MÉMOIRE

SUR LA RÉSOLUTION

DES

ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

MÉMOIRE
SUR LA RÉSOLUTION
DES
ÉQUATIONS NUMÉRIQUES,

PAR C. STURM.

La résolution des équations numériques est une question qui n'a pas cessé d'occuper les géomètres, depuis l'origine de l'Algèbre jusqu'à nos jours. Nous ne rappellerons pas tous les procédés qui ont été proposés pour la détermination des racines réelles des équations. Lagrange, le premier, a donné pour cet objet une méthode rigoureuse; elle consiste à substituer dans l'équation, à la place de l'inconnue, une suite de nombres croissant depuis la limite supérieure des racines négatives jusqu'à celle des racines positives, et tellement choisis, qu'entre chaque nombre substitué et le suivant, il ne puisse tomber qu'une seule racine de l'équation; les changemens de signe qu'on obtient dans la suite des résultats indiquent quels sont ceux de ces nombres qui comprennent effectivement une racine. On remplit la condition qu'il ne puisse tomber qu'une racine entre un nombre substitué et celui qui le surpasse immédiatement, en substituant des nombres formant une progression arithmétique, dont la raison soit une quantité moindre que la plus petite des différences qui existent entre les racines réelles de l'équation proposée. On parvient à déterminer une telle quantité, en formant une équation auxiliaire dont l'inconnue a pour valeurs les carrés des différences entre les racines de la proposée, et cherchant une limite inférieure des racines positives de cette nouvelle équation; la racine carrée de cette limite ou toute quantité moindre peut être prise pour l'intervalle des substitutions successives qu'il faut effectuer dans l'équation.

Cette méthode, considérée sous un point vue purement théorique, ne laisse rien à désirer du côté de la rigueur. Mais, dans l'application, la longueur des calculs nécessaires pour former l'équation aux carrés des différences, et la multitude des substitutions qu'on peut avoir à effectuer, la rendent presque impraticable; et quoique Lagrange y ait apporté quelques simplifications, les calculs qu'elle exige sont toujours très pénibles; aussi l'on a essayé d'autres solutions. Fourier a découvert un théorème qui renferme comme corollaire *la règle des signes de Descartes*, et à l'aide duquel on peut reconnaître qu'une équation n'a aucune racine entre deux limites données, ou bien que le nombre des racines comprises entre ces limites ne peut pas surpasser un certain nombre facile à déterminer. Mais ce théorème ne donnant pas précisément le nombre de ces racines, on peut être exposé, en l'appliquant, à chercher des racines dans des intervalles où il n'en existe pas, de sorte que de nouvelles règles sont nécessaires pour faire disparaître cette incertitude.

Le théorème dont le développement est l'objet de ce Mémoire a beaucoup d'analogie avec celui de Fourier. Il fournit un moyen sûr de connaître combien une équation a de racines réelles comprises entre deux nombres quelconques; cette connaissance suffit pour conduire à la détermination effective de toutes les racines réelles, sans qu'on soit obligé de recourir à l'équation aux carrés des différences.

1.

Soit

$$Nx^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots + Tx + U = 0$$

une équation numérique d'un degré quelconque, dont on se propose de déterminer toutes les racines réelles.

On commencera par exécuter sur cette équation le calcul qui sert à trouver si elle a des racines égales, en opérant de la manière que nous allons indiquer. En désignant par V la fonction entière $Nx^m + Px^{m-1} +$ etc., et par V_1 sa fonction dérivée (qui se forme en multipliant chaque terme de V par l'exposant de x dans ce terme et diminuant cet exposant d'une unité), il faut chercher le plus grand commun diviseur des deux polynomes V et V_1. On divisera d'abord V par V_1, et quand on sera arrivé à un reste d'un degré inférieur à celui du diviseur V_1, on changera les signes de tous les termes de ce reste (les signes + en — et les — en +). Désignons par V_2 ce que deviendra ce reste après ce changement de signes. On divisera de la même manière V_1 par V_2, et, après avoir encore changé les signes du reste, on aura un nouveau polynome V_3 d'un degré inférieur à celui de V_2. La division de V_2 par V_3 conduira de même à une fonction V_4 qui sera le reste de cette division où l'on aura changé les signes. On continuera cette série de divisions, en ayant toujours soin de changer les signes des termes de chaque reste. Ce changement de signes qui serait inutile si l'on n'avait pour but que de trouver le plus grand commun diviseur des polynomes V et V_1 est nécessaire dans la théorie que nous exposons. Comme les degrés des restes successifs vont en diminuant, on arrivera finalement soit à un reste numérique indépendant de x et différent de zéro, soit à un reste fonction de x qui divisera exactement le reste précédent. Nous examinerons ces deux cas séparément.

2.

Supposons, en premier lieu, qu'on parvienne après un certain nombre de divisions à un reste numérique qui soit désigné par V_r.

Dans ce cas, on est assuré que l'équation $V = 0$ n'a pas de racines égales, puisque les polynomes V et V_1 n'ont pas de diviseur commun fonction de x. En représentant par Q_1, Q_2,.. Q_{r-1}.. les quotiens donnés par les divisions successives qui laissent pour restes $-V_2$, $-V_3$, ... $-V_r$, on a cette suite d'égalités

$$\left.\begin{array}{l} V = V_1Q_1 - V_2 \\ V_1 = V_2Q_2 - V_3 \\ V_2 = V_3Q_3 - V_4 \\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ V_{r-2} = V_{r-1}Q_{r-1} - V_r. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Cela posé, la considération de ce système de fonctions $V, V_1, V_2, \ldots V_r$ fournit un moyen sûr et facile de connaître *combien l'équation* $V = 0$ *a de racines réelles comprises entre deux nombres* A *et* B *de grandeurs et de signes quelconques*, B *étant plus grand que* A. Voici la règle qui remplit cet objet :

On substituera à la place de x le nombre A *dans toutes les fonctions* $V, V_1, V_2, \ldots V_{r-1}, V_r$, *puis on écrira par ordre sur une même ligne les signes des résultats, et l'on comptera le nombre de variations qui se trouveront* *dans cette suite de signes. On écrira de même la suite des signes que prendront ces mêmes fonctions, par la substitution de l'autre nombre* B, *et l'on comptera le nombre des variations qui se trouveront dans cette seconde suite. Autant elle aura de variations de moins que la première, autant l'équation* $V = 0$ *aura de racines réelles comprises entre les deux nombres* A *et* B. *Si la seconde suite a autant de variations que la première, l'équation* $V = 0$ *n'aura aucune racine entre* A *et* B. *D'ailleurs,* B *étant plus grand que* A, *la seconde suite ne peut pas avoir plus de variations que la première.*

3.

Nous allons démontrer ce théorème, en examinant comment le nombre des variations formées par les signes des fonctions V, V_1, V_2..,V_r, pour une valeur quelconque de x, peut s'altérer, quand x passe par différens états de grandeur.

Quels que soient les signes de ces fonctions pour une valeur de x déterminée, lorsque x croît par degrés insensibles au-delà de cette valeur, il ne peut arriver de changement dans cette suite de signes qu'autant qu'une des fonctions V, V_1... change de signe et par conséquent devient nulle. Il y a donc deux cas à examiner, selon que la fonction qui s'évanouit est la première V, ou quelqu'une des autres fonctions V_1, V_2,.. V_{r-1} *intermédiaires* entre V et V_r; la dernière V_r ne peut pas changer de signe, puisque c'est un nombre positif ou négatif.

4.

Voyons, premièrement, quelle altération éprouve la suite des signes, lorsque x, en croissant d'une manière continue, atteint et dépasse une valeur qui annulle la première fonction V. Désignons cette valeur par c. La fonction V_1, dérivée de V, ne peut pas être nulle en même temps que V pour $x = c$; car, par hypothèse, l'équation $V = 0$ n'a pas de racines égales. On voit d'ailleurs d'après les équations (1), sans s'appuyer sur la théorie des racines égales, que si les deux fonctions V et V_1 étaient nulles pour $x = c$, toutes les autres fonctions $V_2, V_3 \ldots$ et enfin V_r seraient nulles en même temps. Or, au contraire, V_r est par hypothèse un nombre différent de zéro. V_1 a donc pour $x = c$ une valeur différente de zéro, positive ou négative.

Considérons des valeurs de x très peu différentes de c. Si, en désignant par u une quantité positive, aussi petite qu'on voudra, on fait tour à tour $x = c - u$ et $x = c + u$, la fonction V_1 aura pour ces deux valeurs de x le même signe qu'elle a pour $x = c$; car on peut prendre u assez petit pour que V_1 ne s'évanouisse pas et ne change pas de signe, tandis que x croît depuis la valeur $c - u$ jusqu'à $c + u$.

Il faut maintenant déterminer le signe de V pour $x = c + u$. Désignons pour un moment V par $f(x)$, V_1 par $f'(x)$, et les autres fonctions dérivées de V par $f''(x)$, $f'''(x) \ldots f^{(m)}(x)$, suivant la notation usitée. Lorsqu'on fait $x = c + u$, V devient $f(c + u)$. Or on

$$f(c+u)=f(c)+f'(c)u+\frac{f''(c)}{1.2}u^2+\frac{f'''(c)}{1.2.3}u^3+\text{etc.}$$

ou bien, en observant que $f(c)$ est zéro, et que $f'(c)$ ne l'est pas,

$$f(c+u)=u.\left[f'(c)+\frac{f''(c)}{1.2}u+\frac{f'''(c)}{1.2.3}u^2+\ldots\right]$$

On voit, d'après cette expression de $f(c+u)$, qu'en attribuant à u des valeurs positives très petites, $f(c+u)$ aura le même signe que $f'(c)$, et par conséquent $f(c+u)$ aura aussi le même signe que $f'(c+u)$, puisque $f'(c+u)$ a le même signe que $f'(c)$. Ainsi V a le même signe que V_1 pour $x=c+u$.

En changeant u en $-u$ dans la formule précédente, on a

$$f(c-u) = -u\left[f'(c) - \frac{f''(c)}{1 \cdot 2}u + \text{etc.}\right],$$

et l'on voit de même que $f(c-u)$ a un signe contraire à celui de $f'(c)$; d'où il suit que, pour $x=c-u$, le signe de V est contraire à celui de V_1.

Donc, si le signe de $f'(c)$ ou de V_1 pour $x=c$ est $+$, le signe de V sera $+$ pour $x=c+u$ et $-$ pour $x=c-u$. Si au contraire le signe de V_1 est $-$ pour $x=c$, celui de V sera $-$ pour $x=c+u$ et $+$ pour $x=c-u$. D'ailleurs V_1 a pour $x=c+u$ et pour $x=c-u$ le même signe qu'il a pour $x=c$.

Ces résultats sont indiqués dans le tableau suivant :

	V	V_1		V	V_1
pour $x=c-u$	$-$	$+$		$+$	$-$
pour $x=c$	0	$+$	ou bien	0	$-$
pour $x=c+u$	$+$	$+$		$-$	$-$

Ainsi, lorsque la fonction V s'évanouit, le signe de V forme avec le signe de V_1 une variation, avant que x atteigne la valeur c qui annulle V, et cette variation est changée en une permanence après que x a dépassé cette valeur.

Quant aux autres fonctions V_2, V_3, etc., chacune aura, comme V_1, soit pour $x=c+u$, soit pour $x=c-u$, le même signe qu'elle a pour $x=c$, si toutefois aucune ne s'évanouit pour $x=c$, en même temps que V.

La suite des signes des fonctions $V, V_1, V_2, .. V_r$, perd donc une variation, lorsque x en croissant dépasse une valeur c qui annulle la première fonction V, sans annuler aucune des autres fonctions V_1, V_2, etc. Il faut maintenant examiner ce qui arrive lorsqu'une de ces fonctions s'évanouit.

5.

Soit V_n une fonction intermédiaire entre V et V_r, qui s'annulle quand x devient égal à b. Cette valeur de x ne peut réduire à zéro, ni la fonction V_{n-1} qui précède immédiatement V_n, ni la fonction V_{n+1} qui suit V_n. En effet, on a entre les trois fonctions V_{n-1}, V_n, V_{n+1}, l'équation suivante qui est l'une des équations (1)

$$V_{n-1} = V_n Q_n - V_{n+1},$$

Elle prouve que si les deux fonctions consécutives V_{n-1}, V_n, étaient nulles pour la même valeur de x, V_{n+1} serait nul en même temps; et comme on a aussi

$$V_n = V_{n+1} Q_{n+1} - V_{n+2},$$

on aurait encore $V_{n+2} = 0$, et ainsi de suite; de sorte qu'on aurait enfin $V_r = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Les deux fonctions V_{n-1} et V_{n+1} ont donc pour $x = b$ des valeurs différentes de zéro; en outre, ces valeurs sont de signes contraires; car la même équation

$$V_{n-1} = V_n Q_n - V_{n+1}$$

donne $V_{n-1} = - V_{n+1}$ lorsqu'on a $V_n = 0$.

Cela posé, substituons à la place de x deux nombres $b - u$ et $b + u$, très peu différens de b; les deux fonctions

V_{n-1} et V_{n+1} auront pour ces deux valeurs de x les mêmes signes qu'elles ont pour $x = b$, puisqu'on peut toujours prendre u assez petit pour que ni V_{n-1} ni V_{n+1} ne change de signe quand x croît dans l'intervalle de $b - u$ à $b + u$. Quel que soit le signe de V_n pour $x = b - u$, comme il est placé dans la suite des signes entre ceux de V_{n-1} et de V_{n+1} qui sont contraires, les signes de ces trois fonctions consécutives V_{n-1}, V_n, V_{n+1} pour $x = b - u$ formeront toujours, soit une permanence suivie d'une variation, soit une variation suivie d'une permanence, comme on le voit ici :

	V_{n-1}	V_n	V_{n+1}		V_{n-1}	V_n	V_{n+1}
pour $x = b - u$	$+$	$\pm$	$-$	ou bien	$-$	$\pm$	$+$

Pareillement, les signes de ces trois fonctions V_{n-1}, V_n, V_{n+1} pour $x = b + u$, quel que soit celui de V_n, formeront une variation, et n'en formeront qu'une.

D'ailleurs, chacune des autres fonctions aura un même signe pour $x = b - u$ et $x = b + u$, pourvu qu'aucune ne se trouve nulle pour $x = b$ en même temps que V_n.

Conséquemment, la suite des signes de toutes les fonctions $V, V_1, \ldots V_r$ pour $x = b + u$ contiendra précisément autant de variations que la suite de leurs signes pour $x = b - u$. Ainsi, le nombre des variations dans la suite des signes n'est pas changé, quand une fonction intermédiaire quelconque passe par zéro.

On arriverait évidemment à la même conclusion, si plusieurs fonctions intermédiaires non consécutives s'évanouissaient pour la même valeur de x. Mais si cette valeur annullait aussi la première fonction V, le changement de signe de celle-ci ferait alors disparaître une variation sur la gauche de la suite des signes, ainsi que nous l'avons fait voir n° 4.

6.

Il est donc démontré que chaque fois que la variable x, en croissant par degrés insensibles, atteint et dépasse une valeur qui rend V égal à zéro, la suite des signes des fonctions V, V_1, V_2, ... V_r perd une variation formée sur sa gauche par les signes de V et V_1, laquelle est remplacée par une permanence; tandis que les changemens de signes des fonctions intermédiaires V_1, V_2, ... V_{r-1} ne peuvent jamais ni augmenter ni diminuer le nombre des variations qui existaient déjà. En conséquence, si l'on prend un nombre quelconque A positif ou négatif, et un autre nombre quelconque B plus grand que A, et si l'on fait croître x depuis A jusqu'à B, autant il y aura de valeurs de x comprises entre A et B, qui rendront V égal à zéro, autant la suite des signes des fonctions V, V_1, ... V_r pour $x = B$ contiendra de variations de moins que la suite de leurs signes pour $x = A$. C'est le théorème qu'il fallait démontrer.

Pour en faciliter les applications, il est nécessaire d'ajouter plusieurs remarques à ce qui précède.

7.

Dans les divisions successives qui servent à former les fonctions V_2, V_3, etc., on peut, avant de prendre un polynome pour dividende ou pour diviseur, le multiplier ou le diviser par tel nombre positif qu'on voudra. Les fonctions V, V_1, V_2, ... V_r qu'on obtiendra en opérant ainsi, ne différeront que par des facteurs numériques positifs, de celles que nous avons considérées précédemment et qui figurent dans les équations (1); de sorte qu'elles auront respectivement les mêmes signes que celles-ci pour chaque valeur de x.

Avec cette modification on peut, lorsque les coefficiens de l'équation $V = 0$ sont des nombres entiers, former des polynomes V_2, V_3, etc., dont tous les coefficiens seront aussi entiers; mais il faut bien prendre garde que les facteurs numériques qu'on introduit ou qu'on supprime soient toujours positifs.

8.

Il peut arriver que l'une des fonctions $V_1, V_2, \ldots V_{r-1}$ se trouve nulle, soit pour $x = A$, soit pour $x = B$. Dans ce cas, il suffit de compter les variations qui se trouvent dans la suite des signes des fonctions V, V_1, $V_2, \ldots V_r$ en omettant la fonction qui est nulle. C'est ce qui résulte de la démonstration que nous avons donnée n° 5 pour le cas où une fonction intermédiaire s'évanouit. En effet, on a vu que, lorsque V_n s'annulle pour $x = b$, si l'on attribue à x une valeur $b - u$ ou $b + u$ très peu différente de b, les signes des trois fonctions consécutives V_{n-1}, V_n, V_{n+1} forment une variation, et n'en forment qu'une; or cette variation subsistera encore lorsqu'on fera $x = b$, et qu'on omettra dans la suite des signes le résultat o placé entre les deux signes contraires de V_{n-1} et de V_{n+1}.

Si V se trouve nul pour $x = A$, on en conclut d'abord que A est racine de l'équation $V = 0$, puis on attribue à x une valeur $A + u$ qui surpasse A d'une quantité aussi petite qu'on voudra; pour cette valeur $A + u$, le signe de V forme avec le signe de V_1 une permanence comme on l'a vu n° 4, tandis que dans le reste de la suite des signes, depuis V_1 jusqu'à V_r, il y a le même nombre de variations que pour $x = B$. On trouvera donc par la règle générale combien l'équation $V = o$ a de racines comprises entre $A + u$ et B, c'est-à-dire plus grandes que A et plus petites que B.

De même si B est racine de l'équation $V = o$, on déterminera par la même règle le nombre de ses racines comprises entre A et $B - u$, en observant que pour $x = B - u$ le signe de V forme avec celui de V_1 une variation (n° 4), et que dans le reste de la suite des signes depuis V_1 jusqu'à V_r il y a autant de variations que pour $x = B$.

9.

Quand on pourra reconnaître qu'une des fonctions auxiliaires, V_n, intermédiaire entre V et V_r, conserve constamment le même signe pour toutes les valeurs de x comprises entre A et B, il ne sera point nécessaire de considérer les fonctions qui suivent V_n; il suffira de substituer ces deux nombres A et B dans les fonctions des degrés supérieurs $V, V_1, V_2,..$ en s'arrêtant à V_n, et d'écrire les signes des résultats. *Autant la suite des signes des fonctions* $V, V_1, V_2,..$ *jusqu'à* V_n *inclusivement, pour* $x = A$, *présentera de variations de plus que celle pour* $x = B$, *autant il y aura de racines de l'équation* $V = o$ *comprises entre* A *et* B.

En effet, on peut appliquer au système partiel des fonctions $V, V_1, V_2,..V_n$, la démonstration que nous avons donnée plus haut pour le système complet des fonctions $V, V_1, V_2.., V_n, V_{n+1},..V_r$, dont la dernière était un nombre constant. Dans l'hypothèse actuelle V_n conserve toujours le même signe, sans avoir une valeur constante, pour toutes les valeurs de x croissant depuis A jusqu'à B. Or, comme on l'a vu n[os] 4 et 5, la suite des signes de ces fonctions $V, V_1, V_2 \ldots, V_n$ perd une variation chaque fois que V devient nul, et l'évanouissement des fonctions intermédiaires entre V et V_n ne peut ni augmenter ni diminuer le nombre des variations; donc autant l'équation $V = 0$ aura de racines comprises entre A et B, autant le nombre B substitué dans les fonctions $V, V_1, V_2 \ldots, V_n$ donnera de variations de moins que A; ce qu'il fallait prouver.

10.

On voit encore que si V_n ne change pas de signe, quand x croît depuis A jusqu'à B, on obtiendra constamment le même nombre de variations en substituant, soit A, soit B, soit tout autre nombre compris entre A et B dans la suite partielle des fonctions $V_n, V_{n+1} \ldots, V_r$. Mais il ne faut pas croire que réciproquement, si les deux nombres A et B substitués dans ces fonctions, donnent le même nombre de variations, V_n doive toujours conserver le même signe pour toutes les valeurs de x croissant depuis A jusqu'à B. Cette proposition inverse n'a lieu qu'autant que les fonctions V_n, $V_{n+1} \ldots$ remplissent certaines conditions que nous ne croyons pas devoir exposer ici. Nous dirons seulement qu'elle a lieu en particulier, lorsque les degrés respectifs de ces fonctions V_n, V_{n+1}, $V_{n+2} \ldots$ vont en diminuant d'une unité, et qu'en outre le premier terme de chacune est positif. Nous développerons dans un autre Mémoire cette propriété et plusieurs autres dont jouissent certaines classes d'équations.

11.

Notre théorème, modifié comme nous venons de le dire n° 9, sera souvent d'une application plus facile. Ainsi, lorsqu'en cherchant le plus grand commun diviseur de V et de V_1, on parviendra à un polynome V_n (par exemple à celui du second degré) qui égalé à zéro ne donnera que des valeurs imaginaires de x, il ne sera pas nécessaire de pousser plus loin les divisions, car ce polynome V_n sera constamment de même signe que son premier terme pour toutes les valeurs réelles de x, de sorte qu'on pourra le prendre pour la dernière des fonctions auxiliaires V_1, V_2, etc. On pourrait même encore s'arrêter à un polynome V_n qui s'annullerait pour des valeurs réelles de x, pourvu qu'on pût déterminer toutes ces valeurs. Car en désignant par p, q, r,.. celles qui seraient comprises entre A et B, après les avoir disposées par ordre de grandeur, en commençant par les plus petites, et observant que V_n conserve le même signe pour toutes les valeurs de x comprises entre A et p, on trouverait, par l'application du théorème, modifié comme dans les n^{os} 8 et 9, combien l'équation $V=0$ a de racines entre A et $p-u$, u étant une très petite quantité; de même, V_n ayant encore un signe constant pour toutes les valeurs de x comprises entre p et q, on trouverait combien $V=0$ a de racines entre $p+u$ et $q-u$, c'est-à-dire entre p et q, en prenant u suffisamment petit; on reconnaîtrait de même combien $V=0$ a de racines entre q et r, et ainsi de suite. On suppose ici que l'équation $V=0$ n'a pas de racines égales, et qu'une valeur de x qui annulle V_n n'annulle pas V en même temps.

Ces circonstances où l'on peut diminuer le nombre des fonctions auxiliaires méritent d'être remarquées; car les calculs nécessaires pour la détermination des fonctions V_2, V_3,... sont très longs, surtout lorsqu'on arrive aux dernières fonctions, à cause de la grandeur de leurs coefficiens numériques.

12.

Le théorème général donne le moyen de connaître le nombre total des racines réelles de l'équation $V=0$. En effet, étant donné un polynome fonction entière de x, on peut toujours, sans connaître les valeurs de x qui l'annullent, assigner à x une valeur positive finie telle que, pour cette valeur et pour toutes les valeurs plus grandes, le polynome aura constamment le même signe que son premier terme; il en est de même pour toutes les valeurs de x négatives au-delà d'une certaine limite. Donc, si l'on représente selon l'usage par le caractère ∞ un nombre aussi grand qu'on voudra, toutes les racines réelles de l'équation $V=0$ étant comprises entre $-\infty$ et $+\infty$, il suffira pour en connaître le nombre, de substituer $-\infty$ et $+\infty$ au lieu de A et B dans les fonctions $V, V_1, V_2, .. V_r$ et de marquer les deux suites de signes pour $-\infty$ et $+\infty$. Quand on fait $x=+\infty$, chaque fonction est de même signe que son premier terme. Pour $x=-\infty$ chaque fonction de degré pair, y compris la constante V_r, a le même signe qu'elle a pour $x=+\infty$, mais chaque fonction de degré impair prend pour $x=-\infty$ un signe contraire à celui qu'elle a pour $x=+\infty$. L'excès du nombre des variations formées par les signes des fonctions $V, V_1, .. V_r$, pour $x=-\infty$, sur le nombre des variations pour $x=+\infty$, exprimera le nombre total des racines réelles de l'équation $V = 0$.

13.

Mais on peut faire usage d'une règle encore plus simple, pour déterminer le nombre des racines réelles et celui des racines imaginaires dans la plupart des équations.

Les fonctions auxiliaires V_1, V_2, etc., sont ordinairement en nombre égal au degré m de l'équation $V = 0$, parce que dans la recherche du plus grand commun diviseur de V et de V_1, chaque reste est ordinairement d'un degré inférieur d'une seule unité à celui du reste précédent. Toutes les fois que les fonctions V_1, V_2, etc., sont effectivement en nombre égal à m, on peut connaître le nombre des racines imaginaires de l'équation $V = 0$ par la simple inspection des signes des premiers termes de ces fonctions $V_1, V_2, ..$ y compris le signe de la dernière, qui ne contient plus x et qui doit être actuellement représentée par V_m. *L'équation* $V = 0$ *a autant de couples de racines imaginaires qu'il y a de variations dans la suite des signes des premiers termes des fonctions* V_1, V_2, *etc., jusqu'au signe de la constante* V_m *inclusivement.* Voici la démonstration de cette proposition.

Il résulte de l'hypothèse qu'on vient d'admettre, que deux fonctions consécutives V_{n-1} V_n, sont l'une de degré pair, l'autre de degré impair. Donc si ces deux fonctions ont un même signe pour $x = +\infty$, elles auront des signes contraires pour $x = -\infty$; *et vice versâ*, si elles ont des signes contraires pour $x = +\infty$, elles auront un même signe $x = -\infty$: de sorte que si l'on écrit l'une au-dessous de l'autre les deux suites de signes des fonctions $V, V_1, V_2, .. V_m$ pour $x = -\infty$ et pour $x = +\infty$, chaque variation dans l'une quelconque de ces deux suites correspondra à une permanence dans l'autre suite; ainsi le nombre des permanences pour $x = -\infty$ est égal au nombre des variations pour $x = +\infty$.

Soit i le nombre des variations pour $x = +\infty$, i pouvant être zéro. Ces variations sont celles que présente la suite des signes des coefficiens qui multiplient les plus hautes puissances de x dans les fonctions auxiliaires $V_1, V_2, .. V_m$, le premier terme de V et celui de V_1 étant positifs.

On vient de voir que la suite des signes pour $x = -\infty$ doit contenir i permanences; elle contiendra donc $m - i$ variations, puisque les fonctions $V, V_1, .. V_m$ sont au nombre de $m + 1$, et que dans une suite de $m + 1$ signes, le nombre des variations et celui des permanences réunis font une somme égale à m.

Or, en vertu du théorème général, le nombre des racines réelles de l'équation $V = 0$ toutes comprises entre $-\infty$ et $+\infty$, doit être égal à l'excès du nombre $m - i$ des variations pour $x = -\infty$ sur le nombre i des variations pour $x = +\infty$. L'équation $V = 0$ a donc $m - 2i$ racines réelles et par conséquent $2i$ racines imaginaires; on sait d'ailleurs que celles-ci forment des couples de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$; ainsi le nombre de ces couples est égal à i; ce qu'il fallait démontrer.

14.

En supposant $i = 0$, on conclut de là le corollaire suivant : *le premier terme de* V *et celui de* V_1 *étant positifs, si les autres fonctions* V_2, V_3 *etc., y compris celle qui ne contient plus* x *sont au nombre de* $m - 1$, *et si elles ont* *toutes un premier terme positif, l'équation* $V=0$ *aura toutes ses racines réelles.*

Réciproquement, *si l'équation* $V=0$ *a toutes ses racines réelles, il faut nécessairement que les fonctions auxiliaires* V_2, V_3.. *jusqu'à celle qui ne contient plus* x *inclusivement, soient au nombre de* $m-1$, (ou, *en d'autres termes, que chacune de ces fonctions soit d'un degré inférieur d'une seule unité à celui de la précédente*) *et qu'en outre leurs premiers termes soient tous positifs.*

En effet, si le nombre des fonctions V_2, V_3, etc., était plus petit que $m-1$, la suite des signes des fonctions V, V_1, V_2, etc., pour $x=-\infty$ aurait un nombre de variations plus petit que m; or, au contraire, elle doit avoir m variations de plus que la suite des signes pour $x=+\infty$, si l'équation $V=0$ a toutes ses racines réelles. Il faut donc d'abord que le nombre des fonctions V_2, V_3.. soit $m-1$, en outre le coefficient de la plus haute puissance de x dans chacune d'elles doit être positif, comme dans V et dans V_1; car, autrement, il y aurait une ou plusieurs variations dans la suite des signes des fonctions V, V_1, V_2.. pour $x=+\infty$ et l'équation $V=0$ aurait des couples de racines imaginaires en nombre égal à celui de ces variations.

Lorsque les coefficiens de l'équation $V=0$ sont indéterminés et représentés par des lettres, les polynomes V_2, V_3, etc., qu'on obtient par la recherche du plus grand commun diviseur de V et de V_1 sont respectivement des degrés $m-2$, $m-3$, etc., et les coefficiens des plus hautes puissances de x dans ces polynomes, en y comprenant V_m, sont des quantités littérales composées des coefficiens de l'équation $V=0$. Les conditions de la réalité de toutes les racines de cette équation $V=0$ se réduisent donc à ce que toutes ces quantités soient positives, aucune n'étant nulle. On voit que le nombre de ces conditions n'est pas plus grand que $m - 1$; mais il peut être moindre, parce-que quelques-unes peuvent être comprises dans les autres.

15.

L'usage de notre théorème pour la recherche des racines réelles d'une équation $V = 0$ qui n'a pas de racines égales, se présente de lui-même.

Après avoir obtenu les fonctions V_2, V_3.. jusqu'à V_r qui ne contient plus x, on détermine en premier lieu le nombre total des racines réelles de l'équation, en écrivant les signes de ces fonctions $V, V_1, .. V_r$ pour $x = -\infty$ et pour $x = +\infty$, comme on l'a dit n° 12 ou bien en appliquant la règle du n° 13 dans le cas ordinaire où les fonctions auxiliaires V_2, V_3... etc., sont au nombre de $m - 1$.

Pour trouver les racines positives, on substitue à la place de x une suite de nombres croissans 0, A, B, C, D, etc., dans les fonctions $V, V, .. V_{r1}$, et l'on écrit la suite des signes des résultats que donne chaque nombre substitué; le nombre des variations perdues en passant de la suite des signes que donne un nombre substitué à celle que donne le nombre suivant, exprime, en vertu du théorème, combien l'équation $V = 0$ a de racines comprises entre ces deux nombres-là. On trouve ainsi quels sont ceux qui comprennent des racines et combien ils en comprennent.

Pour ne pas faire des substitutions inutiles, il faut s'arrêter dès qu'on arrive à un nombre qui donne autant de variations qu'en donnerait un nombre infiniment grand, c'est-à-dire autant de variations qu'il s'en trouve dans la suite des signes des premiers termes des polynomes $V, V_1, V_2, .. V_r$ (en comptant V_r). Un tel nombre est une limite supérieure des racines de l'équation, puisque entre ce nombre et $+\infty$ il ne peut pas exister de racines.

Admettons qu'il y ait plusieurs racines entre A et B; alors on substituera un nombre intermédiaire ou plusieurs; et les variations perdues en passant d'un nombre substitué à celui qui le surpasse immédiatement, indiqueront toujours l'existence d'autant de racines comprises entre eux.

Il pourra se faire que quelques substitutions suffisent pour opérer complètement la séparation des racines, c'est-à-dire pour assigner à chacune d'elles deux limites entre lesquelles elle soit seule comprise. Mais quand des racines seront très rapprochées, on sera obligé de faire un plus grand nombre de substitutions pour les séparer. Au surplus, on verra bientôt que cette séparation n'est pas indispensable pour le calcul des racines, et qu'il suffit d'avoir la partie entière de chacune. En substituant des nombres négatifs dans les fonctions $V, V_1, .. V_r$, ou ce qui revient au même, en y substituant des nombres positifs après avoir changé dans toutes x en $-x$, on trouvera de la même manière entre quels nombres tombent les racines négatives.

Ces substitutions peuvent être effectuées de telle sorte, qu'on obtienne d'abord le chiffre de l'ordre le plus élevé de chaque racine, puis le chiffre de l'ordre immédiatement inférieur, et ainsi de suite.

16.

On peut ainsi déterminer la valeur approchée de chaque racine, à une unité près ou même à une certaine fraction près; il reste à calculer sa partie inconnue par une méthode d'approximation plus rapide. On peut ici employer celle de Newton ou celle de Lagrange.

On sait qu'il y a des cas où la première se trouve en défaut; alors il vaut mieux se servir de celle de Lagrange, à laquelle notre théorème donne le complément dont elle avait besoin, comme nous allons l'expliquer.

L'usage de cette méthode suppose que la racine qu'on veut calculer, soit seule comprise entre deux nombres entiers consécutifs; on ramène aisément à ce cas, par une transformation, celui où une racine est seule comprise entre deux limites connues. Mais lorsqu'une équation a des racines qui diffèrent entre elles de quantités très petites, on ne parvient à obtenir deux limites de chacune qu'après des substitutions multipliées, qui exigent de longs calculs. Or, on peut éviter cet inconvénient, en combinant notre théorème avec la méthode de Lagrange.

Il s'agit de calculer les racines de l'équation $V=0$ qui sont comprises entre les deux nombres entiers consécutifs a et $a+1$. Si le théorème indique que ces deux nombres ne comprennent qu'une seule racine, on fait, suivant le procédé connu, $x=a+\frac{1}{y}$ dans l'équation $V=0$, et comme l'inconnue y ne doit avoir qu'une seule valeur positive plus grande que l'unité, on substitue, dans l'équation transformée en y, à la place de y les nombres entiers $1, 2, 3, 4,$.. jusqu'à ce qu'on arrive à deux nombres consécutifs b et $b+1$, qui donnent des résultats de signes contraires; ces nombres comprennent la valeur cherchée de y; on fait ensuite $y=b+\frac{1}{z}$ dans l'équation en y, z n'ayant aussi qu'une seule valeur positive plus grande que 1; on cherche de même sa partie entière c en substituant les nombres $1, 2, 3,$... et en continuant ainsi on obtient la valeur de x exprimée par la fraction continue

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\text{etc.}}}$$

Supposons actuellement que le théorème indique l'existence de plusieurs racines entre les deux nombres entiers a et $a+1$. On fait encore $x=a+\frac{1}{y}$ dans l'équation $V=0$; l'inconnue y devant avoir autant de valeurs positives plus grandes que l'unité que x a de valeurs entre a et $a+1$, la simple substitution des nombres naturels 1, 2, 3, 4,.. dans l'équation transformée en y, ne suffirait pas généralement pour faire découvrir toutes ces valeurs de y, puisque deux ou plusieurs valeurs de y peuvent avoir la même partie entière. C'est pourquoi l'on doit remplacer x par $a+\frac{1}{y}$ non-seulement dans la fonction V, mais aussi dans les fonctions auxiliaires V_1, V_2, etc., en s'arrêtant à une fonction V_n, dont on soit certain que le signe reste le même pour toutes les valeurs de x comprises entre a et $a+1$.

Les polynomes V, V_1, V_2, ... V_n étant ainsi transformés en fonction de y, on y substitue à la place de y les nombres entiers 1, 2, 3, 4, ... et l'on écrit la suite des signes que donne chaque nombre substitué. La différence entre les deux nombres de variations que donnent deux nombres entiers consécutifs b et $b+1$, exprime combien il y a de valeurs de y, comprises entre ces deux nombres, qui satisfont à l'équation $V=0$. Car, puisqu'on a fait $x=a+\frac{1}{y}$, en substituant b et $b+1$ à la place de y dans les polynomes V, V_1, ... V_n exprimés en fonction de y, on obtient les mêmes résultats qu'en substituant $a+\frac{1}{b}$ et $a+\frac{1}{b+1}$ à la place de x dans les mêmes polynomes exprimés sous leur forme primitive en fonction de x : or, la différence entre les deux nombres de variations que présentent les signes de ces résultats exprime le nombre des valeurs de x comprises entre $a + \frac{1}{b}$ et $a + \frac{1}{b+1}$ qui sont racines de l'équation $V = 0$, et auxquelles répondent autant de valeurs de y comprises entre b et $b + 1$.

Si l'on trouve ainsi que b et $b + 1$ comprennent plusieurs valeurs de y, on fera $y = b + \frac{1}{z}$, et l'on remplacera y par $b + \frac{1}{z}$ dans les polynomes $V, V_1, V_2, \ldots$ déjà exprimés en fonction de y, en s'arrêtant, sans aller jusqu'à V_n, à un polynome V_k qui conserve toujours le même signe pour toutes les valeurs de y comprises entre b et $b + 1$; puis on substituera dans ces polynomes $V, V_1, V_2, \ldots. V_k$ à la place de z les nombres $1, 2, 3\ldots.$

La différence entre les deux nombres de variations que donneront deux nombres entiers consécutifs c et $c + 1$, marquera le nombre des valeurs de z comprises entre c et $c + 1$ qui correspondront à des racines x de l'équation $V = 0$. En continuant ainsi, on développera en fractions continues toutes les valeurs de x comprises entre a et $a + 1$.

Lorsqu'une des inconnues successives $y, z, \ldots$ n'a qu'une seule valeur comprise entre deux nombres entiers consécutifs, on n'a plus besoin des fonctions auxiliaires $V_1, V_2\ldots$ pour développer cette valeur en fraction continue ; il suffit d'employer le procédé ordinaire que nous avons rappelé plus haut, pour développer une valeur de x, dans le cas où elle est seule comprise entre les deux nombres a et $a + 1$.

Si l'on doit calculer avec une grande approximation des racines qui sont très peu différentes, on pourra d'abord obtenir, par les moyens que nous venons d'indiquer, une valeur suffisamment approchée de chaque racine, puis recourir à la méthode d'approximation de Newton, pour avoir une valeur plus exacte.

Remarques. 1° La fonction V, étant représentée par $f(x)$, devient, lorsqu'on y fait $x = a + \frac{1}{y}$,

$$V = f\left(a+\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y^m}\left\{f(a)y^m + f'(a)\,y^{m-1} + \frac{f''(a)}{1.2}y^{m-2} + \text{etc.}\right\}$$

Or, on n'a besoin de connaître que les signes et non les valeurs numériques des polynomes V, V_1, V_2,... pour chaque nombre positif substitué à la place de y; on peut donc supprimer dans cette expression de V le facteur positif $\frac{1}{y^m}$, et prendre simplement pour V la fonction entière $f(a)y_m + f'(a)y^{m-1} + \frac{f''(a)}{1.2}y^{m-2} +$ etc. Cette remarque s'applique à toutes les fonctions V, V_1, V_2.... où l'on remplace x par $a + \frac{1}{y}$, ainsi qu'à toutes leurs transformées successives qu'on emploie dans le cours des calculs.

2° Il est inutile de remplacer x par $a + \frac{1}{y}$ dans la fonction V_n, si elle conserve le même signe, comme on l'a supposé, pour toutes les valeurs de x comprises entre a et $a + 1$; car elle aura aussi ce même signe pour toutes les valeurs de y plus grandes que 1.

De même on se dispensera de mettre $b + \frac{1}{z}$ à la place de y dans V_k, si V_k a un signe constant pour toute valeur de y comprise entre b et $b + 1$.

17.

Appliquons notre méthode à quelques exemples.

1^er EXEMPLE.

Soit l'équation

$$x^3 - 2x - 5 = 0;$$

on a ici

$$\begin{aligned} V &= x^3 - 2x - 5, \\ V_1 &= 3x^2 - 2. \end{aligned}$$

Pour former V_2 on divise V par V_1; mais afin d'éviter les fractions, on multiplie d'abord V par 3 (n° 7): on obtient ainsi le reste $-4x - 15$, et l'on a, en changeant les signes,

$$V_2 = 4x + 15.$$

On divise ensuite V_1 par V_2, et pour éviter les fractions, on multiplie par 4 la fonction V_1, ainsi que le reste du premier degré.

Le reste, indépendant de x auquel on arrive est $+643$; on a donc

$$V_3 = -643. \quad (*)$$

L'existence de ce reste numérique prouve que l'équation proposée n'a pas de racines égales. Le nombre des fonctions auxiliaires V_1, V_2, V_3 est égal au degré de

(*) Si les coefficiens de V_1 et de V_2, étaient des nombres plus grands, on éviterait la division de V_1 par V_2, en observant qu'à cause de la relation $V_1 = V_2Q_2 - V_3$, le signe cherché de V_3 doit être contraire à celui du résultat qu'on obtiendrait en substituant dans V_1 la valeur de x unique qui annulle V_2. Or, on touve facilement le signe de ce résultat, en examinant si la valeur de x qui annulle V_2 est ou n'est pas comprise entre celles qui annullent V_1.

l'équation, et la suite des signes de leurs premiers termes, y compris V_3, est

$$+ + -.$$

Cette suite offrant une variation, on en conclut, d'après la proposition du n° 13, que l'équation a une couple de racines imaginaires, et par conséquent une seule racine réelle; ce qu'on peut voir encore en écrivant les signes des fonctions V, V_1, V_2, V_3 pour $x = -\infty$, et pour $x = +\infty$, et prenant la différence entre les deux nombres de variations.

Cette racine réelle étant unique, pour obtenir sa partie entière, on n'a plus besoin de considérer les fonctions auxiliaires V_1, V_2, V_3, il suffit de substituer différens nombres dans la seule fonction V. Comme o et $+\infty$ substitués dans V, donnent des résultats de signes contraires, on voit d'abord que cette racine est positive. En faisant $x = 2$ dans V, on a un résultat négatif; et en faisant $x = 3$, on a un résultat positif : la racine est donc comprise entre 2 et 3. On en obtiendra des valeurs aussi approchées qu'on voudra par les procédés ordinaires d'approximation qui ont été rappelés dans les n^{os} précédens. On trouvera

$$x = 2{,}09455148.$$

2^e EXEMPLE.

Cherchons les conditions nécessaires pour que l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

ait toutes ses racines réelles.

On a

$$\begin{aligned} V &= x^3 + px + q, \\ V_1 &= 3x^2 + p. \end{aligned}$$

On obtient V_2 et V_3 par les divisions successives. Pour éviter les fractions, on a soin de multiplier le dividende par 3 dans la première division, et dans le seconde par $4p^2$ qui est une quantité positive (n° 7).

On trouve

$$V_2 = -2px - 3q,$$
$$V_3 = -4p^3 - 27q^2.$$

Les conditions de la réalité des racines de l'équation proposée sont (n^{os} 13 et 14) les deux suivantes :

$$-2p > 0, \qquad -4p^3 - 27q^2 > 0,$$

qui reviennent à celles-ci :

$$p < 0, \qquad 4p^3 + 27q^2 < 0.$$

La première se trouve comprise dans la seconde; ce qui est d'ailleurs bien connu.

On pourrait trouver de la même manière les conditions nécessaires pour que l'équation

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

ait toutes ses racines réelles.

3^e EXEMPLE.

On verra, dans l'exemple suivant, comment on peut calculer deux racines dont la différence est très petite.

Soit l'équation

$$x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0,$$

On a
$$\begin{aligned} V &= x^3 + 11x^2 - 102x + 181, \\ V_1 &= 3x^2 + 22x - 102, \\ V_2 &= 854x - 2751, \\ V_3 &= +441. \end{aligned}$$

On voit d'abord, d'après la proposition du nº **14**, que l'équation a ses trois racines réelles.

Pour trouver les racines positives, on substitue à la place de x les nombres $0, 1, 2, 3, 4,\ldots$ dans les fonctions V, V_1, V_2, V_3, et l'on écrit les signes des résultats; on trouve

$$\left.\begin{array}{lcccccl} & V & V_1 & V_2 & V_3 & \\ \text{pour } x = 0 & + & - & - & + & \text{2 variations,} \\ x = 1 & + & - & - & + & \\ x = 2 & + & - & - & + & \\ x = 3 & + & - & - & + & \text{2 variations,} \\ x = 4 & + & + & + & + & 0 \\ x = +\infty & + & + & + & + & 0 \end{array}\right\} (a)$$

Ce tableau montre que l'équation a deux racines positives et qu'elles sont comprises entre 3 et 4.

Déterminons la valeur de ces racines à *un dixième* près. Pour rendre le calcul plus facile, on fera $x = 3 + y$, et l'on remplacera x par $3 + y$, non-seulement dans V, mais aussi dans V_1 et V_2, parce qu'on voit dans le tableau précédent que chacune de ces fonctions V_1, V_2, change de signe pour une valeur de x comprise entre 3 et 4. Les fonctions $V, V_1,\ldots$, deviendront par cette transformation

$$\begin{aligned} V &= y^3 + 20y^2 - 9y + 1, \\ V_1 &= 3y^2 + 40y - 9, \\ V_2 &= 854y - 189, \\ V_3 &= +. \end{aligned}$$

On fera successivement $y = 0$, $y = 0,1$; $y = 0,2\ldots$; jusqu'à ce que la suite des signes des fonctions V, V_1, V_2, V_3, perde les deux variations qu'elle a pour $y = 0$ (qui répond à $x = 3$), ou jusqu'à ce que V change de signe.

		V	V_1	V_2	V_3
$y = 0$	donne	$+$	$-$	$-$	$+$
$y = 0,1$		$+$	$-$	$-$	$+$
$y = 0,2$		$+$	$-$	$-$	$+$
$y = 0,3$		$+$	$+$	$+$	$+$

On a donc $V = 0$ pour deux valeurs de y comprises entre 0,2 et 0,3, et par conséquent pour deux valeurs de x comprises entre 3,2 et 3,3.

On déterminera le chiffre des *centièmes* de chaque racine, en substituant à la place de y, dans les mêmes fonctions, les nombres 0,20 .. 0,21 .. 0,22 .. jusqu'à ce que la suite de leurs signes perde deux variations, ou jusqu'à ce que V change de signe. On trouvera

	V	V_1	V_2	V_3	
pour $y = 0,20$	$+$	$-$	$-$	$+$	
$y = 0,21$	$+$	$-$	$-$	$+$	$V = + 0,001261$
$y = 0,22$	$-$				$V = - 0,001352$.

On voit par le changement de signe de V, que l'une des deux valeurs cherchées de y tombe entre 0,21 et 0,22, et que l'autre doit être plus grande que 0,22; de sorte que les deux racines sont maintenant séparées. Dès lors on n'a plus besoin des fonctions auxiliaires V_1, V_2, V_3. On substitue 0,23 à la place de y dans la seule fonction V: on trouve le résultat positif $+ 0,000167$; d'où il suit que la seconde valeur cherchée de y tombe entre 0,22 et 0,23.

Par de nouvelles substitutions faites dans V, on trouvera que le chiffre des *millièmes* est 3 pour la plus petite racine, et 9 pour l'autre. Ainsi les deux racines positives de l'équation proposée

$$x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0,$$

sont 3,213 et 3,229 à *un millième près*.

On obtiendra trois chiffres décimaux de plus pour chacune, en appliquant la règle de Newton à cette équation ou à sa transformée en y. On trouvera les valeurs 3,213128 et 3,229521, exactes à *un millionième* près.

On peut obtenir les mêmes racines en cherchant leurs valeurs en fractions continues, suivant le procédé de Lagrange. Après avoir reconnu par le tableau (a) que l'équation $V = 0$ a deux racines positives entre 3 et 4, on fait $x = 3 + \frac{1}{y}$, y aura deux valeurs positives plus grandes que l'unité. On remplace x par $3 + \frac{1}{y}$, non-seulement dans V, mais aussi dans V_1 et V_2, qui changent de signe quand x croît depuis 3 jusqu'à 4. En supprimant les facteurs positifs $\frac{1}{y^3}, \frac{1}{y^2}, \ldots$ comme on l'a dit à la fin du n° 16, les fonctions deviennent :

$$\begin{aligned}
V &= y^3 - 9y^2 + 20y + 1, \\
V_1 &= -9y^2 + 40y + 3, \\
V_2 &= -189y + 854, \\
V_3 &= +.
\end{aligned}$$

On fait dans ces fonctions $y = 1, 2, 3, 4 \ldots$; on trouve

pour $y = 1$ $\quad + \; + \; + \; +$

les mêmes résultats qu'on avait obtenus pour $x = 4$

$y = 4$ $\quad + \; + \; + \; +$

$y = 5$ $\quad + \; - \; - \; +$

On voit que les deux valeurs cherchées de y tombent entre 4 et 5. On fait alors $y = 4 + \frac{1}{z}$, z aura encore deux valeurs plus grandes que 1. Les fonctions $V, V_1 \ldots$ deviennent

$$\begin{aligned}
V &= z^3 - 4z^2 + 3z + 1\,,\\
V_1 &= 19z^2 - 32z - 9\,,\\
V_2 &= 98z - 189\,,\\
V_3 &= +\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{llcl}
 & & V & \\
\text{Or}\quad z = 1 & \text{donne} & + & - \; - \; + \quad (\text{comme } y = 5),\\
z = 2 & & - & \\
z = 3 & & + &
\end{array}$$

Donc l'une des valeurs de z tombe entre 1 et 2, l'autre entre 2 et 3. Arrivé à ce point, on n'a plus besoin des fonctions auxiliaires V_1, V_2, V_3. On développe la plus petite valeur de z en fraction continue : on pose $z = 1 + \frac{1}{t}$. L'équation précédente

$$z^3 - 4z^2 + 3z + 1 = 0$$

devient

$$t^3 - 2t^2 - t + 1 = 0\,;$$

t ne doit avoir qu'une seule valeur positive plus grande que l'unité; on substitue pour t, les nombres entiers 1, 2, 3... On trouve que 2 et 3 donnent des résultats de signes contraires; on fait donc $t = 2 + \frac{1}{u}$, u étant > 1. On trouve de même $u = 4 + \frac{1}{v}$, $v = 20 + \frac{1}{r}$, et ainsi de suite. La plus petite racine positive de l'équation $V = 0$, est donc exprimée par la fraction continue

$$x = 3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{r}}}}}}.$$

En formant les fractions convergentes et convertissant la sixième, qui est $\frac{3965}{1234}$, en fraction décimale, on trouve $x = 3,213128$, à *un millionième* près.

On calculera de la même manière la seconde valeur de z qui tombe entre 2 et 3. On aura successivement

$$z = 2 + \frac{1}{t},\quad t' = 1 + \frac{1}{u'},\ (1)\quad u' = 4 + \frac{1}{v'},\quad v' = 20 + \frac{1}{r} \text{ etc.},$$

puis

$$x = 3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{20 + \text{etc.}}}}}},$$

et de là $x = 3,229521$, pour la seconde racine positive de l'équation proposée.

---

(1) L'équation transformée en u', se trouve la même que l'équation en u à laquelle on est arrivé dans le calcul de la première racine.

18.

Nous avons admis jusqu'à présent que l'équation proposée $V = o$, n'avait pas de racines égales. On peut toujours faire en sorte qu'on n'ait à résoudre que des équations qui remplissent cette condition. Car on sait que si une équation a des racines égales, on peut en ramener la résolution à celle d'autres équations de degrés moindres qui n'ont que des racines inégales, et dont les racines sont celles de la proposée elle-même. On pourra donc déterminer toutes ses racines réelles à l'aide des principes exposés précédemment.

Toutefois, il ne sera pas inutile de faire voir que lors même que l'équation proposée $V = o$ a des racines égales, le théorème énoncé n° 2 ne cesse pas d'être vrai, et peut servir encore à faire découvrir toutes les racines réelles de cette équation, sans qu'il soit nécessaire de la décomposer en deux ou plusieurs autres, qui n'aient que des racines inégales.

Supposons donc qu'en cherchant le plus grand commun diviseur de V et de V_1 comme on l'a dit n° 1, on parvienne à un reste V_r, fonction de x, qui divise exactement le reste précédent V_{r-1}. Ce dernier reste V_r est alors le plus grand commun diviseur de V et de V_1, et l'on est averti que l'équation $V = o$ a des racines égales.

Les divisions successives donnent cette suite d'égalités

$$\begin{array}{lcl} V & = & V_1 Q_1 - V_2, \\ V_1 & = & V_2 Q_2 - V_3, \\ . & . & . \quad . \quad . \\ . & . & . \quad . \quad . \\ V_{r-2} & = & V_{r-1} Q_{r-1} - V_r, \\ V_{r-1} & = & V_r Q_r. \end{array} \qquad (2)$$

On voit que V_r divise à la fois toutes les fonctions V, V_1, V_2, etc. Si l'on désigne par $T, T_1, T_2, .., T_r$, les quotiens que donnera la division de $V, V_1, V_2, .., V_r$ par V_2, on aura les équations suivantes

$$\left.\begin{array}{l} T = T_1Q_1 - T_2, \\ T_1 = T_2Q_2 - T_3, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \\ T_{r-2} = T_{r-1}Q_{r-1} - T_r, \end{array}\right\} \quad (3)$$

et enfin.

$$T_r = +1.$$

Nous allons prouver que le théorème énoncé n° 2, relativement au système des fonctions $V, V_1, V_2, .., V_r$, pour le cas où l'équation $V = 0$ n'avait pas de racines égales, s'applique à ces nouvelles fonctions $T, T_1, T_2, .., T_r$, quoique T_1 ne soit pas la fonction dérivée de T.

D'abord on sait que le plus grand commun diviseur V_r de V et de V_1, se compose du produit des facteurs multiples de V, élevés chacun à une puissance dont l'exposant est moindre d'une unité que dans V, d'où il suit que le quotient T de la division de V par V_r, contient tous les facteurs de V soit simples, soit multiples, à la première puissance. L'équation $T = 0$ a donc les mêmes racines que la proposée $V = 0$, mais chacune de ces racines ne se trouve qu'une fois dans $T = 0$.

Examinons maintenant comment la suite des signes des fonctions $T, T_1, T_2, .., T_r$, perd ou acquiert des variations, quand x passe par différens états de grandeur. Cette suite ne peut s'altérer qu'à cause des changemens de signe qu'éprouvent les fonctions $T, T_1, T_2, ..$ en s'évanouissant.

Considérons d'abord le cas où la première fonction T devient égale à zéro. Soit c une valeur de x qui rend $T = 0$. La fonction T_1 ne peut pas être nulle en même temps que T; car si T et T_1 étaient nuls pour la même valeur de x, en vertu des équations (3) toutes les autres fonctions T_2, T_3,.... et enfin T_r, seraient nulles en même temps; ce qui ne peut pas être, puisque T_r est égal à $+1$. T_r aura donc pour $x = c$ une valeur différente de zéro, et si l'on attribue à x des valeurs $c - u$ et $c + u$ très peu différentes de c, T_1 aura pour ces valeurs le même signe qu'il a pour $x = c$.

La valeur c qui annulle T est aussi une racine de l'équation $V = 0$. Supposons qu'elle se trouve p fois dans $V = 0$, ou en d'autres termes que V soit divisible par $(x - c)^p$: en désignant le quotient par $\varphi(x)$, on a

$$V = (x - c)^p \cdot \varphi(x)$$

et sa fonction dérivée V_1 a pour expression

$$V_1 = (x - c)^{p-1} \left[p\varphi(x) + (x - c)\, \varphi'(x) \right].$$

On tire de là

$$\frac{V}{V_1} = \frac{(x - c)\, \varphi(x)}{p\varphi(x) + (x - c)\, \varphi'(x)} = \frac{x - c}{p + \frac{(x - c)\, \varphi'(x)}{\varphi(x)}};$$

mais puisque

$$V = TV_r \text{ et } V_1 = T_1 V_r,$$

on a

$$\frac{V}{V_1} = \frac{T}{T_1},$$

donc aussi

$$\frac{T}{T_1} = \frac{x - c}{p + \frac{(x - c)\, \varphi'(x)}{\varphi(x)}} \qquad (4)$$

Cette formule fait voir que le quotient $\frac{T}{T_1}$ est positif pour des valeurs de x un peu plus grandes que c, et négatif pour des valeurs de x un peu plus petites que c. Ainsi, pour $x = c + u$, T a le même signe que T_1 et pour $x = c - u$, T a un signe contraire à celui de T_1. Chacune des autres fonctions T_2, T_3,.. aura d'ailleurs, soit pour $x = c - u$, soit pour $x = c + u$, le même signe qu'elle a pour $x = c$, si toutefois aucune ne s'évanouit pour $x = c$. On conclut de là, que la suite des signes des fonctions T, T_1, T_2,.., T_r perd une variation lorsque x en croissant dépasse une valeur qui annulle la seule fonction T.

Quand une des autres fonctions T_1, T_2, ... T_{r-1}, s'évanouira pour une valeur de x qui ne réduira pas en même temps T à zéro, le nombre des variations restera le même dans la suite des signes. En effet, supposons $T_n = 0$ pour $x = b$: en vertu des équations (3), les deux fonctions adjacentes T_{n-1} et T_{n+1}, auront pour $x = b$ des valeurs différentes de zéro, et de signes contraires, car si l'on supposait T_{n-1} ou T_{n+1} nul en même temps que T_n, on voit que toutes les fonctions jusqu'à T_r inclusivement seraient nulles à la fois, ce qui est impossible, puisqu'on a $T_r = 1$. Le signe de T^n pour $x = b - u$, quel qu'il soit, étant placé entre les signes de T_{n-1} et de T_{n+1} qui sont contraires, ces trois signes consécutifs formeront une variation et n'en formeront qu'une, et il en sera de même pour $x = b + u$. Il résulte de là que le nombre des variations n'est pas changé dans la suite des signes de T, T_1, .., T_r, quand une fonction intermédiaire vient à s'évanouir, à moins que la première fonction T ne s'annulle en même temps, auquel cas la suite des signes perd une variation, comme on l'a vu plus haut.

En conséquence, si x croît depuis A jusqu'à B, *autant il y aura de valeurs de* x *entre* A *et* B *qui rendront* T *égal à zéro, autant la suite des signes des fonctions*

T, T_1, T_2,.., T_r *pour* $x = B$ *contiendra de variations de moins que la suite de leurs signes pour* $x = A$.

On peut à l'aide de cette proposition, déterminer les racines réelles de l'équation $T = 0$, qui sont aussi celles de la proposée $V = 0$, sans être obligé de faire sur la fonction T et sa dérivée l'opération du plus grand commun diviseur; il suffit de l'avoir faite sur V et V_1.

L'équation $T = 0$ n'ayant que des racines inégales, il reste à savoir, après qu'on aura calculé l'une d'elles, combien de fois elle se trouvera dans la proposée $V = 0$. Désignons par c, comme précédemment, une racine de l'équation $T = 0$ qui entre p fois dans $V = 0$. T étant divisible par le facteur $x - c$ une fois seulement, posons

$$T = (x - c)\,\psi(x).$$

En nommant T' la fonction dérivée de T, on a

$$T' = \psi(x) + (x - c)\,\psi'(x)$$

et conséquemment

$$\frac{T}{T'} = \frac{x - c}{1 + \dfrac{(x - c)\,\psi'(x)}{\psi(x)}}.$$

Si l'on divise cette valeur de $\frac{T}{T'}$ par celle de $\frac{T}{T_1}$ trouvée plus haut, formule (4), il vient

$$\frac{T_1}{T'} = \frac{p + \dfrac{(x - c)\,\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{1 + \dfrac{(x - c)\,\psi'(x)}{\psi(x)}},$$

d'où l'on tire, en faisant $x = c$,

$$\frac{T_1}{T'} = p.$$

Ainsi, après avoir calculé une racine c de l'équation $T=0$, on la substituera dans les deux fonctions T_1 et T' et le quotient qu'on obtiendra en divisant le premier résultat par le second, exprimera combien de fois cette racine se trouvera dans l'équation $V=0$. Quand la racine c sera irrationnelle, on n'aura que des valeurs approchées de T_1 et de T', mais leur quotient devra différer très peu d'un nombre entier qui sera p. On connaît d'ailleurs d'autres moyens de déterminer le degré de multiplicité de chaque racine de l'équation $V=0$.

Il faut remarquer, enfin, qu'on peut se dispenser d'effectuer la division de $V, V_1, V_2, \ldots,$ par V_r. En effet on a

$$V=TV_r, \quad V_1=T_1V_r, \quad V_2=T_2V_r, \ldots \quad V_r=T_rV_r.$$

Donc, si pour une valeur donnée de x, V_r a une valeur positive, V aura pour cette valeur de x le même signe que T, V_1 aura le même signe que T_1, V_2 le même signe que T_2 et ainsi de suite jusqu'à V qui a le même signe que $T_r=+1$. Mais si V_r a une valeur négative, les signes de $V, V_1, \ldots, V_r$ seront contraires à ceux de $T, T_1, \ldots, T_r$ respectivement. Ainsi, quel que soit le signe de V_r, la suite des signes de $V, V_1, V_2, \ldots V_r$, présentera les mêmes variations que la suite des signes de $T, T_1, T_2, \ldots, T_r$. De cette remarque et de la proposition qui précède, on conclut *que le nombre des racines réelles différentes de l'équation* $V=0$ *comprises entre* A *et* B, *abstraction faite du degré de multiplicité de chacune, est égal à l'excès du nombre des variations contenues dans la suite des signes des fonctions* $V, V_1, V_2, \ldots V_r$, *pour* $x=A$ *sur le nombre des variations contenues dans la suite de leurs signes pour* $x=B$. Notre théorème est ainsi étendu au cas où l'équation proposée V o a des racines égales.

19.

On peut être curieux de savoir comment la suite des signes des fonctions V, V_1, $V_2, \ldots$, V_r doit se modifier, pour qu'elle puisse perdre une variation chaque fois que V s'évanouit.

On a vu, n[os] 4 et 18, que si c est une racine, soit simple soit multiple, de l'équation $V=0$, les deux fonctions V et V_1 doivent avoir des signes contraires pour $x=c-u$ et le même signe pour $x=c+u$. De même, si l'on désigne par c' la racine simple ou multiple de l'équation $V=0$, qui surpasse c immédiatement, de sorte qu'entre c et c', il n'y ait pas d'autre racine, V_1 aura pour $x=c'-u$ un signe contraire à celui de V. Or, V a constamment le même signe pour toutes les valeurs de x comprises entre c et c'; et comme V_1 a le même signe que V pour $x=c+u$ et un signe contraire à celui de V pour $x=c'-u$, on voit que V_1 a deux valeurs de signes contraires pour $x=c+u$ et pour $x=c'-u$; donc, tandis que x croît depuis $c+u$ jusqu'à $c'-u$, V_1 doit changer de signe une fois, ou un nombre impair de fois (1).

Soit γ la valeur unique de x ou la plus petite valeur de x, entre c et c', pour laquelle V_1 change de signe; V et V_1 auront pour $x=\gamma-u$ le même signe commun

(1) On sait que cette propriété, qui est le fondement des méthodes proposées par *Rolle* et *de Gua* pour la résolution des équations, n'est pas bornée aux fonctions entières. On la démontre aisément pour une fonction quelconque $f(x)$ d'une variable x, en observant que si la fonction dérivée $f'(x)$ est constamment positive ou négative pour toutes les valeurs de la variable x comprises entre deux limites données, la fonction $f(x)$ doit croître ou décroître continuellement dans leur intervalle; d'où il suit qu'elle ne peut pas s'évanouir pour deux valeurs de x comprises entre ces limites.

qu'elles ont pour $x = c + u$. Pour $x = \gamma + u$, V aura ce même signe; mais V_1 aura le signe contraire. V_2 aura un signe contraire à celui de V pour les trois valeurs $\gamma - u$, γ et $\gamma + u$ (n° 5). Si, par exemple, V est positif pour $x = c + u$, on aura le tableau suivant :

	V	V_1	V_2
pour $x = \gamma - u$	+	+	—
$x = \gamma$	+	0	—
$x = \gamma + u$	+	—	—.

Ainsi, avant que x atteignît la valeur c qui annulle V, les signes de V et de V_1 formaient une variation qui est changée en une permanence après que x a dépassé cette valeur c; cette permanence subsiste jusqu'à ce que V_1 change de signe, puis elle est de nouveau remplacée par une variation après le changement de signe de V_1 : mais en même temps il y a une variation formée par les signes de V_1 et de V_2, qui se change en permanence; de sorte que le nombre des variations dans la suite totale des signes n'est ni augmenté ni diminué.

Si V_1 change de signe une seconde fois pour une nouvelle valeur de x comprise entre c et c', la variation que forment les signes de V et de V_1 avant que x atteigne cette valeur, sera de nouveau remplacée par une permanence; et cependant, à cause de V_2, le nombre des variations restera le même dans la suite des signes. Comme V_1 ne peut ainsi changer de signe qu'un nombre impair de fois, après son dernier changement, les signes de V et de V_1 formeront une variation qui subsistera jusqu'à ce que x atteigne la valeur c' qui annulle V. On n'a point à considérer ici le cas où V_1 s'évanouit sans changer de signe.

20.

V_1 étant la fonction dérivée de V, nous savons que si V est nul pour $x = c$, V a un signe contraire à celui de V_1 pour $x = c - u$ et le même signe que V_1 pour $x = c + u$. C'est ce qu'on peut exprimer plus brièvement en disant que le quotient $\frac{V}{V_1}$ passe toujours du négatif au positif quand V s'évanouit.

Supposons maintenant que V_1 ne soit plus la fonction dérivée de V, mais que ce soit un polynome quelcônque d'un degré inférieur à celui de V et qui n'ait aucun facteur réel commun avec V. On pourra se servir de ce polynome V_1, pour en former d'autres V_2, V_3, etc., de degrés décroissans, par des divisions successives, comme on s'est servi n° 1, du polynome dérivé.

Considérons ce nouveau système de fonctions V, V_1, $V_2,\ldots, V_r$, qui vérifient aussi les équations (1). Quand x, en croissant, atteint et dépasse une valeur c qui annulle V, il peut arriver que le quotient $\frac{V}{V_1}$ passe du négatif au positif, ou du positif au négatif, ou enfin qu'il ne change pas de signe. Dans le premier cas, la suite des signes des fonctions V, V_1, $V_2,\ldots, V_r$ perd sur sa gauche une variation; dans le second, elle acquiert au contraire une variation; dans le troisième, le nombre de ses variations n'est pas changé. D'ailleurs (n° 5) l'évanouissement d'une fonction intermédiaire entre V et V_r ne peut pas altérer le nombre des variations. De là il est aisé de conclure la théorème suivant qui remplace celui du n° 2, lorsque la fonction V_1 n'est pas la dérivée de V.:

Le nombre des racines de l'équation $V = 0$ comprises entre les deux nombres A et B, pour lesquelles le quotient $\frac{V}{V_1}$ passe du négatif au positif, moins le nombre des racines de la même équation comprises entre A et B, pour lesquelles $\frac{V}{V_1}$ passe du positif au négatif, est égal au nombre des variations qui se trouvent dans la suite des signes des fonctions V, V_1, V_2,.., V_r, pour $x = A$, moins le nombre de leurs variations pour $x = B$.

Le nombre des racines de l'équation $V = 0$ comprises entre A et B, ne peut donc pas être moindre que la différence entre ces deux nombres de variations; mais il puet être égal à cette différence, ou la surpasser d'un nombre pair quelconque. Pour qu'il lui soit précisément égal, il faut que V_1 soit la fonction dérivée de V ou bien une fonction qui ait toujours le même signe que cette dérivée, ou un signe contraire au sien, pour chaque valeur réelle de x comprise entre A et B qui annulle V. Comme on ne connaît pas *à priori* une telle fonction, on est obligé de prendre pour V_1 la fonction dérivée de V, si l'on veut déterminer avec certitude toutes les racines réelles de l'équation $V = 0$.

21.

Lorsque V_1 est la fonction dérivée de V, le système des fonctions auxiliaires V_1, V_2, V_3, etc., qu'on déduit les unes des autres par le calcul du plus grand commun diviseur entre V et V_1 n'est pas le seul qu'on puisse employer pour la recherche des racines réelles de l'équation $V = 0$. Nous allons montrer qu'on peut en former une infinité d'autres qui jouissent des mêmes propriétés.

Multiplions la fonction dérivée V_1 par le binome $px+q$, où p et q sont des indéterminées, et retranchons V du produit : nous aurons pour résultat un polynome du degré m : divisons-le par une fonction du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$, a, b, c étant des nombres tout connus, tels que cette formule soit constamment positive pour toute valeur réelle de x, ou que du moins elle ne s'évanouisse que pour une seule valeur de x qui n'annulle pas V_1, et qu'elle soit positive pour toute autre valeur. La division du polynome $V_1(px+q) - V$ par $ax^2 + bx + c$, nous donnera un quotient fonction de x du degré $m - 2$ que nous désignerons par V_2, contenant p et q à la première puissance dans tous ses termes, et un reste du premier degré de la forme $Kx + L$, dont les coefficiens K, L contiendront aussi les indéterminées p et q au premier degré. Égalons ces quantités K, L à zéro, nous en tirerons des valeurs de p et de q qui seront ordinairement finies et déterminées ; substituons ces valeurs dans le quotient V_2, il deviendra un polynome tout connu. La fonction V_2 déterminée par ce calcul est donc liée avec V et V_1 par l'équation

$$V_1(px+q) - V = V_2(ax^2 + bx + c),$$

ou

$$V = V_1(px + q) - V_2(ax^2 + bx + c). \quad (6)$$

Si le coefficient de x^{m-2} dans V_2 ne se trouve pas nul, on formera de la même manière une fonction V_3 du degré $m - 3$, en divisant le polynome $V_2(rx + s) - V_1$ par un nouveau diviseur du second degré $ex^2 + fx + g$, qui soit aussi positif pour toutes les valeurs réelles de x et ne puisse s'évanouir que pour une seule valeur de x qui n'annullera pas V_2. On déterminera r et s de manière que le reste de cette division soit nul, et l'on substituera leurs valeurs dans le quotient V_3. On aura ainsi,

$$V_1 = V_2(rx + s) - V_3(ex^2 + fx + g). \qquad (6)$$

Si V_2 était du degré $m - 3$, on remplacerait le binome $rx + s$ par un trinome $rx^2 + sx + t$; on diviserait $V_2(rx^2 + sx + t) - V_1$ par $ex^2 + fx + g$, et l'on déterminerait r, s, t, de manière que le quotient V_3 fût au plus du degré $m - 4$; alors V_3 satisferait à l'équation

$$V_1 = V_2(rx^2 + sx + t) - V_3(ex^2 + fx + g). \qquad (6)$$

On calculera de la même manière des fonctions V_4, V_5, etc.

Si l'équation $V = 0$ n'a pas de racines égales, on arrivera à une dernière fonction V_r qui ne contiendra plus x; car si l'on arrivait à une fonction V_r contenant encore x, et que la suivante V_{r+1} fût identiquement nulle, V_r devrait, en vertu des équations (6), diviser à la fois toutes les fonctions précédentes, et enfin V_1 et V, ce qui est contre l'hypothèse.

Cela posé, le théorème énoncé nº 2 pour les fonctions V, V_1, V_2, etc., que nous avons définies nº 1, et qui vérifient les équations (1), a lieu également pour les nouvelles fonctions dont nous venons d'expliquer la formation : car on peut appliquer à ce nouveau système de fonctions $V, V_1, .., V_r$ toute la démonstration développée dans les nºs 3, 4 et 5. Ainsi, V_1 étant toujours la fonction dérivée de V, la suite des signes de ces fonctions perdra une variation chaque fois que V s'évanouira. Mais le nombre des variations restera le même, quand une des fonctions intermédiaires V_1, V_2, .. s'évanouira, parce qu'alors les deux fonctions adjacentes auront des valeurs différentes de zéro et de signes contraires : ce que l'on conclut facilement des équations (6) et des hypothèses que nous avons admises.

Le théorème aura lieu encore pour ce nouveau système de fonctions $V, V_1, \ldots, V_r$, dans le cas même où l'équation $V = 0$ aura des racines égales, pourvu qu'aucun des trinomes $ax^2 + bx + c$, $ex^2 + fx + g$, etc., ne divise V.

Comme le diviseur du second degré $ax + bx^2 + c$, qui sert à former la fonction V_2, peut être pris à volonté, pourvu qu'il remplisse les conditions énoncées plus haut, on pourra obtenir une infinité de fonctions qui seront représentées par V_2. De même, avec V_1 et l'une de ces fonctions V_2, on pourra composer une infinité de fonctions V_3, et ainsi de suite. Il est donc possible de former une infinité de systèmes de fonctions auxiliaires, propres à la résolution de l'équation $V = 0$.

Le système que nous avons considéré particulièrement dans ce Mémoire, et qui est défini par les équations (1), est compris parmi ceux que nous venons d'indiquer. On peut le déduire des équations générales (6), en réduisant les trinomes $ax^2 + bx + c$, $ex^2 + fx + g$, etc., à l'unité ou à de simples nombres positifs.

Il existe encore un autre moyen particulier de former les fonctions auxiliaires, aussi simple que celui qui a été exposé n° 1. Quand on a deux fonctions consécutives, V_{n-1} et V_n, on peut former la suivante V_{n+1}, en divisant V_{n-1} par V_n, après avoir ordonné ces polynomes suivant les puissances croissantes de x, au lieu de les ordonner suivant les puissances décroissantes, comme on a coutume de le faire. La division donnera un quotient de la forme $p + qx$, et un reste divisible par x^2; en changeant les signes de tous les termes de ce reste, et le divisant par x^2, on aura la fonction V_{n+1}, qui est ainsi liée avec V_{n-1} et V_n par la relation

$$V_{n-1} = V_n(p + qx) - V_{n+1}\, x^2,$$

Cette relation est comprise dans les équations générales (6), lorsqu'on réduit les trinomes $ax^2 + bx + c$, $ex^2 + fx + g$,... au seul terme x^2.

Ainsi, pour obtenir V_{n+1}, on peut effectuer la division de V_{n-1} par V_{n+1} de deux manières différentes, en ordonnant ces polynomes suivant les puissances décroissantes de x, ou suivant les puissances croissantes. La combinaison de ces deux procédés donne plusieurs systèmes de fonctions auxiliaires également propres à la résolution de l'équation $V = 0$; et de là résultent aussi plusieurs systèmes de quantités dépendantes des coefficiens de cette équation, dont les signes font connaître le nombre de ses racines réelles.

Il y aurait encore d'autres moyens de former des fonctions auxiliaires. Mais de plus longs détails sur ce sujet seraient superflus.