UNIVERSITE JOSEPH FOURIER
SCIENCES.TECHNOLOGIE.SANTÉ

i.e.s. Grenoble
Centre d'Initiation à l'Enseignement Supérieur

NUMERO 35 • DECEMBRE 2006

LE GLUON

JOURNAL DE VULGARISATION SCIENTIFIQUE DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER

EDITO

En Décembre 2001, le premier numéro de votre journal de vulgarisation scientifique paraissait. Pour fêter dignement cet anniversaire, nous vous proposons ce mois-ci de vous faire quelques noeuds au cerveau. En effet, Olivier Pierre-Louis nous initie aux noeuds de l'infiniment petit avec les polymères tandis que Michael Eisermann compare et multiplie les noeuds, ces objets courants mais encore assez mystérieux. Bonne lecture et bonnes fêtes... en espérant que vous saurez dénouer vos paquets-cadeaux.

SOMMAIRE

Retrouvez le Gluon sur le Net : http://www.ujf-grenoble.fr/
Rubrique actualites/kiosque/gluon

Mécanique et géométrie des noeuds

Physique

Les noeuds, dans les cordes de marins ou les fils de pêche, sont des objets de la vie de tous les jours. Mais d'autres noeuds plus surprenants, avec des brins d'ADN ou des nanotubes, excitent depuis peu l'intêret des chercheurs.

Les noeuds : des objets familiers

Depuis les temps reculés, les noeuds, entrelacs et enchevêtrements ont été utilisés pour attacher les voiles des bateaux, pour suspendre des objets, ou pour tisser des habits. Une grande variété de noeuds de la vie de tous les jours ont donc été développés tout au long de notre histoire. Par exemple, la plupart d'entre nous connaissent le noeud de trêfle et le noeud de huit, et les marins aguéris connaissent le noeud d'alouette et le noeud de cabestan. De par leur complexité et leurs étranges symétries, les noeuds ont aussi été des objets de fascination pour les artistes dans de nombreuses civilisations.

On peut, par exemple, citer les jeux de ficelle qu'affectionnaient les indiens Navajo, ou les fameux entrelacs celtes (cf. figure 1). Cependant, malgré toute cette expérience historique ainsi que l'intérêt récent des mathématiciens et des physiciens, de nombreux aspects et propiétées des noeuds nous échappent encore aujourd'hui [1].

Des cordes aux polymères

Commençons par faire un noeud avec une corde. Puis serrons-le. Quelle longueur de corde y-a-t'il dans le noeud ? Voilà notre premier problème non résolu ! Tout ce que nous savons faire est une simulation numérique. Vous devez vous dire que ceci est un problème purement géométrique, et qui relève plutôt des mathématiques que de la physique... Eh bien, regardons de plus près des objets qui semblent susciter plus d'excitation chez les physiciens : *les polymères* (cf. glossaire).

Source : www.kitzbueheler-baeren.at

Figure 1. Les entrelacs celtes.

Leur épaisseur est typiquement de l'ordre du nanomètre, mais leur longueur peut être 100000 fois plus grande ! Les polymères sont si fins que la température les fait fluctuer de façon très importante. Ils sont donc, depuis les années 70, un sujet de prédilection pour la physique statistique, qui traite justement des systèmes sujets aux fluctuations thermiques.

Ces fluctuations s'apparentent au mouvement aléatoire, dit Brownien, des petites particules, qui a été observé pour la première fois par le biologiste R. Brown en 1827 avec des grains de pollen dans l'eau. Les polymères sont aussi soumis à ce mouvement Brownien, mais le fait qu'ils soient de longues chaînes leur donnent des propriétés particulières. En effet, ils peuvent être noués ! On peut d'ailleurs montrer que la probabilité que le polymère soit noué augmente avec sa longueur, et les longs polymères ont de fortes chances d'être noués.

Une découverte récente et étonnante est que les noeuds des polymères se serrent tout seul, grâce aux fluctuations thermiques : ce phénomène est appelé localisation des noeuds. Serrés oui, mais jusqu'où ?

Il semble, comme l'a remarqué P.G. de Gennes, que les noeuds peuvent être serrés au maximum comme la corde serrée mentionnée plus haut. Mais selon les conditions auxquelles sont soumis les polymères, les noeuds peuvent être moins serrés, et rester fluctuants.

Comment alors modéliser ces fluctuations à l'intérieur du noeud ? Le modèle le plus simple, une fois de plus inspiré par P.G. de Gennes, est de dire que les fluctuations créent une sorte de tube effectif autour du polymère, qu'elles l'épaississent comme une corde de guitare qui à l'air d'être floue et plus épaisse lorsqu'elle vibre. Maintenant, le polymère épaissi par des fluctuations, peut être serré. Le modèle ainsi obtenu, appelé modèle de tube, décrit de façon assez précise le comportement des noeuds observés sur l'un des polymères les plus célèbres : l'ADN (cf. glossaire).

L'ADN emmêlé et démêlé

Le modèle de tube a en effet permis de prédire quantitativement la vitesse de dérive de brins d'ADN noués en électrophorèse (c-à-d en présence d'un champ électrique), ainsi que la diffusion (mouvement aléatoire) de noeuds le long de l'ADN. Loin d'être anecdotiques, les noeuds de l'ADN sont monnaie courante. La duplication de l'ADN demande en effet de séparer les brins enroulés de sa double hélice, ce qui ne se fait pas sans noeuds. Mais la nature a prévu une machinerie complexe de protéines telle que la topo-isomérase, qui savent couper et re-souder les brins pour dénouer l'ADN [2]. Si l'ADN obéit bien au modèle des polymères, c'est parce qu'il est suffisament flexible. Une échelle de longueur caractéristique, appelée *longueur de persistence*, décrit la rigidité des polymères. Pour des longueurs plus grandes que la longueur de persistence, les fluctuations sont importantes et le polymère a l'air très flexible. Pour des longueurs inférieures, il est peu déformé par les fluctuations thermiques.

Et les filaments plus rigides ?

La longeur de persistence de l'ADN est de 50nm, mais celle d'un nanotube (cf. glossaire) est de 800 nm. Avec cette longueur de persistence géante, les noeuds de nanotubes ressemblent plus a ceux des fils de nylons ou des cheveux. Les fluctuations sont alors négligeables, et nous arrivons à un problème de mécanique : quelle configuration va prendre un noeud dans un filament peu flexible ? Ici, des tresses serrées apparaissent dues aux tensions qui se forment dans le filament : c'est la *localisation de tresse*. L'étude de ce phénomène ainsi que de la mécanique de ces noeuds est l'un de mes sujets de recherches actuels (cf. figure 2). J'ai par exemple relié la mécanique de ces noeuds à des invariants topologiques, tels que ceux qui sont décrits dans l'article de M. Eisermann dans ce numéro.

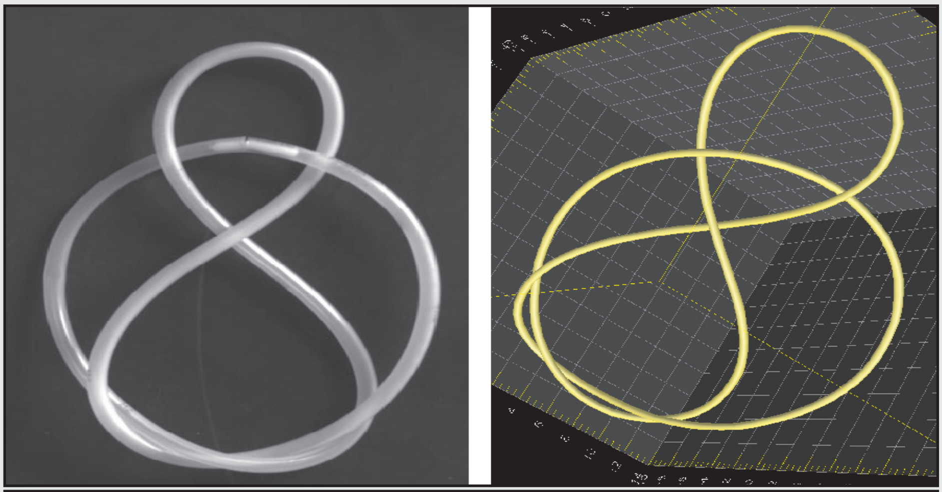
La localisation des tresses et des noeuds a des conséquences importantes pour la friction (le long d'un filament certains noeud glissent et d'autres non), mais aussi pour la rupture. En effet, prenez l'un de vos cheveux, faites un noeud, puis tirez. Le cheveu cassera a l'endroit où était le noeud. Ces phénomènes restent encore mal compris, et sont actuellement des sujets actifs de recherche.

Ubiquité des noeuds

Les noeuds nous offrent donc des problèmes variés à la frontière — toujours poreuse — entre la physique, les mathématiques, et la biologie. Mais ceci n'est qu'un bref aperçu : la physique des lignes nouées s'étend au-delà des filaments et polymères, et concerne de nombreuses structures, telles que les lignes de vortex en mécanique des fluides, ou les lignes de dislocations dans les solides. Globalement, dès qu'on a un objet linéaire, on peut se demander s'il est noué.

Finalement, par des liens plus abstraits, les noeuds sont aussi au coeur de nombreux autres domaines de la physique tels que la théorie des cordes (modèle pour les particules élémentaires), les modèles exacts en physique statistique, ou la théorie du chaos.

O. *Pierre-Louis*



Source O. Pierre-Louis

Figure 2. Un noeud avec un filament peu flexible : à gauche une expérience avec un tube en plastique d'un centimètre d'epaisseur, à droite, une simulation numérique.

GLOSSAIRE

Polymère :
Un polymère est une longue chaîne de molécules accrochées les unes aux autres. Les polymères les plus communs sont le polyéthylène (plastique) et le polystyrène.

ADN :
L'ADN est un polymère avec une structure en double hélice, stocké dans les cellules, qui contient le code génétique des êtres vivants.

Nanotube :
Un nanotube est une structure formée d'un tube cylindrique composée uniquement d'atomes de carbone. Sa largeur est de quelques nanomètres, et sa longueur peut aller jusqu'au millimètre !

REFERENCES

[1] Pour la Science, *La science des noeuds*, Hors Série avril 1997.

[2] SA. Wasserman and NR. Cozzarelli, *Biochemical topology: applications to DNA recombination and replication*, Science vol. 232 p. 951 (1986).

L'AUTEUR

Pour Olivier Pierre-Louis, la science est avant tout un plaisir. Le goût pour la science et pour la recherche lui sont venus doucement, pendant ses études universitaires à l'Université de Nantes, puis à l'ENS de Lyon. Après une thèse à Grenoble et un post-doc à l'Université du Maryland aux Etats-Unis, il a intégré le CNRS en 1998. Depuis, il travaille au Laboratoire de Spectrométrie Physique à Grenoble, tout en développant plusieurs collaborations internationales. Sa recherche s'articule autour des théories de la morphogénèse (apparition spontanée et évolution des formes dans les systèmes physiques ou biologiques), de la physique nonlinéaire, et de la physique des systèmes hors équilibre. Ses centres d'intérêts récents sont le démouillage des couches solides d'épaisseur nanométrique, ainsi que la mécanique des noeuds.

Olivier Pierre-Louis
Chercheur CNRS,
Laboratoire de Spectrométrie Physique, UJF,
www-lsp.ujf-grenoble.fr/equipe/dyfcom/opl/home-page.html
opl@spectro.ujf-grenoble.fr

RENDEZ-VOUS GRENOBLOIS

L'UJF et le CIES vous présentent une conférence Midisciences, mardi 12 dévembre 2006, de 12h15 à 13h30 à l' amphi D2 du DSU, sur le thème :

"Usage et sauvegarde des plantes médicinales, une alternative cruciale dans les pays défavorisés"
avec Jean-Pierre NICOLAS, de l'association Jardin du Monde, docteur en botanique et anthropologie de l'Université de Lille.

Noeuds et tresses

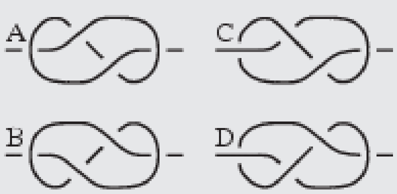
Mathématiques

Des noeuds, des tresses, et d'autres objets noués apparaissent non seulement dans la vie quotidienne, la marine et l'art décoratif, mais aussi en sciences. En biologie moléculaire, par exemple, l'ADN peut être noué, et généralement il l'est. En physique, certains modèles quantiques font apparaître des structures qui ressemblent à des tresses. En mathématiques, finalement, l'étude des noeuds sert à comprendre les espaces de dimension 3. Même à un niveau élémentaire le sujet révèle une richesse surprenante...

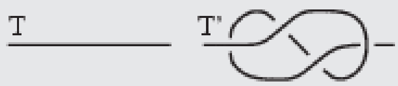
Vers la fin du XIXe siècle les physiciens spéculaient sur la nature des atomes. En 1867 Lord Kelvin proposa une nouvelle théorie, suivant laquelle les atomes sont des noeuds dans l'éther. Conçue pour expliquer les éléments chimiques, cette approche a donné lieu aux premières tabulations et tentatives de classification de noeuds.
La théorie de Kelvin fut étudiée pendant deux décennies, avant d'être abandonnée au profit des modèles concurrents qui expliquaient mieux les expériences, de plus en plus fines. Ironiquement, la physique a récemment repris l'approche des noeuds, bien qu'à un tout autre niveau, avec la théorie des cordes.
Entre-temps, les mathématiciens se sont emparés de cette belle mais difficile théorie. La question de base reste la même : comment reconnaître et comment distinguer les noeuds ? Après un siècle d'importants progrès dans ce domaine, la réponse reste partielle.

Qu'est-ce qu'un noeud ?

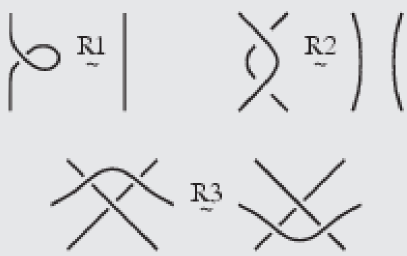
Toute démarche théorique demande d'abord de formaliser les objets dont on veut parler, et souvent le premier défi est de développer un modèle adéquat.
Pour un mathématicien, un noeud est une courbe dans l'espace, sans auto-intersections. Afin d'éviter que toute courbe ne se dénoue trop aisément, nous sommes obligés de recoller les deux bouts (pour former un cercle noué) ou bien de les fixer à deux murs opposés (comme dans les dessins suivants).



Définition **-** On considère deux noeuds comme équivalents si l'on peut transformer l'un en l'autre de manière continue, sans jamais couper le noeud, ni passer par des auto-intersections.
Ndlr. A partir d'ici, munissez-vous d'une feuille de papier, d'un crayon, et amusez-vous bien!
Par exemple, le dessin suivant montre le noeud simple T appelé par la suite noeud trivial et un noeud équivalent T' :



Bien entendu, nos dessins ne montrent que des diagrammes de noeuds, c'est-à-dire, des projections sur un plan. La figure suivante explicite trois transformations appelés aussi mouvements de Reidemeister, permettant de changer un noeud donné en un noeud équivalent :



Ils sont nommés en l'honneur de Kurt Reidemeister, qui montra en 1927 que ces trois mouvements suffisent :
Théorème **-** Deux diagrammes représentent deux noeuds équivalents si et seulement si l'on peut transformer l'un en l'autre par une suite de mouvements de Reidemeister.
Ce résultat nous arrange bien, car il réduit l'étude des noeuds à l'étude de leurs diagrammes, qui se révèlent plus maniables.
Exemple **-** Vous pouvez montrer que les noeuds C et D sont équivalents : il suffit de les relier par une suite de mouvements élémentaires. Deux bouts de ficelles pourraient aider...
Il est beaucoup plus dur de montrer que A et B sont non équivalents, c'est-à-dire « chiraux », ni équivalents à C d'ailleurs. Essayez et vous verrez... Après réflexion, il ne suffit pas d'échouer; pour une preuve il faut identifier l'obstacle.

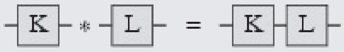
Invariants

Un invariant est une propriété qui ne change pas quand on passe d'un noeud à un noeud équivalent. Le nombre de croisements d'un diagramme, par exemple, n'est pas un invariant : il change lors d'un mouvement R1 ou R2.
Pour illustration, regardons un invariant simple mais ingénieux, inventé par Ralph Fox dans les années 1950.
Les règles du jeu sont simples. On colorie chacun des arcs (cf. glossaire) d'un diagramme avec une des trois couleurs rouge (r), bleu (b), vert (v). Seule restriction : à chaque croisement se rencontrent soit trois couleurs, soit une seule, mais jamais deux. Le résultat est appelé un tricoloriage.

Exemple **-** Avec un peu de patience vous trouverez que les diagramme A et B admettent 9 tricoloriages chacun, alors que C et D n'en admettent que 3. On peut montrer le théorème suivant :
Théorème **-** Le nombre des tricoloriages d'un diagramme ne change pas lors d'un mouvement de Reidemeister : c'est un invariant du noeud.
Grâce au thérorème précédent on en déduit alors que A et C ne peuvent pas être équivalents. Par contre, cela ne nous

dit rien sur A et B.
Ayant le langage des diagrammes à notre disposition, la preuve ne demande qu'une analyse soignée des mouvements R1, R2, R3. (Le résultat n'est pas difficile à montrer. Si vous voulez tenter l'aventure, n'hésitez pas à découvrir les arguments vous-même.)

Multiplication
On peut multiplier des noeuds comme dans la figure suivante :



Ce produit est tout à fait remarquable : il est tout à fait comparable au produit classique de nombres et admet le noeud trivial T pour élément neutre (tout comme 1 est l'élément neutre de la multiplication classique). Autrement dit, on peut très bien « calculer » avec les noeuds.
Question - Le noeud A admet-il un noeud inverse A' tel que A*A' soit équivalent au noeud trivial? (Vous trouverez la réponse à l'aide des tricoloriages.)

D'ailleurs, un noeud est dit composé s'il peut s'écrire comme produit K*L de deux noeuds non triviaux. Sinon, il est dit premier. Cette appellation n'a pas été choisie par hasard : il existe une correspondance entre les noeuds et les nombres naturels 1, 2, 3, ..., qui préserve la multiplication et qui met en correspondance noeuds premiers et nombres premiers.

Tresses
Après un bon nombre d'expériences on constate que tout noeud peut être représenté par une tresse comme suit :

Plus précisément, une tresse consiste en n brins allant de gauche à droite en s'enlaçant, mais sans jamais s'intersecter ni se retourner. Le dessin suivant montre la tresse dite triviale à trois brins ainsi qu'une tresse plus compliquée :

Comme avant les mouvements R2 et R3 engendrent l'équivalence des diagrammes de tresses (R1 ne s'applique plus). Tout comme les noeuds, les tresses peuvent être multipliées par concaténation. À nouveau le produit admet la tresse triviale comme élément neutre. Mais cette fois-ci toute tresse a admet une tresse inverse b telle que le produit a * b soit équivalent à la tresse triviale. En termes mathématiques, les tresses forment un groupe, notion très importante en mathématiques et physique.

Exemple - Une tresse à deux brins est décrite par le nombre de demi-tours que font les deux brins. Ainsi ces tresses forment un groupe comparable aux nombres entiers.
Les tresses à trois brins sont plus compliquées, néanmoins elles peuvent être représentées par des matrices, ce qui nous mène à des recherches très récentes.

Cette démarche mathématique et ses interactions avec la physique théorique ont vu un succès spectaculaire depuis les années 1980. On a ainsi découvert des liens et des structures inattendus, ainsi que de nouveaux invariants, dits quantiques, beaucoup plus puissants que les tricoloriages. Ces progrès ont énormément fait avancer notre compréhension de ces objets noués, pas si ordinaires après tout.

M. Eisermann

JONGLAGE TOPOLOGIQUE

Prenez une corde d'environ 5mm d'épaisseur et au moins 1,5m de long, puis attachez au bout une balle de tennis, ou un autre contrepoids convenable. Maintenant, en ne tenant que le bout libre de la corde, effectuez un geste pour que la balle saute et produise un noeud.
Ce n'est pas facile, mais on peut y arriver... Me contacter pour des astuces de bricolage ou d'entraînement. (En aucun cas l'auteur ne sera tenu responsable d'éventuels dégâts. Ne commencez pas lorsque vous êtes entouré d'objets fragiles ou d'âmes sensibles.)
Question maths. --- Supposons que vous avez produit le noeud A. (Félicitations!) Pouvez-vous le faire disparaître par un geste similaire? (Voir l'article.)

GLOSSAIRE

Arc (d'un noeud) :
En mathématiques, un arc relie deux sommets d'un graphe. Dans notre cas, le graphe est un diagramme de noeud et les sommets en sont les intersections. Un arc de noeud est un parcours de la "corde" qui relie deux sommets de nature identique (dessus/dessous). On ne tient pas compte des extrémités du noeud.

CONSEILS DE LECTURE

Alexei Sossinsky, *Noeuds : Genèse d'une théorie mathématique*, Editions du Seuil, Paris 1999.

Charles Livingston, *Knot theory*, Carus mathematical monographs, Washington 1993.

L'AUTEUR

Originaire de Wiesbaden en Allemagne, j'ai étudié mathématiques et physique à Oldenburg puis à Bonn, en passant par Edinburgh et Strasbourg. J'ai enseigné pendant deux ans à l'ENS Lyon, avant d'obtenir en 2002 un poste de Maître de Conférences à Grenoble, au sein de l'équipe de topologie à l'Institut Fourier. Mes recherches portent sur la topologie en petite dimension, notamment les noeuds, les tresses, et les espaces de dimension trois. J'aime jongler non seulement avec des objets mathématiques, mais aussi avec des boules, des quilles ou des torches. Lors de la Fête de la Science j'ai même jonglé avec des noeuds (cf. photo sur le jonglage topologique).

Michael Eisermann
Institut Fourier
michael.eisermann@ujf-grenoble.fr

Le gluon, pourquoi pas vous ?
Si comme les auteurs de ce numéro vous souhaitez faire connaître vos recherches, vous êtes les bienvenus !
contact : nicolas.arnaud@imag.fr

LE GLUON

Comité de rédaction
Nicolas Arnaud, Laurence Bolling, Emilie Demarsy, Alexandre Donzé, Gaël Le Bec, Céline Lopez-Velasco, Maud-Alix Mader, Julie Regaud-Six.
Directeur du CIES
Didier Retour
Chargée culture scientifique UJF
Isabelle Joncour
Directeur de la publication
Patrice Gadelle
Contact
Nicolas.Arnaud@imag.fr
Impression
Imprimerie des Ecureuils
Nombre d'exemplaires
2000
ISSN (demande en cours)
Publication mensuelle réalisée par un groupe de doctorants et de moniteurs (atelier de 3ème année du CIES)