E \cup \{P_1,\dots,P_{k-1}\}$.

Définition 5.3. Un point P du plan est dit *constructible* à partir de E, s'il existe un entier naturel n tel que P soit constructible en n étapes à partir de E.

Proposition 5.4. *Soient $1,a,b$ trois longueurs tracées dans le plan. Alors on peut ainsi construire les longueurs $a+b$, $a-b$, ab, a/b où $b \neq 0$, puis $\sqrt{a}$ où $a > 0$.*

Démonstration. Ces constructions sont recommandées comme exercice.
(Il s'agit des questions (1)–(2) de l'introduction.) □

Exploitons maintenant une idée profonde et radicale : la *coordinatisation*.

Étant donné deux points distincts O et P du plan, nous pouvons paramétrer la droite passant par O et P par les nombres réels $\mathbb{R}$, tel que $0 \mapsto O$ et $1 \mapsto P$, respectant les quatre opérations $a+b$, $a-b$, ab, a/b ainsi que l'ordre des points.[1] Nous pouvons ensuite construire la droite perpendiculaire passant par O, y placer un point Q à distance $|OQ| = |OP|$, puis paramétrer la droite passant par O et Q également par $\mathbb{R}$. Par projection orthogonale sur ces deux axes tout point X du plan correspond à une paire de nombres réels $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, dits *coordonnées* de X. Réciproquement, deux coordonnées spécifient un unique point du plan. Ainsi nous pouvons identifier les points du plan avec les éléments de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 5.5. *Supposons le plan identifié avec $\mathbb{R}^2$. Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble de points, et soit $A := \operatorname{Coord}(E) \subset \mathbb{R}$ l'ensemble de leurs coordonnés. Soit $\bar{E} \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble des points constructibles à la règle et au compas à partir de E. Soit $\bar{A} \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels que l'on peut obtenir à partir de A par un enchaînement fini des cinq opérations $a+b$, $a-b$, ab, a/b où $b \neq 0$, et $\sqrt{a}$ où $a > 0$. Alors $\operatorname{Coord}(\bar{E}) = \bar{A}$*

Démonstration. L'inclusion $\bar{A} \subset \operatorname{Coord}(\bar{E})$ découle de la résolution affirmative des questions (1)–(2) : Les nombres réels dans A sont constructibles à partir de E par projections sur les axes, puis les cinq opérations sont constructibles à la règle et au compas.

Pour l'inclusion réciproque $\operatorname{Coord}(\bar{E}) \subset \bar{A}$ nous devons montrer que les coordonnées des points constructibles sont tous obtenus par un enchaînement fini des cinq opérations. En travaillant dans $\mathbb{R}^2$ nous pouvons représenter les objets géométriques (points, droites, cercles) par des coordonnées et utiliser des formules algébriques :

- La droite passant par deux points distincts (x_0,y_0) et (x_1,y_1) dans E est donnée par
$$D = \{(x_0,y_0) + t(x_1 - x_0, y_1 - y_0) \mid t \in \mathbb{R}\}$$
sous forme paramétrique, ou encore sous forme implicite
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)(y_1-y_0) - (y-y_0)(x_1-x_0) = 0\}.$$

[1] Par addition on trouve d'abord les nombres naturels $0,1,2,3,\dots$, puis les entiers par différences, puis les rationnels par quotients. Puisque les rationnels sont denses sur la droite, chaque point de la droite correspond à un nombre réel. Nous supposons ici que tout nombre réel est ainsi atteint. Il y aurait beaucoup plus à dire sur la coordinatisation et les axiomes sous-jacents ; nous nous contentons ici de cette esquisse.

- Le cercle de centre $(x_0, y_0) \in E$ et de rayon $r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, qui est la distance entre deux points distincts (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans E, est donné par

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}.$$

Les droites et les cercles constructibles sont donc de la forme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\} \qquad \text{et}$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\}$$

où les coefficients $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont obtenus à partir $\mathrm{Coord}(E)$ par les quatre opérations. L'intersection de deux droites mène à un système de deux équations linéaires à deux inconnues. Sa solution s'exprime en fonction des coefficients en utilisant les quatre opérations. L'intersection de deux cercles, ou d'une droite et d'un cercle, mène à une équation quadratique. Ses solutions s'expriment en fonction des coefficients en utilisant les quatre opérations et une racine carrée. Exercice ! $\square$

Proposition 5.6. *Soit C_0 l'ensemble des nombres constructibles à partir de* 1 *en utilisant les quatre opérations $+, -, \cdot, /$. Alors $C_0 = \mathbb{Q}$.*

Démonstration. Comme d'habitude, on prouve l'égalité $C_0 = \mathbb{Q}$ par $C_0 \subset \mathbb{Q}$ et $C_0 \supset \mathbb{Q}$.
« $\supset$ » Partant de $1 \in C_0$ on obtient $\mathbb{N} \subset C_0$, puis $\mathbb{Z} \subset C_0$, et finalement $\mathbb{Q} \subset C_0$.
« $\subset$ » Il suffit de constater que $\mathbb{Q}$ est stable par les quatre opérations $+, -, \cdot, /$. $\square$

Proposition 5.7. *Soit C_1 l'ensemble des nombres constructibles utilisant $+, -, \cdot, /$ à partir de $C_0 = \mathbb{Q}$ et d'une racine $\sqrt{c}$ où $c \in \mathbb{Q}$, $c > 0$. Alors $C_1 = \{a + b\sqrt{c} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.*

Démonstration. L'inclusion « $\supset$ » est claire. Pour montrer « $\subset$ » il suffit de vérifier que l'ensemble à droite est stable par les quatre opérations $+, -, \cdot, /$. Exercice ! $\square$

Proposition 5.8. *Soit C_{n+1} l'ensemble des nombres constructibles utilisant $+, -, \cdot, /$ à partir de C_n et d'une racine $\sqrt{c}$ où $c \in C_n$, $c > 0$. Alors $C_{n+1} = \{a + b\sqrt{c} \mid a, b \in C_n\}$.*

Démonstration. L'inclusion « $\supset$ » est claire. Pour montrer « $\subset$ » il suffit de vérifier que l'ensemble à droite est stable par les quatre opérations $+, -, \cdot, /$. Exercice ! $\square$

6. Sous-corps des nombres réels

D'après les arguments précédents nous pouvons effectuer les quatre opérations $+, -, \cdot, /$ dans les ensembles C_n construits ci-dessus. Ainsi notre étude algébrique des constructions à la règle et au compas nous mène à un concept algébrique très naturel qui s'avère important. Afin de disposer d'un vocabulaire commode, fixons la définition suivante :

Définition 6.1. Un sous-ensemble $C \subset \mathbb{R}$ est un *corps* (ou plus exactement un *sous-corps* des nombres réels) s'il contient 1 et si pour tout $a, b \in C$ l'ensemble C contient aussi la somme $a + b$, la différence $a - b$, le produit ab, et le quotient a/b pourvu que $b \neq 0$.

Puisqu'ici on ne travaillera qu'avec des sous-corps de $\mathbb{R}$ cette définition nous suffira. Par la suite le mot *corps* sera toujours utilisé dans le sens *sous-corps de* $\mathbb{R}$.

Exemple 6.2. Ni l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres naturels, ni l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers n'est un sous-corps de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est un sous-corps de $\mathbb{R}$, et c'est le plus petit : tout sous-corps de $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$ (proposition 5.6).

Exemple 6.3. Une chaîne $\mathbb{Q} = C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_n \subset \mathbb{R}$ où $C_{k+1} = \{a + b\sqrt{c_k} \mid a, b \in C_k\}$ pour un certain $c_k \in C_k$, $c_k > 0$, nous fournit d'autres sous-corps de $\mathbb{R}$ (proposition 5.8).

Profitons de cette notion pour donner une reformulation élégante de cette construction :

Proposition 6.4. *Soit $C \subset \mathbb{R}$ un sous-corps de $\mathbb{R}$ et soit $c \in C$, $c > 0$. Alors l'ensemble $C[\sqrt{c}] := \{a + b\sqrt{c} \mid a, b \in C\} \subset \mathbb{R}$ est à nouveau un sous-corps de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Si $\sqrt{c} \in C$ l'énoncé est trivialement vrai car $C[\sqrt{c}] = C$. Supposons donc que $\sqrt{c} \notin C$. Pour montrer que l'ensemble $C[\sqrt{c}]$ est stable par les quatre opérations, considérons deux éléments $x = a + b\sqrt{c}$ et $y = a' + b'\sqrt{c}$ dans $C[\sqrt{c}]$. On trouve

(1) $x + y = (a + a') + (b + b')\sqrt{c}$,

(2) $x - y = (a - a') + (b - b')\sqrt{c}$,

(3) $x \cdot y = (aa' + bb'c) + (ab' + a'b)\sqrt{c}$,

(4) $x/y = \frac{a+b\sqrt{c}}{a'+b'\sqrt{c}} = \frac{a+b\sqrt{c}}{a'+b'\sqrt{c}} \cdot \frac{a'-b'\sqrt{c}}{a'-b'\sqrt{c}} = \frac{aa'-bb'c}{a'^2-b'^2c} + \frac{a'b-ab'}{a'^2-b'^2c}\sqrt{c}$.

Comme C est un corps, tous les coefficients ainsi calculés sont à nouveau dans C.

Une petite précision : quand le dénominateur $a'^2 - b'^2c$ s'annule-t-il ? Si $a'^2 - b'^2c = 0$ et $b' \neq 0$, alors $c = a'^2/b'^2$, contrairement à notre hypothèse $\sqrt{c} \notin C$. On voit ainsi que le dénominateur $a'^2 - b'^2c$ s'annule si et seulement si $a' = b' = 0$. □

Définition 6.5. Considérons une chaîne $C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \dots$ de sous-corps de $\mathbb{R}$ tels que $C_{k+1} = C_k[\sqrt{c_k}]$ où $c_k \in C_k$, $c_k > 0$. On dit que le corps C_{k+1} est une *extension* du corps C_k ; plus précisément c'est une *extension quadratique* car on rajoute une racine carrée. La famille $C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_n$ est appelée une *tour d'extensions quadratiques*.

Dans la suite on utilisera ce vocabulaire, mais dans un souci de rester élémentaire on se passera d'une théorie approfondie des extensions de corps.

Corollaire 6.6. *Soit $C_0 \subset \mathbb{R}$ un sous-corps des nombres réels. Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$ les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *x est constructible à la règle et au compas à partir de C_0.*
- *x est contenu dans une tour d'extensions quadratiques $C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_n$ dans $\mathbb{R}$.*

Exemple 6.7 (incroyable mais vrai)**.** Par un calcul ingénieux Gauß trouva que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = \frac{1}{16}\left(\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right) + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.$$

Si nous admettons cette formule, le corollaire précédent montre que le polygone régulier à 17 cotés est constructible à la règle et au compas. Pour une jolie construction explicite, beaucoup plus courte mais tout aussi ingénieuse, on pourra consulter Ian Stewart, *Galois Theory*, Chapman & Hall, 2003 (3ème édition, §19.5).

7. LA DUPLICATION DU CUBE

Équipés d'un outillage adéquat, nous pouvons maintenant analyser le problème de la duplication du cube. Une première sous-question est de savoir si $\sqrt[3]{2}$ est constructible avec les quatre opérations $+,-,\cdot,/$ seulement. Ceci est résolu par l'observation suivante :

Lemme 7.1. *Le nombre $\sqrt[3]{2}$ n'est pas rationnel.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un nombre rationnel $r = \frac{a}{b}$ tel que $r^3 = 2$. Ici $a,b \in \mathbb{Z}$ et $b \geq 1$, et nous pouvons supposer la fraction réduite, c'est-à-dire que $\operatorname{pgcd}(a,b) = 1$. L'égalité $r^3 = 2$ implique $a^3 = 2b^3$. Ceci entraîne que a est pair, $a = 2\bar{a}$. Or, $2b^3 = a^3 = 8\bar{a}^3$ implique $b^3 = 4\bar{a}^3$, donc b est pair aussi. Ceci contredit notre hypothèse que $\operatorname{pgcd}(a,b) = 1$. On conclut qu'aucun nombre rationnel r ne vérifie $r^3 = 2$. □

Afin de construire $\sqrt[3]{2}$ il faut donc au moins une racine. Voyons si une racine suffit :

Lemme 7.2. *Soit $C_0 \subset C_1$ une extension quadratique. Si $\sqrt[3]{2} \in C_1$, alors $\sqrt[3]{2} \in C_0$.*

Démonstration. Par hypothèse nous avons $\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{c}$ où $a,b,c \in C_0$, $c > 0$. Alors

$$2 = (a+b\sqrt{c})^3 = a^3 + 3a^2b\sqrt{c} + 3ab^2c + b^3c\sqrt{c} = (a^3 + 3ab^2c) + (3a^2 + b^2c)b\sqrt{c}.$$

Le terme $3a^2 + b^2c$ est non négatif, et s'annule si et seulement si $a = b = 0$.

- Si $b = 0$, alors $\sqrt[3]{2} = a$.
- Si $b \neq 0$, alors $\sqrt{c} = \frac{2-a^3-3ab^2c}{3a^2b+b^3c} \in C_0$.

Dans les deux cas on conclut que $\sqrt[3]{2} \in C_0$. □

Cet argument peut être itéré, ce qui nous mène à la conclusion suivante :

Théorème 7.3. *Le nombre réel $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible à la règle et au compas.*

Démonstration. Supposons que $\sqrt[3]{2}$ est constructible à la règle et au compas à partir d'une longueur unité 1. Dans ce cas il existe une tour $\mathbb{Q} = C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_{n-1} \subset C_n \subset \mathbb{R}$ d'extensions quadratiques telle que $\sqrt[3]{2} \in C_n$. Le lemme précédent montre que $\sqrt[3]{2} \in C_{n-1}$, puis $\sqrt[3]{2} \in C_{n-2}$, …, et finalement $\sqrt[3]{2} \in C_0 = \mathbb{Q}$. Ceci contredit notre résultat $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$. On conclut que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible. □

8. LE PENTAGONE RÉGULIER

La construction d'un n-gone régulier est relativement facile pour $n = 3,4,6,8$. Les cas 5 puis 7 et 9 s'avèrent plus durs, pour deux raisons opposées :

Pour montrer qu'une construction est faisable, il suffit de le faire. Pour prouver qu'une construction est impossible, il ne suffit pas d'échouer. Il faut identifier l'obstacle !

Proposition 8.1. *Les polygones réguliers suivants sont constructibles :*

- *le triangle équilatéral ($n = 3$).*
- *le carré ($n = 4$).*
- *le pentagone régulier ($n = 5$).*
- *l'hexagone régulier ($n = 6$).*

- *l'octogone régulier ($n = 8$).*

Démonstration. Seul le cas $n = 5$ est délicat. (Après quelques échecs inévitables on pourrait même soupçonner que cette construction serait impossible...) Pour clarifier la situation, essayons de tirer profit des techniques algébriques développées ci-dessus !

Considérons l'angle $\theta = 2\pi/5$ et le pentagone régulier centré en 0 qui a pour sommets $(\cos(k\theta), \sin(k\theta))$ où $k = 0, \pm 1, \pm 2$. Puisque ce pentagone est invariant par rotation d'angle θ, l'isobarycentre de ces cinq sommets est 0. Ainsi on trouve

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + 2\cos(\theta) + 2\cos(2\theta) = 1 + 2\cos\theta + 2(2\cos^2\theta - 1) \\ &= 4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1 = x^2 + x - 1 \quad \text{où} \quad x = 2\cos\theta. \end{aligned}$$

Cette relation algébrique nous permet de calculer $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ puis $\cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. On peut donc construire $\cos(2\pi/5)$ à la règle et au compas. □

C'est un exercice bénéfique (et désormais facile) d'expliciter une des nombreuses constructions du pentagone régulier et de prouver sa validité.

Remarque 8.2. L'argument de l'isobarycentre explique non seulement comment *prouver* la belle relation algébrique ci-dessus, mais aussi comment la *trouver*. Sa signification géométrique sert à la comprendre, à la retenir, ... et éventuellement à la retrouver si jamais on est perdu sur une île déserte et que la géométrie sert de passe-temps bienvenu.

Remarque 8.3. Si l'on sait construire un n-gone régulier, alors on sait aussi construire un $2n$-gone régulier par bisection de l'angle central. Ainsi sont constructibles les polygones réguliers à $3 \cdot 2^k$ cotés, à $4 \cdot 2^k$ cotés, puis à $5 \cdot 2^k$ cotés, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Remarque 8.4. Si l'on sait construire un p-gone régulier et un q-gone régulier, où $\operatorname{pgcd}(p,q) = 1$, alors on sait aussi construire un pq-gone régulier. Effectivement, il existe des entiers $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $up + vq = 1$. Ainsi $\frac{2\pi}{pq} = u\frac{2\pi}{q} + v\frac{2\pi}{p}$. Par exemple, on peut construire un polygone régulier à 15 cotés, car $2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 1$, donc $2 \cdot \frac{2\pi}{5} - 1 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{15}$.

9. L'HEPTAGONE RÉGULIER

Puisque la méthode algébrique a fonctionné à la merveille pour le pentagone ($n = 5$), essayons d'analyser le cas de l'heptagone ($n = 7$) de la même manière :

Lemme 9.1. *Le nombre $\eta = 2\cos(2\pi/7)$ vérifie l'équation $\eta^3 + \eta^2 - 2\eta - 1 = 0$.*

Démonstration. Considérons l'angle $\theta = 2\pi/7$ et l'heptagone régulier centré en 0 qui a pour sommets $(\cos(k\theta), \sin(k\theta))$ où $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$. Puisque ce pentagone est invariant par rotation d'angle θ, l'isobarycentre de ces sept sommets est 0. Ainsi on trouve

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + 2\cos(\theta) + 2\cos(2\theta) + 2\cos(3\theta) \\ &= 1 + 2\cos\theta + (4\cos^2\theta - 2) + (8\cos^3\theta - 6\cos\theta) \\ &= 8\cos^3\theta + 4\cos^2\theta - 4\cos\theta - 1 = \eta^3 + \eta^2 - 2\eta - 1. \end{aligned}$$

Ici on utilise l'identité $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ ainsi que $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$. □

Remarque 9.2. La relation algébrique $\eta^3+\eta^2-2\eta-1=0$ nous offre une prise concrète sur le nombre $\eta=2\cos(2\pi/7)$. Une fois cette équation trouvée ou conjecturée, on peut aussi la vérifier par un calcul direct. Notamment, si l'on dispose de la formule d'Euler $\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$, alors on peut aisément développer $\eta^3+\eta^2-2\eta-1$.

Lemme 9.3. *Le polynôme X^3+X^2-2X-1 n'a pas de racine rationnelle.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $x=\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ tel que $x^3+x^2-2x-1=0$. Ici $a,b\in\mathbb{Z}$ et $b\geq 1$, et nous pouvons supposer la fraction réduite, c'est-à-dire que $\operatorname{pgcd}(a,b)=1$. On obtient alors $a^3+a^2b-2ab^2-b^3=0$. Ceci montre que a divise b, donc $a=\pm 1$. Réciproquement, b divise a, donc $b=1$. Or, on voit que $x=\pm 1$ ne vérifie pas $x^3+x^2-2x-1=0$. On conclut qu'aucun nombre rationnel x ne vérifie $x^3+x^2-2x-1=0$. □

En particulier, $\eta=2\cos(2\pi/7)$ n'est pas rationnelle. Afin de construire $\cos(2\pi/7)$ il faut donc au moins une racine carrée. Voyons si une racine suffit :

Lemme 9.4. *Soit $C_0\subset C_1$ une extension quadratique. Si le polynôme X^3+X^2-2X-1 admet une racine dans C_1, alors il en admet une dans C_0.*

Démonstration. Par hypothèse nous avons $x^3+x^2-2x-1=0$ pour un certain élément $x\in C_1$, c'est-à-dire que $x=a+b\sqrt{c}$ où $a,b,c\in C_0$, $c>0$. On développe

$$0=x^3+x^2-2x-1=\alpha+\beta\sqrt{c}$$

et après calcul on trouve $\alpha=a^3+3ab^2c+a^2+b^2c-2a-1$ et $\beta=3a^2b+b^3c+2ab-2b$.

- Si $\beta\neq 0$, alors on obtient immédiatement $\sqrt{c}=-\alpha/\beta\in C_0$ et donc $x\in C_0$.
- Dans le cas où $\beta=0$, on trouve $c=\frac{2-2a-3a^2}{b^2}$ puis $\alpha=-8a^3-8a^2+2a+1$.
  Puisque $\alpha=0$, on a $a\neq 0$ et l'inverse $y=\frac{1}{2a}\in C_0$ vérifie $y^3+y^2-2y-1=0$.

Dans les deux cas on conclut que X^3+X^2-2X-1 admet une racine dans C_0. □

Comme couronnement de nos efforts nous pouvons conclure par le résultat suivant :

Théorème 9.5. *L'heptagone régulier n'est pas constructible à la règle et au compas.*

Démonstration. La construction de l'heptagone régulier est équivalente à la construction du nombre $\cos(2\pi/7)$. Supposons que $\eta=2\cos(2\pi/7)$ est constructible à la règle et au compas à partir d'une longueur unité 1. Dans ce cas il existe une tour d'extensions quadratiques $\mathbb{Q}=C_0\subset C_1\subset\cdots\subset C_{n-1}\subset C_n\subset\mathbb{R}$ telle que $\eta\in C_n$. Donc le polynôme X^3+X^2-2X-1 admet une racine dans C_n. Le lemme précédent montre qu'il en est de même dans C_{n-1}, puis dans C_{n-2}, …, et finalement dans $C_0=\mathbb{Q}$. Or, nous avons déjà vu que le polynôme X^3+X^2-2X-1 n'admet pas de racine rationnelle. On conclut que $\eta=2\cos(2\pi/7)$ n'est pas constructible par extensions quadratiques itérées. Par conséquent l'heptagone régulier n'est pas constructible à la règle et au compas. □

10. L'ENNÉAGONE RÉGULIER

Un argument qui marche une fois est une astuce ; un argument que marche deux fois est un début de théorie. Poussons donc notre petite théorie encore un cran plus loin, et analysons enfin l'ennéagone régulier ($n = 9$). Ce dernier effort nous permettra de finir en toute beauté en répondant aussi au problème de la trisection de l'angle.

Lemme 10.1. *Le nombre* $\kappa = 2\cos(2\pi/9)$ *vérifie l'équation* $\kappa^3 - 3\kappa + 1 = 0$.

Démonstration. D'une part $\cos(3\theta) = \cos(2\pi/3) = -1/2$. D'autre part nous savons que $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$. Ainsi nous obtenons la relation $8\cos^3\theta - 6\cos\theta + 1 = 0$, autrement dit $\kappa^3 - 3\kappa + 1 = 0$. □

Lemme 10.2. *Le polynôme* $X^3 - 3X + 1$ *n'a pas de racine rationnelle.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tel que $x^3 - 3x + 1 = 0$. Ici $a, b \in \mathbb{Z}$ et $b \geq 1$, et nous pouvons supposer la fraction réduite, c'est-à-dire que $\operatorname{pgcd}(a,b) = 1$. On obtient alors $a^3 + 3ab^2 - b^3 = 0$. Ceci montre que a divise b, donc $a = \pm 1$. Réciproquement, b divise a, donc $b = 1$. Or, on voit que $x = \pm 1$ ne vérifie pas $x^3 - 3x + 1 = 0$. On conclut qu'aucun nombre rationnel x ne vérifie $x^3 - 3x + 1 = 0$. □

En particulier, $\kappa = 2\cos(2\pi/9)$ n'est pas rationnelle. Afin de construire $\cos(2\pi/9)$ il faut donc au moins une racine carrée. Voyons si une racine suffit :

Lemme 10.3. *Soit* $C_0 \subset C_1$ *une extension quadratique. Si le polynôme* $X^3 - 3X + 1$ *admet une racine dans* C_1*, alors il en admet une dans* C_0.

Démonstration. Par hypothèse nous avons $x^3 - 3x + 1 = 0$ pour un certain élément $x \in C_1$, c'est-à-dire que $x = a + b\sqrt{c}$ où $a, b, c \in C_0$, $c > 0$. On développe

$$0 = x^3 - 3x + 1 = \alpha + \beta\sqrt{c}$$

et après calcul on trouve $\alpha = a^3 + 3ab^2c - 3a + 1$ et $\beta = 3a^2b + b^3c - 3b$.

- Si $\beta \neq 0$, alors on obtient immédiatement $\sqrt{c} = -\alpha/\beta \in C_0$ et donc $x \in C_0$.
- Si $\beta = 0$, on trouve $c = \frac{3-3a^2}{b^2}$ puis $\alpha = -8a^3 + 6a + 1$.
  Puisque $\alpha = 0$, on trouve que $y = -2a \in C_0$ vérifie $y^3 - 3y + 1 = 0$.

Dans les deux cas on conclut que $X^3 - 3X + 1$ admet une racine dans C_0. □

Cet argument peut être itéré, ce qui nous mène à la conclusion suivante :

Théorème 10.4. *L'ennéagone régulier n'est pas constructible à la règle et au compas.*

Démonstration. La construction de l'ennéagone régulier est équivalente à la construction du nombre $\cos(2\pi/9)$. Supposons que $\kappa = 2\cos(2\pi/9)$ est constructible à la règle et au compas à partir d'une longueur unité 1. Dans ce cas il existe une tour d'extensions quadratiques $\mathbb{Q} = C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_{n-1} \subset C_n \subset \mathbb{R}$ telle que $\kappa \in C_n$. Le polynôme $X^3 - 3X + 1$ admet donc une racine dans C_n. Le lemme précédent montre qu'il en est de même dans C_{n-1}, puis dans C_{n-2}, ..., et finalement dans $C_0 = \mathbb{Q}$. Or, nous avons déjà vu que le polynôme $X^3 - 3X + 1$ n'admet pas de racine rationnelle. On conclut que $\kappa = 2\cos(2\pi/9)$ n'est pas constructible par extensions quadratiques itérées. Par conséquent l'ennéagone régulier n'est pas constructible à la règle et au compas. □

11. La trisection de l'angle

À partir de certains angles θ on arrive à construire l'angle $\theta/3$, par exemple pour l'angle droit $\theta = \pi/2$. (Exercice !) Pendant plus de 2000 ans, les géomètres ont cherché en vain une construction générale qui marche pour tout angle. Passant par l'algèbre nous sommes maintenant en mesure de prouver qu'une telle construction est impossible :

Théorème 11.1. *Il n'existe pas de construction à la règle et au compas qui permette de trisecter tout angle donné. Pour expliciter un exemple simple et concret : il est impossible de trisecter l'angle* $\pi/3$ *(soit* $60°$*) à la règle et au compas.*

Démonstration. Nous savons construire un hexagone régulier, d'angle central $\pi/3$. Si l'on pouvait trisecter cet angle à la règle et au compas, alors on construirait ainsi l'angle $\pi/9$, puis l'ennéagone régulier. Ceci est impossible d'après le théorème 10.4. □

Si ce dernier résultat vous surprend ou perturbe (ce qui est fort possible), alors vous avez une excellente motivation pour vérifier minutieusement les arguments. Peut-être des erreurs se sont glissées dans notre démarche ? Soyez critiques mais soyez sports !

Troisième partie. — Discussion de l'approche

12. Quels outils nous ont servi ?

Les résultats précédents sont un beau succès de notre étude, et témoignent de l'interaction féconde entre géométrie et algèbre. Soulignons à nouveau que nos outils sont élémentaires et balaient une bonne partie des techniques enseignées au collège et lycée :

- la construction à la règle et au compas,
- l'usage des coordonnées cartésiennes,
- la résolution des équations de degré 1 et 2,
- le calcul algébrique avec les racines carrées,
- l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ et quelques variantes,
- la paramétrisation du cercle par $(\cos\theta, \sin\theta)$,
- les identités $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ et $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

L'approche proposée ici est orientée vers un problème concret, attrayant, et historiquement important. Sa solution mobilise des connaissances substantielles et nécessite des raisonnements rigoureux, tout en restant élémentaire. Ces caractéristiques en font un sujet formateur pour une éducation intégrante et non réduite aux automatismes insensés.

13. Qu'est-ce que la modélisation ?

Généralement, la *modélisation* est la traduction d'un problème dans un contexte où il peut être analysé, voire résolu. Ceci comprend des précisions, des formalisations, des reformulations, etc. Pour les problèmes discutés ici, ceci s'est fait en deux étapes :

- D'abord la formalisation de ce qui est « la construction à la règle et au compas ».
- Ensuite la reformulation algébrique du problème en coordonnées cartésiennes.

Cette traduction a ouvert la voie pour un traitement algébrique du problème, ce qui nous a permis finalement de le résoudre. À noter que la formulation initiale du problème (3) ne fait pas intervenir l'algèbre, et notre réponse finale non plus : sont constructibles les polygones réguliers à $3, 4, 5, 6, 8, 10$ cotés, mais non à 7 ou 9 cotés.

14. Héritage, usage et transmission du savoir

Les mathématiciens grecs étaient les inventeurs et de grands maîtres de la construction à la règle et au compas. Pourquoi n'ont-ils pas su résoudre les problèmes (3) et (4) ? Pourquoi ne se sont-ils pas posé la question (5) sur le lien entre géométrie et algèbre ? Qu'est-ce qui fait que de nos jours ces problèmes nous semblent abordables ?

Il est bien sûr difficile d'y répondre avec certitude, mais voici un premier élément de réponse. Les mathématiciens grecs percevaient la géométrie comme l'expression idéale des mathématiques, et ne songeaient pas à faire intervenir des coordonnées et des calculs algébriques. Nous sommes fortunés d'avoir accumulé le savoir de plus de 2000 ans d'activité intellectuelle, y compris mathématique. Entre autre, nous avons pris l'habitude de penser en termes de coordonnées et de calculer algébriquement.

Comme nous avons vu, les connaissances nécessaires pour apprécier et participer à cette aventure intellectuelle sont encore de nos jours enseignées au collège et au lycée. Cette fière affirmation risque pourtant de devenir une utopie, sans doute l'est-elle déjà aujourd'hui. Depuis des années les programmes scolaires sont taillés sauvagement et vidés de toute ambition scientifico-culturelle. D'autant plus faut-il à nouveau défendre la transmission du savoir et l'accès à la culture, y compris mathématique.

15. Pour aller plus loin...

Signalons finalement quelques limitations de nos outils. La preuve des lemmes 7.2, 9.4 et 10.3 ci-dessus est assez répétitive et un peu trop calculatoire à mon goût. Ces calculs aboutissent dans ces trois cas mais ne fournissent aucun éclaircissement général. C'est le prix à payer pour une preuve élémentaire évitant toute théorie. Afin d'aller plus loin il nous manque encore des outils plus puissants...

Au 19e siècle la théorie des corps, et plus précisément la théorie de Galois, fut inventée afin de résoudre ce genre de problème géométrique et/ou algébrique. Dans un cours plus développé, on utilisera le langage des espaces vectoriels et la notion de dimension. Cette approche plus conceptuelle est moins calculatoire et met en avant le lien fort utile entre le degré des polynômes et le degré des extensions des corps qui figurent ci-dessus.

Dans la Wikipédia francophone (`fr.wikipedia.org`) on trouve des articles bien écrits sur la *construction à la règle et au compas*, les *nombres constructibles*, le *théorème de Wantzel*, et le *théorème de Gauss-Wantzel*. Il existe, bien sûr, un bon nombre d'excellentes introductions à cette belle théorie. Je me contente ici d'en mentionner trois :

- Une approche élémentaire comme la nôtre se trouve dans le premier chapitre de Charles Robert Hadlock : *Field Theory and Its Classical Problems*, Carus Mathematical Monographs No. 19, The Mathematical Association of America, 2000.
- Pour un développement détaillé au niveau universitaire, avec de nombreuses remarques historiques, on consultera avec profit Jean-Pierre Escoffier, *Théorie de Galois*, Dunod, 2003, et Ian Stewart, *Galois Theory*, Chapman & Hall, 2003.

Institut für Geometrie und Topologie, Universität Stuttgart, Allemagne
URL: `www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm`
E-mail address: `Michael.Eisermann@igt.uni-stuttgart.de`