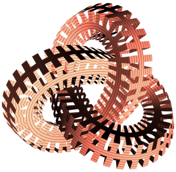
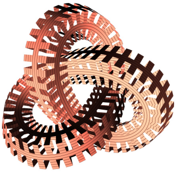
Tresses, nœuds et entrelacs



Michael Eisermann

Institut für Geometrie und Topologie
Universität Stuttgart



Conférence/atelier le 25 octobre 2009
Document mis à jour le 28 octobre 2009

Journées nationales de l'APMEP à Rouen, 24–27 octobre 2009

www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/popularisation/#noeuds

Plan de l’exposé

1. Origines historiques et motivations
2. Tresses
3. Nœuds
4. Entrelacs

Plan de l’exposé

1 Origines historiques et motivations
- Des objets noués se trouvent partout !
- Gauss et Kelvin, deux précurseurs au 19e siècle
- Trois phénomènes motivants. . . à explorer

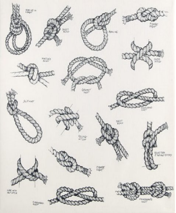
2 Tresses

3 Nœuds

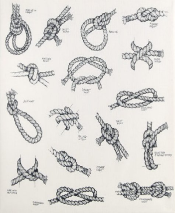
4 Entrelacs

Des objets noués se trouvent partout dans notre monde 3-dimensionnel

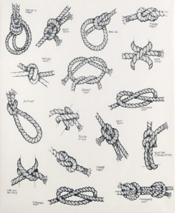
Des objets noués se trouvent partout dans notre monde 3-dimensionnel

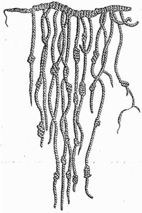


Des objets noués se trouvent partout dans notre monde 3-dimensionnel

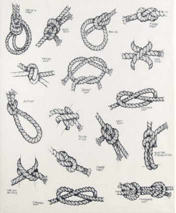



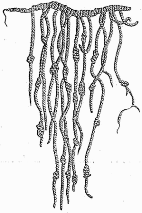

Des objets noués se trouvent partout dans notre monde 3-dimensionnel



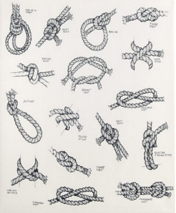


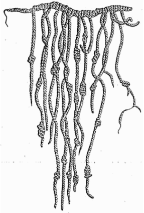
Des objets noués se trouvent partout dans notre monde 3-dimensionnel

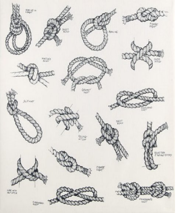


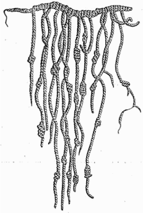

Des objets noués se trouvent partout dans notre monde 3-dimensionnel

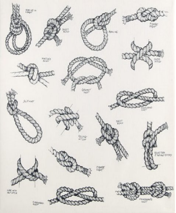


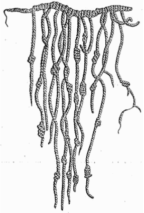
Des objets noués se trouvent partout dans notre monde 3-dimensionnel



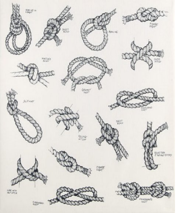

Des objets noués se trouvent partout dans notre monde 3-dimensionnel

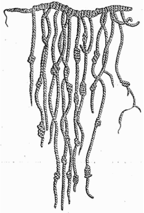







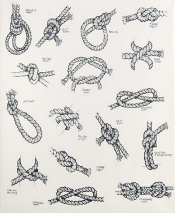
Des objets noués se trouvent partout dans notre monde 3-dimensionnel

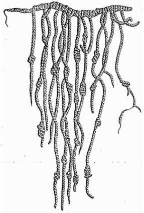





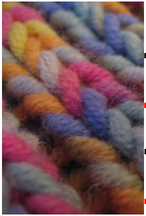
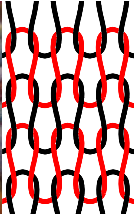



Des objets noués se trouvent partout dans notre monde 3-dimensionnel

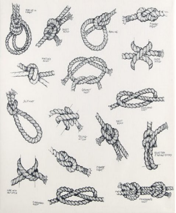



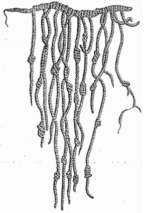




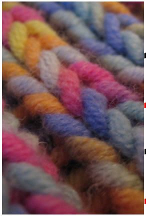
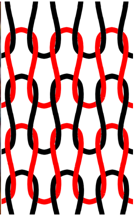
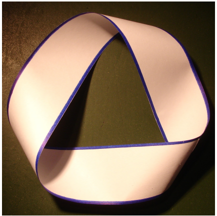




Des objets noués se trouvent partout dans notre monde 3-dimensionnel

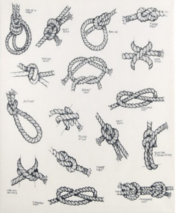



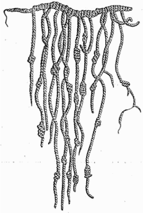




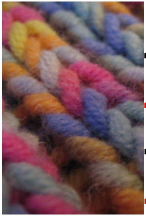
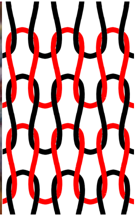
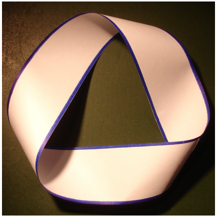
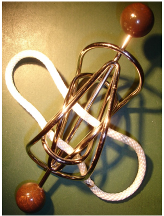





Des objets noués se trouvent partout dans notre monde 3-dimensionnel

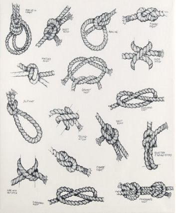



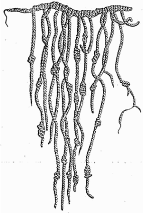




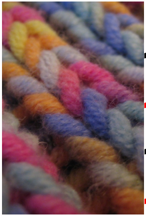
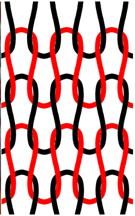
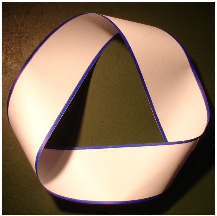
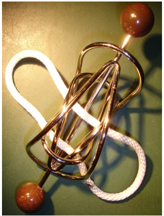






Des objets noués se trouvent partout dans notre monde 3-dimensionnel

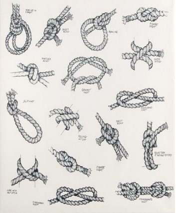



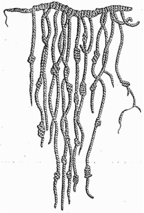




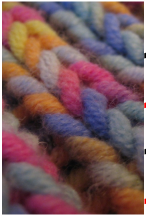
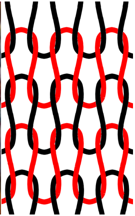
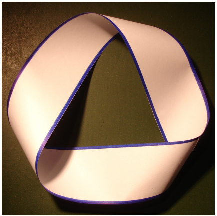
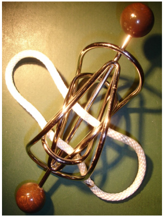






Des objets noués se trouvent partout dans notre monde 3-dimensionnel

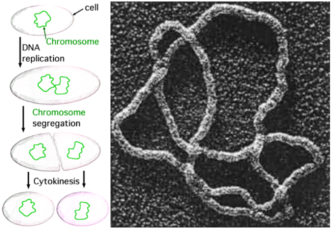







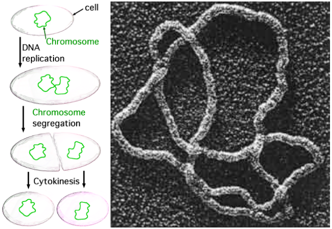






Des objets noués se trouvent aussi en sciences

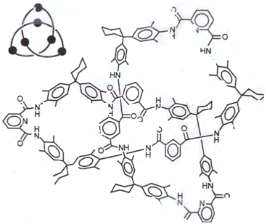


(a) Biologie moléculaire

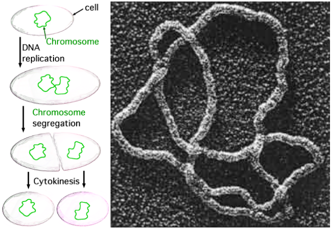
Des objets noués se trouvent aussi en sciences



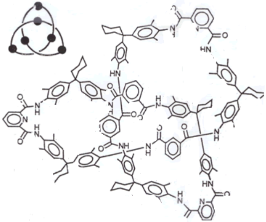
(a) Biologie moléculaire



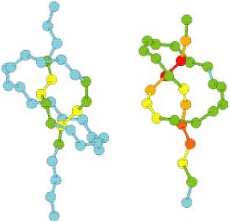
(b) Chimie



(a) Biologie moléculaire

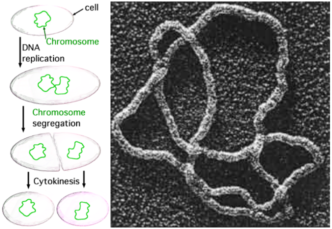


(b) Chimie

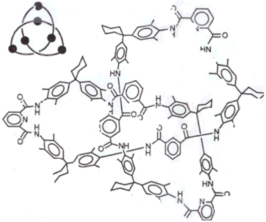


(c) Nanotech

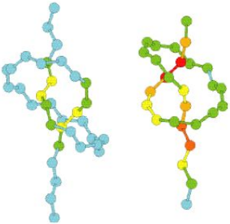
Des objets noués se trouvent aussi en sciences



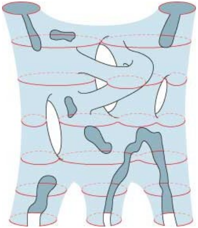
(a) Biologie moléculaire



(b) Chimie

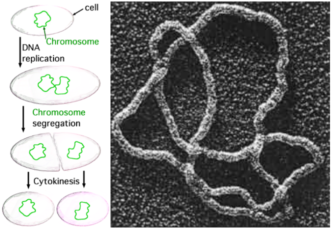


(c) Nanotech

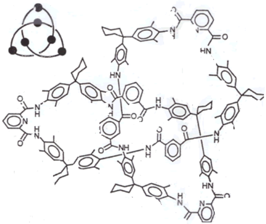


(d) Physique théorique

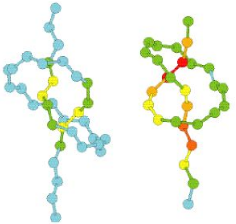
Des objets noués se trouvent aussi en sciences



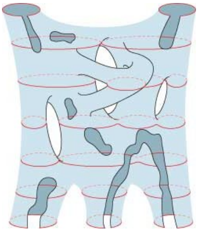
(a) Biologie moléculaire



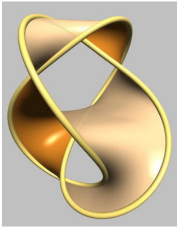
(b) Chimie



(c) Nanotech



(d) Physique théorique



(e) Mathématique

FIG.: Des objets noués en sciences

Deux précurseurs célèbres au 19e siècle

omettre

Deux précurseurs célèbres au 19e siècle

Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)

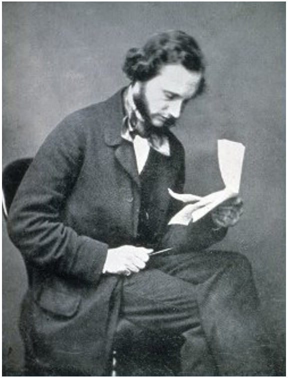
Mathématicien, physicien et astronome
allemand, professeur à Göttingen

Deux précurseurs célèbres au 19e siècle

Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)

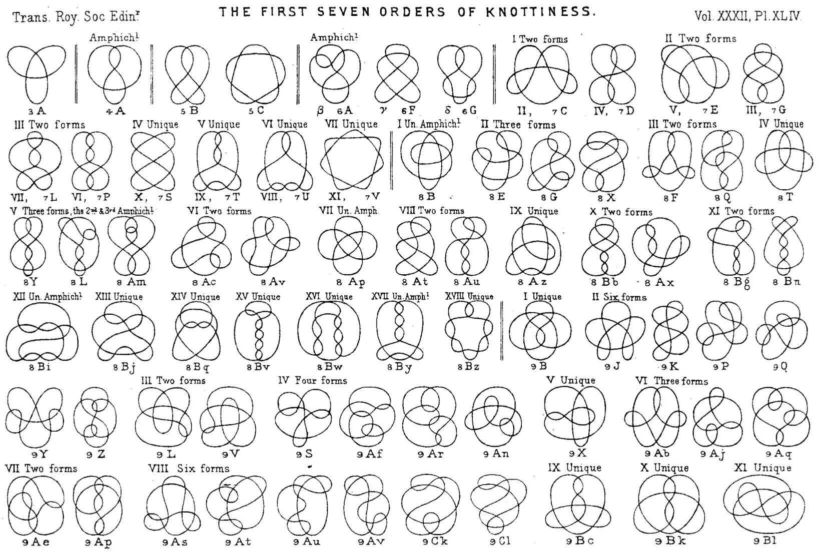
Mathématicien, physicien et astronome allemand, professeur à Göttingen

William Thomson, Lord Kelvin
(1824-1907)

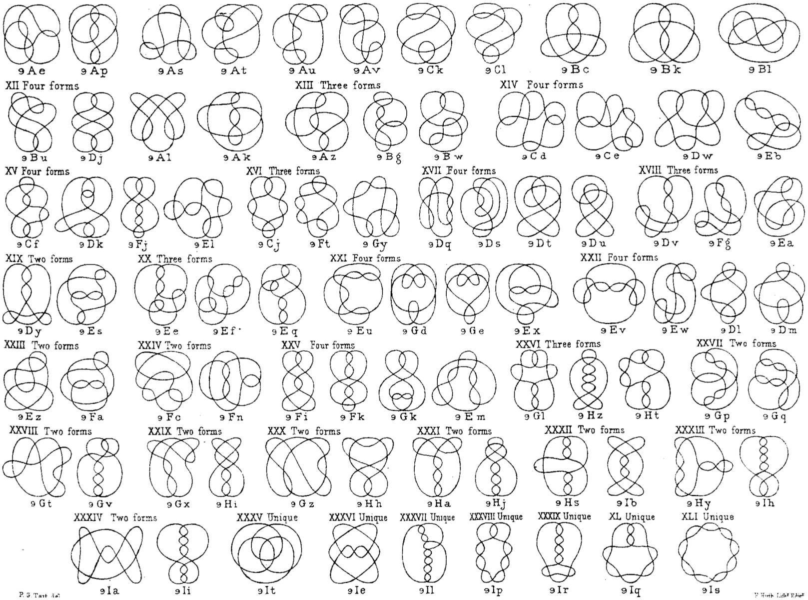


Physicien britannique né en Irlande, professeur à Glasgow

Tabulation empirique par Tait–Little–Kirkman, 1870–1890



Tabulation empirique par Tait–Little–Kirkman, 1870–1890

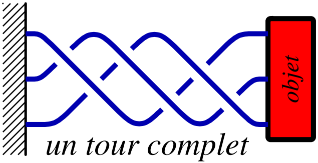


📖 D. Bar-Natan *et al.*, *The Knot Atlas*, `katlas.math.toronto.edu`

1ère expérience : tresses de Dirac — le phénomène de spin

La tresse suivante τ est-elle équivalente à la tresse triviale ? Preuve ?

La tresse suivante τ est-elle équivalente à la tresse triviale ? Preuve ?



La tresse τ^2 est-elle équivalente à la tresse triviale ? Preuve ?

1ère expérience : tresses de Dirac — le phénomène de spin

La tresse suivante τ est-elle équivalente à la tresse triviale ? Preuve ?

La tresse τ^2 est-elle équivalente à la tresse triviale ? Preuve ?

Pour ces questions il faudra préciser le modèle puis établir des outils :

1ère expérience : tresses de Dirac — le phénomène de spin

La tresse suivante τ est-elle équivalente à la tresse triviale ? Preuve ?

La tresse τ^2 est-elle équivalente à la tresse triviale ? Preuve ?

Pour ces questions il faudra préciser le modèle puis établir des outils :

- Qu'est-ce qu'une tresse ? Quels mouvements sont autorisés ?

La tresse suivante τ est-elle équivalente à la tresse triviale ? Preuve ?

La tresse τ^2 est-elle équivalente à la tresse triviale ? Preuve ?

Pour ces questions il faudra préciser le modèle puis établir des outils :

- Qu'est-ce qu'une tresse ? Quels mouvements sont autorisés ?
- Qu'est-ce qu'une tresse de Dirac ? Quels mouvements sont autorisés ?

1ère expérience : tresses de Dirac — le phénomène de spin

La tresse suivante τ est-elle équivalente à la tresse triviale ? Preuve ?

La tresse τ^2 est-elle équivalente à la tresse triviale ? Preuve ?

Pour ces questions il faudra préciser le modèle puis établir des outils :

- Qu'est-ce qu'une tresse ? Quels mouvements sont autorisés ?
- Qu'est-ce qu'une tresse de Dirac ? Quels mouvements sont autorisés ?
- Quelles obstructions peut-il y avoir pour transformer une tresse en une autre ?

2nde expérience : jonglage topologique — qu'est-ce qui est possible ?

Une expérience mathémagique

Peut-on *nouer* une corde
par un geste d'une seule main ?

Peut-on *dénouer* la corde
de la même manière ?

2nde expérience : jonglage topologique — qu'est-ce qui est possible ?

Une expérience mathémagique

Peut-on *nouer* une corde
par un geste d'une seule main ?

Peut-on *dénouer* la corde
de la même manière ?

Pour ces questions il faudra préciser le modèle puis établir des outils :

2nde expérience : jonglage topologique — qu’est-ce qui est possible ?

Une expérience mathémagique

Peut-on *nouer* une corde par un geste d’une seule main ?

Peut-on *dénouer* la corde de la même manière ?

Pour ces questions il faudra préciser le modèle puis établir des outils :

- Qu’est-ce qu’un nœud ? Quels mouvements sont autorisés ?

2nde expérience : jonglage topologique — qu’est-ce qui est possible ?

Une expérience mathémagique

Peut-on *nouer* une corde
par un geste d’une seule main ?

Peut-on *dénouer* la corde
de la même manière ?

Pour ces questions il faudra préciser le modèle puis établir des outils :

- Qu’est-ce qu’un nœud ? Quels mouvements sont autorisés ?
- Que dire de la concaténation des nœuds ?

2nde expérience : jonglage topologique — qu'est-ce qui est possible ?

Une expérience mathémagique

Peut-on *nouer* une corde par un geste d'une seule main ?

Peut-on *dénouer* la corde de la même manière ?

Pour ces questions il faudra préciser le modèle puis établir des outils :

- Qu'est-ce qu'un nœud ? Quels mouvements sont autorisés ?
- Que dire de la concaténation des nœuds ?
- Existe-t-il des éléments inverses, ainsi dire des « anti-nœuds » ?

2nde expérience : jonglage topologique — qu'est-ce qui est possible ?

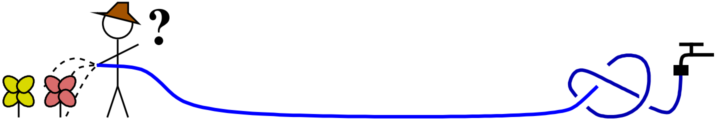
Une expérience mathémagique

Peut-on *nouer* une corde
par un geste d'une seule main ?

Peut-on *dénouer* la corde
de la même manière ?

Pour ces questions il faudra préciser le modèle puis établir des outils :

- Qu'est-ce qu'un nœud ? Quels mouvements sont autorisés ?
- Que dire de la concaténation des nœuds ?
- Existe-t-il des éléments inverses, ainsi dire des « anti-nœuds » ?

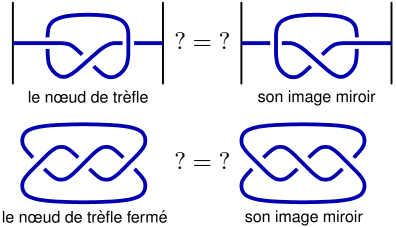


Question de Listing (1847), résolue par Dehn (1914) :

3ème expérience : images miroirs — la question de chiralité

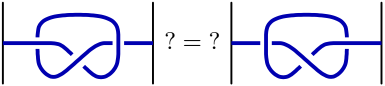
Question de Listing (1847), résolue par Dehn (1914) :

Le nœud de trèfle est-il égal à son image miroir ?

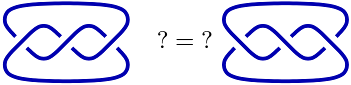


Question de Listing (1847), résolue par Dehn (1914) :

Le nœud de trèfle est-il égal à son image miroir ?

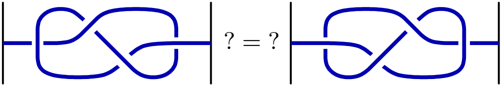


le nœud de trèfle — son image miroir

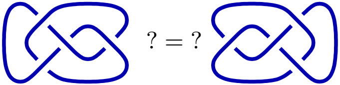


le nœud de trèfle fermé — son image miroir

Le nœud de huit est-il égal à son image miroir ?



le nœud d'huit — son image miroir



le nœud d'huit fermé — son image miroir

* * * Avant la théorie, passons aux expériences ! * * *

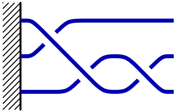
Plan de l'exposé

1 Origines historiques et motivations

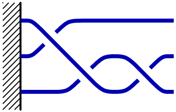
2 Tresses
- Comment modéliser les tresses ?
- Comment calculer avec les tresses ?
- Application aux tresses de Dirac

3 Nœuds

4 Entrelacs

Un premier modèle : 

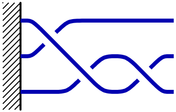
Comment modéliser les tresses ?

Un premier modèle : 

Propriété importante : les brins sont flexibles, ils peuvent bouger.

Comment modéliser les tresses ?

Un premier modèle :

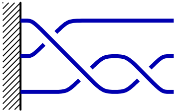


Propriété importante : les brins sont flexibles, ils peuvent bouger.

Mauvaise nouvelle : dans ce modèle toutes les tresses sont égales.

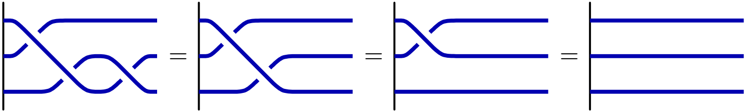
Comment modéliser les tresses ?

Un premier modèle :

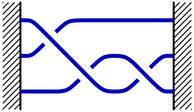


Propriété importante : les brins sont flexibles, ils peuvent bouger.

Mauvaise nouvelle : dans ce modèle toutes les tresses sont égales.

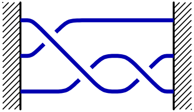


Le bon modèle :

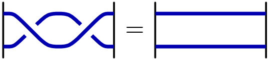


On fixe les extrémités
à gauche et à droite !
Au milieu les brins
peuvent encore bouger.

Comment modéliser les tresses ?

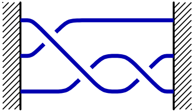
Le bon modèle : 

On fixe les extrémités
à gauche et à droite !
Au milieu les brins
peuvent encore bouger.

Exemples (mouvements élémentaires) : 

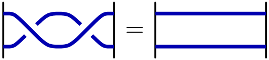
Comment modéliser les tresses ?

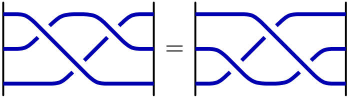
Le bon modèle :

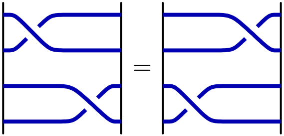


On fixe les extrémités
à gauche et à droite !
Au milieu les brins
peuvent encore bouger.

Exemples (mouvements élémentaires) :

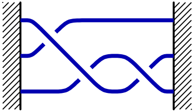






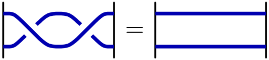
Comment modéliser les tresses ?

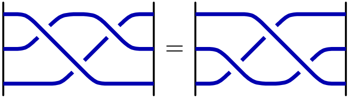
Le bon modèle :

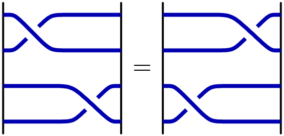


On fixe les extrémités
à gauche et à droite !
Au milieu les brins
peuvent encore bouger.

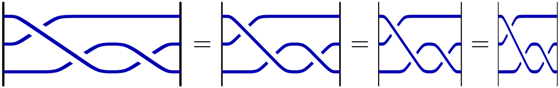
Exemples (mouvements élémentaires) :





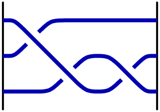
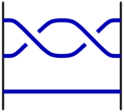
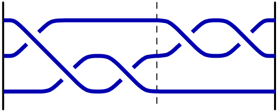


La longueur n'est pas essentielle :



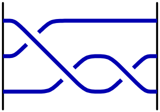
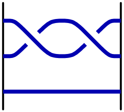
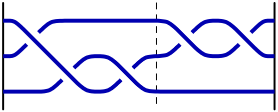
On peut concaténer les tresses !

Les tresses à n brins jouissent d'une concaténation naturelle :

 $*$  $:=$ 

On peut concaténer les tresses !

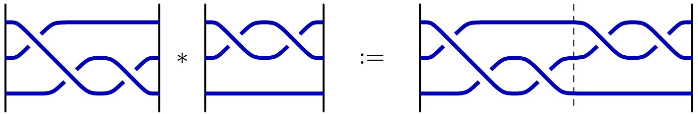
Les tresses à n brins jouissent d'une concaténation naturelle :

 $*$  $:=$ 

Questions naturelles :

On peut concaténer les tresses !

Les tresses à n brins jouissent d'une concaténation naturelle :



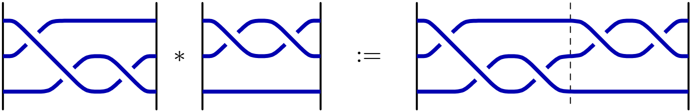
Questions naturelles :

1. La concaténation des tresses est-elle associative ?

$$(A * B) * C = A * (B * C)$$

On peut concaténer les tresses !

Les tresses à n brins jouissent d'une concaténation naturelle :



Questions naturelles :

1. La concaténation des tresses est-elle associative ?

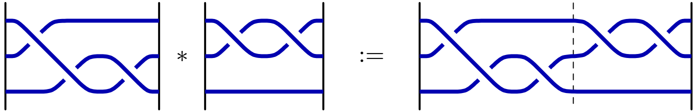
$$(A * B) * C = A * (B * C)$$

2. Est-elle commutative ?

$$A * B = B * A$$

On peut concaténer les tresses !

Les tresses à n brins jouissent d'une concaténation naturelle :



Questions naturelles :

1. La concaténation des tresses est-elle associative ?

$$(A * B) * C = A * (B * C)$$

2. Est-elle commutative ?

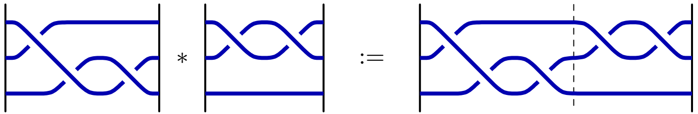
$$A * B = B * A$$

3. Admet-elle un élément neutre ?

$$A * 1 = A \qquad \text{et} \qquad 1 * A = A$$

On peut concaténer les tresses !

Les tresses à n brins jouissent d'une concaténation naturelle :

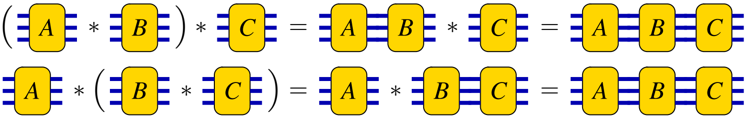


Questions naturelles :

1. La concaténation des tresses est-elle associative ?
$$(A * B) * C = A * (B * C)$$
2. Est-elle commutative ?
$$A * B = B * A$$
3. Admet-elle un élément neutre ?
$$A * 1 = A \qquad \text{et} \qquad 1 * A = A$$
4. Pour une tresse A donnée, y a-t-il une tresse inverse ?
$$A * A^{-1} = 1 \qquad \text{et} \qquad A^{-1} * A = 1$$

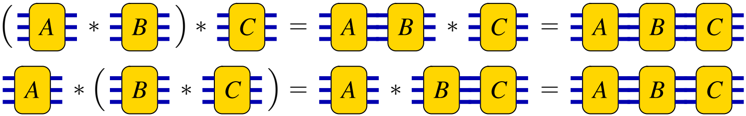
La concaténation des tresses

Est-elle associative ? Oui !

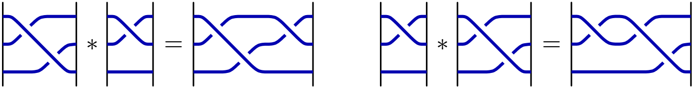


La concaténation des tresses

Est-elle associative ? Oui !



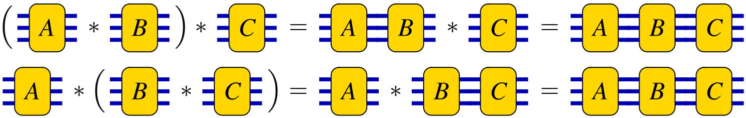
Est-elle commutative ? Non !



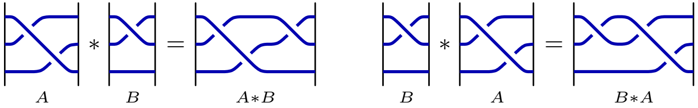
$A \quad B \quad A*B \qquad B \quad A \quad B*A$

La concaténation des tresses

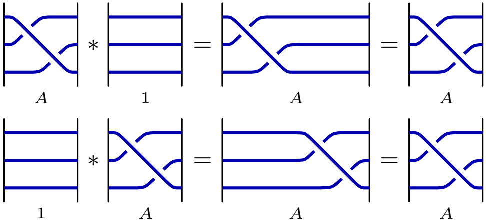
Est-elle associative ? Oui !



Est-elle commutative ? Non !

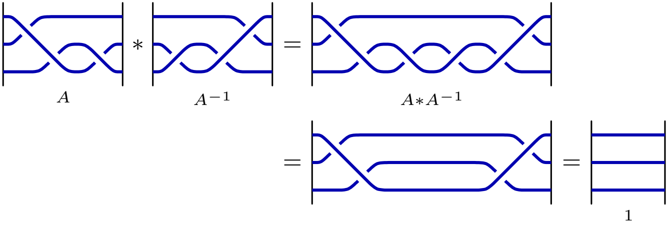


Admet-elle un élément neutre ? Oui !

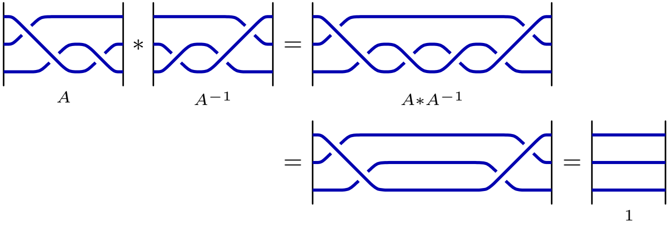


La concaténation des tresses (suite)

Existe-t-il des éléments inverses ? Oui !



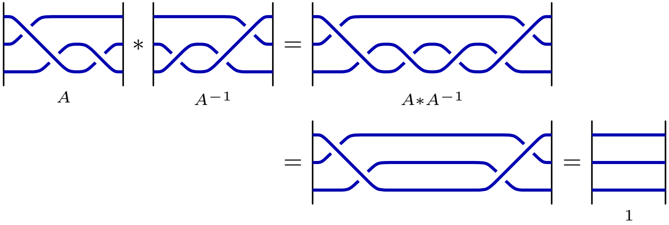
Existe-t-il des éléments inverses ? Oui !



Définition (groupe)

Un ensemble avec une opération ayant ces propriétés est appelée *un groupe*.

Existe-t-il des éléments inverses ? Oui !



Définition (groupe)

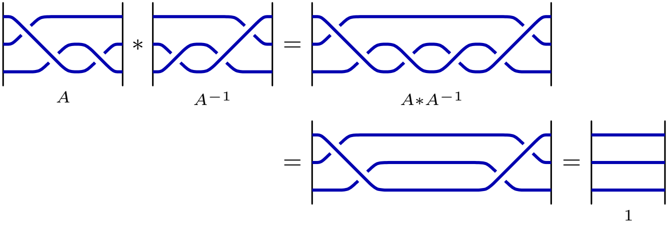
Un ensemble avec une opération ayant ces propriétés est appelée *un groupe*.

Théorème (Emil Artin 1925)

Les tresses à n brins avec leur concaténation forment un groupe.

La concaténation des tresses (suite)

Existe-t-il des éléments inverses ? Oui !



Définition (groupe)

Un ensemble avec une opération ayant ces propriétés est appelée *un groupe*.

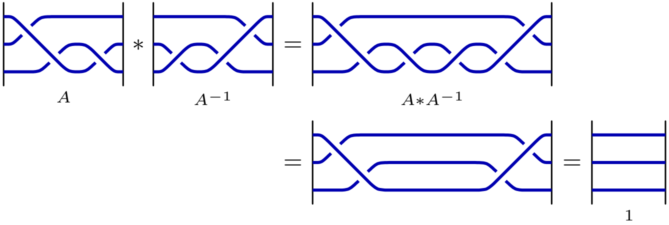
Théorème (Emil Artin 1925)

Les tresses à n brins avec leur concaténation forment un groupe.

Pour $n \geq 3$ il est non commutatif : on a vu que $A * B \neq B * A$.

La concaténation des tresses (suite)

Existe-t-il des éléments inverses ? Oui !



Définition (groupe)

Un ensemble avec une opération ayant ces propriétés est appelée *un groupe*.

Théorème (Emil Artin 1925)

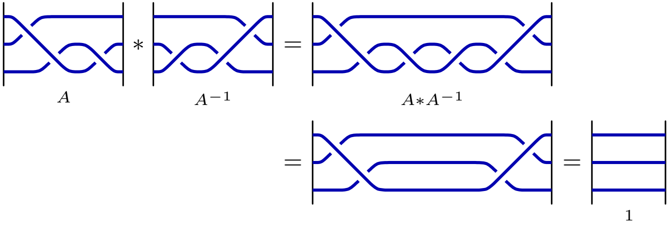
Les tresses à n brins avec leur concaténation forment un groupe.

Pour $n \geq 3$ il est non commutatif : on a vu que $A * B \neq B * A$.

Notation : On note ce groupe par $(\mathbf{B}_n, *)$ pour « **b**raid » (anglais).

La concaténation des tresses (suite)

Existe-t-il des éléments inverses ? Oui !



Définition (groupe)

Un ensemble avec une opération ayant ces propriétés est appelée *un groupe*.

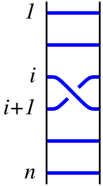
Théorème (Emil Artin 1925)

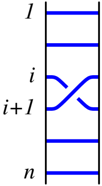
Les tresses à n brins avec leur concaténation forment un groupe.

Pour $n \geq 3$ il est non commutatif : on a vu que $A * B \neq B * A$.

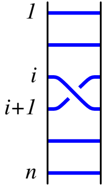
Notation : On note ce groupe par $(\mathbf{B}_n, *)$ pour « **b**raid » (anglais).
Par commodité on écrit simplement AB au lieu de $A * B$.

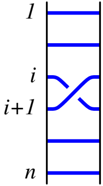
Présentation algébrique du groupe des tresses

Tresses élémentaires : $s_i =$ 

, $s_i^{-1} =$ 

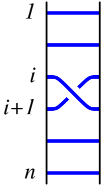
Présentation algébrique du groupe des tresses

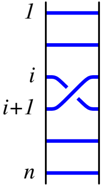
Tresses élémentaires : $s_i =$ 

, $s_i^{-1} =$ 

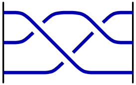
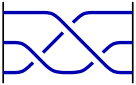
Relations élémentaires : nous avons $s_i s_i^{-1} = s_i^{-1} s_i = 1$, bien sûr,

Présentation algébrique du groupe des tresses

Tresses élémentaires : $s_i =$ 

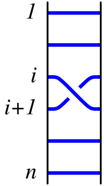
, $s_i^{-1} =$ 

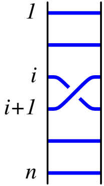
Relations élémentaires : nous avons $s_i s_i^{-1} = s_i^{-1} s_i = 1$, bien sûr, puis

 $=$ 

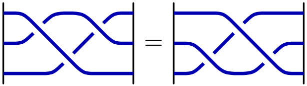
$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$

Présentation algébrique du groupe des tresses

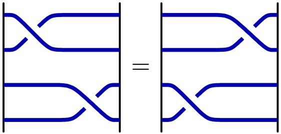
Tresses élémentaires : $s_i =$ 

, $s_i^{-1} =$ 

Relations élémentaires : nous avons $s_i s_i^{-1} = s_i^{-1} s_i = 1$, bien sûr, puis

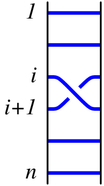


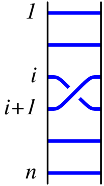
$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$



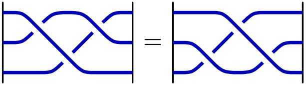
$s_i s_j = s_j s_i$ où $|i - j| \geq 2$

Présentation algébrique du groupe des tresses

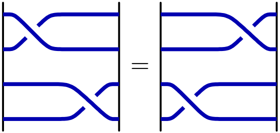
Tresses élémentaires : $s_i =$ 

, $s_i^{-1} =$ 

Relations élémentaires : nous avons $s_i s_i^{-1} = s_i^{-1} s_i = 1$, bien sûr, puis



$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$



$s_i s_j = s_j s_i$ où $|i - j| \geq 2$

Théorème (Emil Artin 1925)

Le groupe $\mathbf{B}_n$ des tresses à n brins admet la présentation

$$\mathbf{B}_n = \left\langle \, s_1, \ldots, s_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} s_i s_j s_i = s_j s_i s_j & \textit{si } \ |i-j| = 1 \\ s_i s_j = s_j s_i & \textit{si } \ |i-j| \geq 2 \end{array} \right\rangle.$$

Complément : démonstration du théorème d'Artin

omettre

Toute tresse β peut être rendue polygonale (càd affines par morceaux).

Complément : démonstration du théorème d'Artin

Toute tresse β peut être rendue polygonale (càd affines par morceaux).

En position générale la projection de β donne donc un diagramme planaire.

Complément : démonstration du théorème d'Artin

Toute tresse β peut être rendue polygonale (càd affines par morceaux).

En position générale la projection de β donne donc un diagramme planaire.
Lisant les croisements de gauche à droite on obtient un mot en $s_1^{\pm 1}, \ldots, s_{n-1}^{\pm 1}$.

Complément : démonstration du théorème d'Artin

Toute tresse β peut être rendue polygonale (càd affines par morceaux).

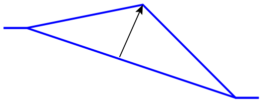
En position générale la projection de β donne donc un diagramme planaire.
Lisant les croisements de gauche à droite on obtient un mot en $s_1^{\pm 1}, \ldots, s_{n-1}^{\pm 1}$.
Ainsi β est équivalente à une concaténation de tresses élémentaires.

Complément : démonstration du théorème d'Artin

Toute tresse β peut être rendue polygonale (càd affines par morceaux).

En position générale la projection de β donne donc un diagramme planaire.
Lisant les croisements de gauche à droite on obtient un mot en $s_1^{\pm 1}, \dots, s_{n-1}^{\pm 1}$.
Ainsi β est équivalente à une concaténation de tresses élémentaires.

Deux tresses polygonales sont équivalentes si et seulement si elles sont équivalentes par des mouvements polygonaux :

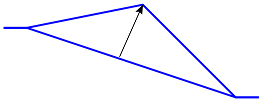


Complément : démonstration du théorème d'Artin

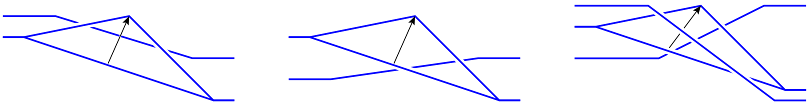
Toute tresse β peut être rendue polygonale (càd affines par morceaux).

En position générale la projection de β donne donc un diagramme planaire.
Lisant les croisements de gauche à droite on obtient un mot en $s_1^{\pm 1}, \dots, s_{n-1}^{\pm 1}$.
Ainsi β est équivalente à une concaténation de tresses élémentaires.

Deux tresses polygonales sont équivalentes si et seulement si
elles sont équivalentes par des mouvements polygonaux :



Trois cas élémentaires peuvent se produire :

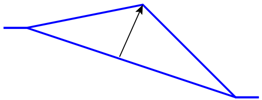


Complément : démonstration du théorème d'Artin

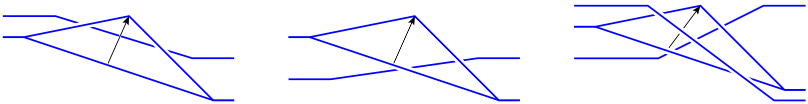
Toute tresse β peut être rendue polygonale (càd affines par morceaux).

En position générale la projection de β donne donc un diagramme planaire. Lisant les croisements de gauche à droite on obtient un mot en $s_1^{\pm 1}, \dots, s_{n-1}^{\pm 1}$. Ainsi β est équivalente à une concaténation de tresses élémentaires.

Deux tresses polygonales sont équivalentes si et seulement si elles sont équivalentes par des mouvements polygonaux :



Trois cas élémentaires peuvent se produire :



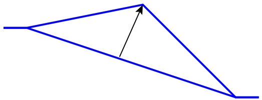
1. On crée une paire de croisements opposés : $1 = s_i^{-1} s_i$.

Complément : démonstration du théorème d'Artin

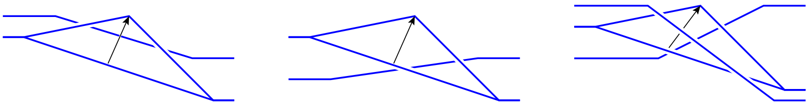
Toute tresse β peut être rendue polygonale (càd affines par morceaux).

En position générale la projection de β donne donc un diagramme planaire. Lisant les croisements de gauche à droite on obtient un mot en $s_1^{\pm 1}, \dots, s_{n-1}^{\pm 1}$. Ainsi β est équivalente à une concaténation de tresses élémentaires.

Deux tresses polygonales sont équivalentes si et seulement si elles sont équivalentes par des mouvements polygonaux :



Trois cas élémentaires peuvent se produire :



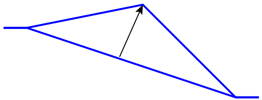
1. On crée une paire de croisements opposés : $1 = s_i^{-1} s_i$.
2. On déplace un croisement par rapport aux autres : $s_i s_j = s_j s_i$.

Complément : démonstration du théorème d'Artin

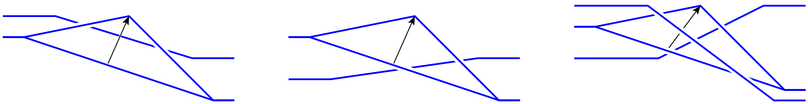
Toute tresse β peut être rendue polygonale (càd affines par morceaux).

En position générale la projection de β donne donc un diagramme planaire. Lisant les croisements de gauche à droite on obtient un mot en $s_1^{\pm 1}, \dots, s_{n-1}^{\pm 1}$. Ainsi β est équivalente à une concaténation de tresses élémentaires.

Deux tresses polygonales sont équivalentes si et seulement si elles sont équivalentes par des mouvements polygonaux :



Trois cas élémentaires peuvent se produire :



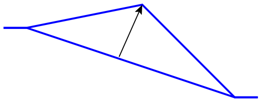
1. On crée une paire de croisements opposés : $1 = s_i^{-1} s_i$.
2. On déplace un croisement par rapport aux autres : $s_i s_j = s_j s_i$.
3. On pousse un brin au-dessus d'un croisement : $s_{i+1} s_i s_{i+1} = s_i s_{i+1} s_i$.

Complément : démonstration du théorème d'Artin

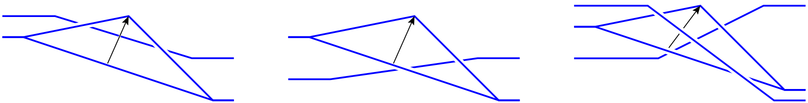
Toute tresse β peut être rendue polygonale (càd affines par morceaux).

En position générale la projection de β donne donc un diagramme planaire.
Lisant les croisements de gauche à droite on obtient un mot en $s_1^{\pm 1}, \dots, s_{n-1}^{\pm 1}$.
Ainsi β est équivalente à une concaténation de tresses élémentaires.

Deux tresses polygonales sont équivalentes si et seulement si
elles sont équivalentes par des mouvements polygonaux :



Trois cas élémentaires peuvent se produire :



1. On crée une paire de croisements opposés : $1 = s_i^{-1} s_i$.
2. On déplace un croisement par rapport aux autres : $s_i s_j = s_j s_i$.
3. On pousse un brin au-dessus d'un croisement : $s_{i+1} s_i s_{i+1} = s_i s_{i+1} s_i$.

En subdivisant assez finement, on se ramène aux trois cas élémentaires. $\square$

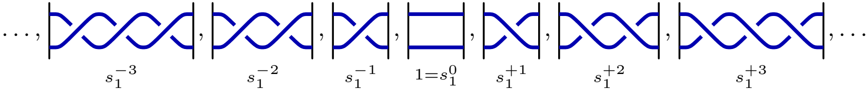
Essayons de comprendre ces groupes des tresses…

$n = 1$: Avec un seul brin il n'y a que la tresse triviale : 

Essayons de comprendre ces groupes des tresses...

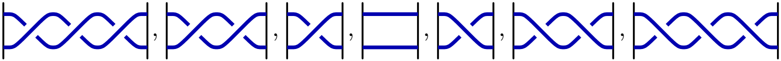
$n = 1$: Avec un seul brin il n'y a que la tresse triviale : 

$n = 2$: Regardons les tresses à 2 brins :



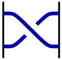
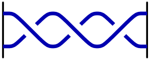
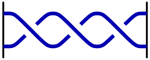
$n = 1$: Avec un seul brin il n'y a que la tresse triviale : 

$n = 2$: Regardons les tresses à 2 brins :

$\dots,$  $,\dots$

s_1^{-3}, s_1^{-2}, s_1^{-1}, $1{=}s_1^0$, s_1^{+1}, s_1^{+2}, s_1^{+3}

Le nombre de croisements n'est pas un invariant, il peut changer !

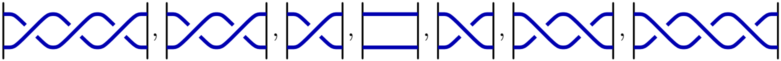
Exemple :  $=$  $\neq$ 

s_1^{+1} $\quad$ $s_1^{+1}{*}s_1^{+1}{*}s_1^{-1}$ $\quad$ s_1^{+3}

Essayons de comprendre ces groupes des tresses…

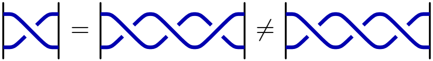
$n = 1$: Avec un seul brin il n'y a que la tresse triviale : 

$n = 2$: Regardons les tresses à 2 brins :



$\ldots,\ s_1^{-3},\ s_1^{-2},\ s_1^{-1},\ 1{=}s_1^{0},\ s_1^{+1},\ s_1^{+2},\ s_1^{+3},\ \ldots$

Le nombre de croisements n'est pas un invariant, il peut changer !

Exemple : 

$s_1^{+1} = s_1^{+1} * s_1^{+1} * s_1^{-1} \neq s_1^{+3}$

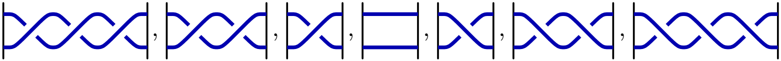
Ce qui compte est la vrille $v\colon$ {tresses} $\to$ {nombres entiers} définie par

$v\Big($$\Big) = +1, \qquad v\Big($$\Big) = -1, \qquad v(A * B) = v(A) + v(B).$

Essayons de comprendre ces groupes des tresses…

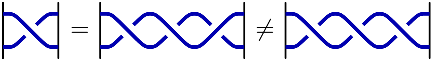
$n = 1$: Avec un seul brin il n'y a que la tresse triviale : 

$n = 2$: Regardons les tresses à 2 brins :



$\ldots,\ s_1^{-3},\ s_1^{-2},\ s_1^{-1},\ 1{=}s_1^{0},\ s_1^{+1},\ s_1^{+2},\ s_1^{+3},\ \ldots$

Le nombre de croisements n'est pas un invariant, il peut changer !

Exemple : 

$s_1^{+1} = s_1^{+1} * s_1^{+1} * s_1^{-1} \neq s_1^{+3}$

Ce qui compte est la vrille $v \colon \{$tresses$\} \to \{$nombres entiers$\}$ définie par

$v\Big($  $\Big) = +1,\qquad v\Big($  $\Big) = -1,\qquad v(A * B) = v(A) + v(B).$

Corollaire (de la présentation d'Artin)

Les tresses à 2 brins sont classifiées par leur vrille, $v \colon (\mathbf{B}_2, *) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}, +)$.

La vrille est un invariant

Corollaire (de la présentation d'Artin)

Pour tout n *la vrille définit un morphisme de groupes* $v\colon \mathbf{B}_n \to \mathbb{Z}$ *tel que*

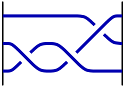
$v\Big($  $\Big) = +1,$ $\qquad$ $v\Big($  $\Big) = -1,$ $\qquad$ $v(A * B) = v(A) + v(B).$

La vrille est un invariant

Corollaire (de la présentation d'Artin)

Pour tout n *la vrille définit un morphisme de groupes* $v\colon \mathbf{B}_n \to \mathbb{Z}$ *tel que*

$v\Big($  $\Big) = +1,\qquad v\Big($  $\Big) = -1,\qquad v(A * B) = v(A) + v(B).$

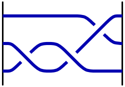
Par exemple, on trouve que $v\Big($  $\Big) = +1 + 1 - 1 = 1$

La vrille est un invariant

Corollaire (de la présentation d'Artin)

Pour tout n la vrille définit un morphisme de groupes $v\colon \mathbf{B}_n \to \mathbb{Z}$ tel que

$v\Big($  $\Big) = +1,\qquad v\Big($  $\Big) = -1,\qquad v(A * B) = v(A) + v(B).$

Par exemple, on trouve que $v\Big($  $\Big) = +1 + 1 - 1 = 1$

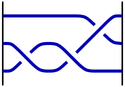
Vérifions que c'est bien un invariant :

La vrille est un invariant

Corollaire (de la présentation d'Artin)

Pour tout n la vrille définit un morphisme de groupes $v\colon \mathbf{B}_n \to \mathbb{Z}$ tel que

$v\Big($  $\Big) = +1,\qquad v\Big($  $\Big) = -1,\qquad v(A * B) = v(A) + v(B).$

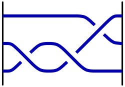
Par exemple, on trouve que $v\Big($  $\Big) = +1 + 1 - 1 = 1$

Vérifions que c'est bien un invariant : $v\Big($  $\Big) = v\Big($  $\Big)$,

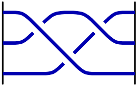
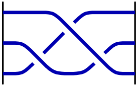
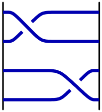
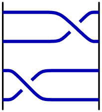
Corollaire (de la présentation d'Artin)

Pour tout n la vrille définit un morphisme de groupes $v\colon \mathbf{B}_n \to \mathbb{Z}$ tel que

$v\Big($  $\Big) = +1, \qquad v\Big($  $\Big) = -1, \qquad v(A * B) = v(A) + v(B).$

Par exemple, on trouve que $v\Big($  $\Big) = +1 + 1 - 1 = 1$

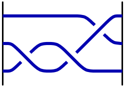
Vérifions que c'est bien un invariant : $v\Big($  $\Big) = v\Big($  $\Big)$,

$v\Big($  $\Big) = v\Big($  $\Big)$, $\quad v\Big($  $\Big) = v\Big($  $\Big)$.

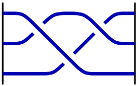
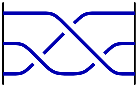
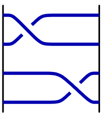
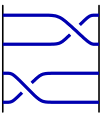
Corollaire (de la présentation d'Artin)

Pour tout n *la vrille définit un morphisme de groupes* $v\colon \mathbf{B}_n \to \mathbb{Z}$ *tel que*

$v($  $) = +1$, $v($  $) = -1$, $v(A * B) = v(A) + v(B)$.

Par exemple, on trouve que $v($  $) = +1 + 1 - 1 = 1$

Vérifions que c'est bien un invariant : $v($  $) = v($  $)$,

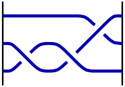
$v($  $) = v($  $)$, $v($  $) = v($  $)$.

Bien entendu, pour $n \geq 3$ la vrille ne suffit plus pour classifier les tresses : les entiers sont commutatifs, alors que les tresses ne le sont pas !

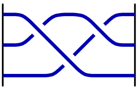
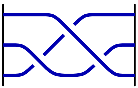
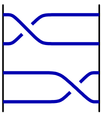
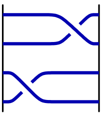
Corollaire (de la présentation d'Artin)

Pour tout n *la vrille définit un morphisme de groupes* $v\colon \mathbf{B}_n \to \mathbb{Z}$ *tel que*

$v\Big($$\Big) = +1,$ $v\Big($$\Big) = -1,$ $v(A * B) = v(A) + v(B).$

Par exemple, on trouve que $v\Big($$\Big) = +1 + 1 - 1 = 1$

Vérifions que c'est bien un invariant : $v\Big($$\Big) = v\Big($$\Big),$

$v\Big($$\Big) = v\Big($$\Big),$ $v\Big($$\Big) = v\Big($$\Big).$

Bien entendu, pour $n \geq 3$ la vrille ne suffit plus pour classifier les tresses : les entiers sont commutatifs, alors que les tresses ne le sont pas !

Recherche récente (de 1984 à présent)

On peut étudier, voire classifier, les tresses à l'aide de matrices.

Complément : le centre de B_n

omettre

Complément : le centre de $\mathbf{B}_n$

Nous avons vu que le groupe $\mathbf{B}_n$ est non commutatif pour $n \geq 3$.

Complément : le centre de $\mathbf{B}_n$

Nous avons vu que le groupe $\mathbf{B}_n$ est non commutatif pour $n \geq 3$.

Certaines tresses commutent, par exemple s_i et s_j pour $|i - j| \geq 2$.

Complément : le centre de $\mathbf{B}_n$

Nous avons vu que le groupe $\mathbf{B}_n$ est non commutatif pour $n \geq 3$.

Certaines tresses commutent, par exemple s_i et s_j pour $|i - j| \geq 2$.

Existe-t-il des tresses qui commutent avec toutes les autres ?

Complément : le centre de $\mathbf{B}_n$

Nous avons vu que le groupe $\mathbf{B}_n$ est non commutatif pour $n \geq 3$.

Certaines tresses commutent, par exemple s_i et s_j pour $|i-j| \geq 2$.

Existe-t-il des tresses qui commutent avec toutes les autres ?

Définition

Une tresse $\gamma \in \mathbf{B}_n$ est dite *centrale* si $\gamma * \alpha = \alpha * \gamma$ pour tout $\alpha \in \mathbf{B}_n$.

Complément : le centre de $\mathbf{B}_n$

Nous avons vu que le groupe $\mathbf{B}_n$ est non commutatif pour $n \geq 3$.

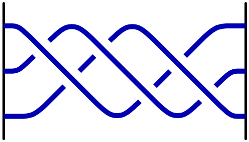
Certaines tresses commutent, par exemple s_i et s_j pour $|i-j| \geq 2$.

Existe-t-il des tresses qui commutent avec toutes les autres ?

Définition

Une tresse $\gamma \in \mathbf{B}_n$ est dite *centrale* si $\gamma * \alpha = \alpha * \gamma$ pour tout $\alpha \in \mathbf{B}_n$.

Dans $\mathbf{B}_n$ la tresse $\tau = (s_1 s_2 \cdots s_{n-1})^n$ représente un tour complet :



Complément : le centre de $\mathbf{B}_n$

Nous avons vu que le groupe $\mathbf{B}_n$ est non commutatif pour $n \geq 3$.

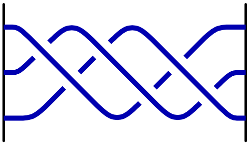
Certaines tresses commutent, par exemple s_i et s_j pour $|i - j| \geq 2$.

Existe-t-il des tresses qui commutent avec toutes les autres ?

Définition

Une tresse $\gamma \in \mathbf{B}_n$ est dite *centrale* si $\gamma * \alpha = \alpha * \gamma$ pour tout $\alpha \in \mathbf{B}_n$.

Dans $\mathbf{B}_n$ la tresse $\tau = (s_1 s_2 \cdots s_{n-1})^n$ représente un tour complet :



La tresse τ est centrale. Par conséquent, τ^k est centrale quelque soit $k \in \mathbb{Z}$.

Complément : le centre de $\mathbf{B}_n$

Nous avons vu que le groupe $\mathbf{B}_n$ est non commutatif pour $n \geq 3$.

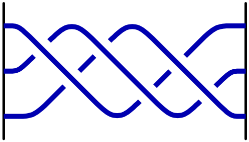
Certaines tresses commutent, par exemple s_i et s_j pour $|i - j| \geq 2$.

Existe-t-il des tresses qui commutent avec toutes les autres ?

Définition

Une tresse $\gamma \in \mathbf{B}_n$ est dite *centrale* si $\gamma * \alpha = \alpha * \gamma$ pour tout $\alpha \in \mathbf{B}_n$.

Dans $\mathbf{B}_n$ la tresse $\tau = (s_1 s_2 \cdots s_{n-1})^n$ représente un tour complet :



La tresse τ est centrale. Par conséquent, τ^k est centrale quelque soit $k \in \mathbb{Z}$.

En fait, nous venons d'épuiser déjà tous les exemples :

Complément : le centre de $\mathbf{B}_n$

Nous avons vu que le groupe $\mathbf{B}_n$ est non commutatif pour $n \geq 3$.

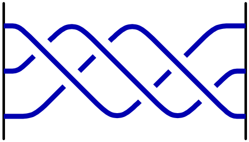
Certaines tresses commutent, par exemple s_i et s_j pour $|i - j| \geq 2$.

Existe-t-il des tresses qui commutent avec toutes les autres ?

Définition

Une tresse $\gamma \in \mathbf{B}_n$ est dite *centrale* si $\gamma * \alpha = \alpha * \gamma$ pour tout $\alpha \in \mathbf{B}_n$.

Dans $\mathbf{B}_n$ la tresse $\tau = (s_1 s_2 \cdots s_{n-1})^n$ représente un tour complet :



La tresse τ est centrale. Par conséquent, τ^k est centrale quelque soit $k \in \mathbb{Z}$.

En fait, nous venons d'épuiser déjà tous les exemples :

Théorème (admis)

Toute tresse centrale est de la forme τ^k pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

Complément : une représentation $\mathrm{B}_3 \to \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$

omettre

Si vous connaissez les matrices, vous pouvez vérifier les calculs suivants :

Complément : une représentation $\mathbf{B}_3 \to \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$

Si vous connaissez les matrices, vous pouvez vérifier les calculs suivants :

La matrice $S_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ est inversible, $S_1^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Complément : une représentation $\mathbf{B}_3 \to \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$

Si vous connaissez les matrices, vous pouvez vérifier les calculs suivants :

La matrice $S_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ est inversible, $S_1^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
La matrice $S_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est inversible, $S_2^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

Complément : une représentation $\mathbf{B}_3 \to \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$

Si vous connaissez les matrices, vous pouvez vérifier les calculs suivants :

La matrice $S_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ est inversible, $S_1^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
La matrice $S_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est inversible, $S_2^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$
Elles vérifient la relation $S_1 S_2 S_1 = S_2 S_1 S_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Si vous connaissez les matrices, vous pouvez vérifier les calculs suivants :

La matrice $S_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ est inversible, $S_1^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
La matrice $S_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est inversible, $S_2^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$
Elles vérifient la relation $S_1 S_2 S_1 = S_2 S_1 S_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Corollaire (de la présentation d'Artin)

Nous avons une représentation $\phi\colon \mathbf{B}_3 \to \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ telle que $\phi(s_1) = S_1$ et $\phi(s_2) = S_2$. (On sous-entend que $\phi(\alpha * \beta) = \phi(\alpha) \cdot \phi(\beta)$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbf{B}_3$.)

Complément : une représentation $\mathbf{B}_3 \to \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$

Si vous connaissez les matrices, vous pouvez vérifier les calculs suivants :

La matrice $S_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ est inversible, $S_1^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
La matrice $S_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est inversible, $S_2^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$
Elles vérifient la relation $S_1 S_2 S_1 = S_2 S_1 S_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Corollaire (de la présentation d'Artin)

Nous avons une représentation $\phi\colon \mathbf{B}_3 \to \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ telle que $\phi(s_1) = S_1$ et $\phi(s_2) = S_2$. (On sous-entend que $\phi(\alpha * \beta) = \phi(\alpha) \cdot \phi(\beta)$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbf{B}_3$.)

Par exemple, $\phi(\tau) = \phi\big((s_1 s_2)^3\big) = (S_1 S_2)^3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)^3 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Complément : une représentation $\mathbf{B}_3 \to \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$

Si vous connaissez les matrices, vous pouvez vérifier les calculs suivants :

La matrice $S_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ est inversible, $S_1^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
La matrice $S_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est inversible, $S_2^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$
Elles vérifient la relation $S_1 S_2 S_1 = S_2 S_1 S_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Corollaire (de la présentation d'Artin)

Nous avons une représentation $\phi\colon \mathbf{B}_3 \to \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ *telle que* $\phi(s_1) = S_1$ *et* $\phi(s_2) = S_2$*. (On sous-entend que* $\phi(\alpha * \beta) = \phi(\alpha) \cdot \phi(\beta)$ *pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbf{B}_3$*.)*

Par exemple, $\phi(\tau) = \phi\big((s_1 s_2)^3\big) = (S_1 S_2)^3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)^3 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.
D'un autre coté on a $\tau = s_1 s_2 s_1 s_2 s_1 s_2 = s_1 s_2 s_1 s_1 s_2 s_1 = (s_1 s_2 s_1)^2$.

Complément : une représentation $\mathbf{B}_3 \to \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$

Si vous connaissez les matrices, vous pouvez vérifier les calculs suivants :

La matrice $S_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ est inversible, $S_1^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
La matrice $S_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est inversible, $S_2^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$
Elles vérifient la relation $S_1 S_2 S_1 = S_2 S_1 S_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Corollaire (de la présentation d'Artin)

Nous avons une représentation $\phi\colon \mathbf{B}_3 \to \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ *telle que* $\phi(s_1) = S_1$ *et* $\phi(s_2) = S_2$*. (On sous-entend que* $\phi(\alpha * \beta) = \phi(\alpha) \cdot \phi(\beta)$ *pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbf{B}_3$*.)*

Par exemple, $\phi(\tau) = \phi\big((s_1 s_2)^3\big) = (S_1 S_2)^3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)^3 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.
D'un autre coté on a $\tau = s_1 s_2 s_1 s_2 s_1 s_2 = s_1 s_2 s_1 s_1 s_2 s_1 = (s_1 s_2 s_1)^2$.
Ainsi $\phi(\tau) = \phi\big((s_1 s_2 s_1)^2\big) = (S_1 S_2 S_1)^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Complément : une représentation $\mathbf{B}_3 \to \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$

Si vous connaissez les matrices, vous pouvez vérifier les calculs suivants :

La matrice $S_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ est inversible, $S_1^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
La matrice $S_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est inversible, $S_2^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$
Elles vérifient la relation $S_1 S_2 S_1 = S_2 S_1 S_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Corollaire (de la présentation d'Artin)

Nous avons une représentation $\phi\colon \mathbf{B}_3 \to \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ *telle que* $\phi(s_1) = S_1$ *et* $\phi(s_2) = S_2$. *(On sous-entend que* $\phi(\alpha * \beta) = \phi(\alpha) \cdot \phi(\beta)$ *pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbf{B}_3$.*)*

Par exemple, $\phi(\tau) = \phi\big((s_1 s_2)^3\big) = (S_1 S_2)^3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)^3 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.
D'un autre coté on a $\tau = s_1 s_2 s_1 s_2 s_1 s_2 = s_1 s_2 s_1 s_1 s_2 s_1 = (s_1 s_2 s_1)^2$.
Ainsi $\phi(\tau) = \phi\big((s_1 s_2 s_1)^2\big) = (S_1 S_2 S_1)^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.
Quelque soit le cheminement, le résultat est bien défini !

Complément : classification des tresses à 3 brins

omettre

Nous avons calculé que $\phi(\tau) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Par conséquent $\phi(\tau^2) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Nous avons calculé que $\phi(\tau) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Par conséquent $\phi(\tau^2) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
La représentation $\phi\colon \mathbf{B}_3 \to \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ construite n'est donc pas fidèle :

Complément : classification des tresses à 3 brins

Nous avons calculé que $\phi(\tau) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Par conséquent $\phi(\tau^2) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
La représentation $\phi\colon \mathbf{B}_3 \to \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ construite n'est donc pas fidèle :
elle ne distingue pas la tresse τ^2 et la tresse triviale.

Complément : classification des tresses à 3 brins

Nous avons calculé que $\phi(\tau) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Par conséquent $\phi(\tau^2) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
La représentation $\phi\colon \mathbf{B}_3 \to \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ construite n'est donc pas fidèle :
elle ne distingue pas la tresse τ^2 et la tresse triviale. C'est son seul défaut :

Théorème (admis)

Si une tresse $\beta \in \mathbf{B}_3$ vérifie $\phi(\beta) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ alors $\beta = \tau^{2k}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

Complément : classification des tresses à 3 brins

Nous avons calculé que $\phi(\tau) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Par conséquent $\phi(\tau^2) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
La représentation $\phi\colon \mathbf{B}_3 \to \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ construite n'est donc pas fidèle :
elle ne distingue pas la tresse τ^2 et la tresse triviale. C'est son seul défaut :

Théorème (admis)

Si une tresse $\beta \in \mathbf{B}_3$ vérifie $\phi(\beta) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ alors $\beta = \tau^{2k}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

Corollaire

Si $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$, alors $\alpha = \beta\tau^{2k}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

Complément : classification des tresses à 3 brins

Nous avons calculé que $\phi(\tau) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Par conséquent $\phi(\tau^2) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
La représentation $\phi\colon \mathbf{B}_3 \to \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ construite n'est donc pas fidèle :
elle ne distingue pas la tresse τ^2 et la tresse triviale. C'est son seul défaut :

Théorème (admis)

Si une tresse $\beta \in \mathbf{B}_3$ vérifie $\phi(\beta) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ alors $\beta = \tau^{2k}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

Corollaire

Si $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$, alors $\alpha = \beta\tau^{2k}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Si $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$, alors $\phi(\alpha\beta^{-1}) = \phi(\alpha)\phi(\beta)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Complément : classification des tresses à 3 brins

Nous avons calculé que $\phi(\tau) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Par conséquent $\phi(\tau^2) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
La représentation $\phi\colon \mathbf{B}_3 \to \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ construite n'est donc pas fidèle :
elle ne distingue pas la tresse τ^2 et la tresse triviale. C'est son seul défaut :

Théorème (admis)

Si une tresse $\beta \in \mathbf{B}_3$ vérifie $\phi(\beta) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ alors $\beta = \tau^{2k}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

Corollaire

Si $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$, alors $\alpha = \beta\tau^{2k}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Si $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$, alors $\phi(\alpha\beta^{-1}) = \phi(\alpha)\phi(\beta)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Ainsi $\alpha\beta^{-1} = \tau^{2k}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$, ce qui veut dire que $\alpha = \beta\tau^{2k}$. $\square$

Complément : classification des tresses à 3 brins

Nous avons calculé que $\phi(\tau) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Par conséquent $\phi(\tau^2) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
La représentation $\phi\colon \mathbf{B}_3 \to \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ construite n'est donc pas fidèle :
elle ne distingue pas la tresse τ^2 et la tresse triviale. C'est son seul défaut :

Théorème (admis)

Si une tresse $\beta \in \mathbf{B}_3$ vérifie $\phi(\beta) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ alors $\beta = \tau^{2k}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

Corollaire

Si $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$, alors $\alpha = \beta\tau^{2k}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Si $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$, alors $\phi(\alpha\beta^{-1}) = \phi(\alpha)\phi(\beta)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Ainsi $\alpha\beta^{-1} = \tau^{2k}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$, ce qui veut dire que $\alpha = \beta\tau^{2k}$. $\square$

Corollaire

La représentation ϕ et la vrille v classifient les tresses à 3 brins.

Complément : classification des tresses à 3 brins

Nous avons calculé que $\phi(\tau) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Par conséquent $\phi(\tau^2) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
La représentation $\phi\colon \mathbf{B}_3 \to \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ construite n'est donc pas fidèle :
elle ne distingue pas la tresse τ^2 et la tresse triviale. C'est son seul défaut :

Théorème (admis)

Si une tresse $\beta \in \mathbf{B}_3$ vérifie $\phi(\beta) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ alors $\beta = \tau^{2k}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

Corollaire

Si $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$, alors $\alpha = \beta\tau^{2k}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Si $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$, alors $\phi(\alpha\beta^{-1}) = \phi(\alpha)\phi(\beta)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Ainsi $\alpha\beta^{-1} = \tau^{2k}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$, ce qui veut dire que $\alpha = \beta\tau^{2k}$. $\square$

Corollaire

La représentation ϕ et la vrille v classifient les tresses à 3 brins.

Démonstration. Si $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$, alors $\alpha = \beta\tau^{2k}$.
Si en plus $v(\alpha) = v(\beta)$, alors $k = 0$ et $\alpha = \beta$. $\square$

Complément : classification des tresses à 3 brins

Nous avons calculé que $\phi(\tau) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Par conséquent $\phi(\tau^2) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
La représentation $\phi \colon \mathbf{B}_3 \to \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ construite n'est donc pas fidèle :
elle ne distingue pas la tresse τ^2 et la tresse triviale. C'est son seul défaut :

Théorème (admis)

Si une tresse $\beta \in \mathbf{B}_3$ vérifie $\phi(\beta) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ alors $\beta = \tau^{2k}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

Corollaire

Si $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$, alors $\alpha = \beta\tau^{2k}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Si $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$, alors $\phi(\alpha\beta^{-1}) = \phi(\alpha)\phi(\beta)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Ainsi $\alpha\beta^{-1} = \tau^{2k}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$, ce qui veut dire que $\alpha = \beta\tau^{2k}$. $\square$

Corollaire

La représentation ϕ et la vrille v classifient les tresses à 3 brins.

Démonstration. Si $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$, alors $\alpha = \beta\tau^{2k}$.
Si en plus $v(\alpha) = v(\beta)$, alors $k = 0$ et $\alpha = \beta$. $\square$

Ce beau résultat donne un algorithme pour reconnaître les tresses à 3 brins.

Complément : classification des tresses à 3 brins

Nous avons calculé que $\phi(\tau) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Par conséquent $\phi(\tau^2) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
La représentation $\phi\colon \mathbf{B}_3 \to \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ construite n'est donc pas fidèle :
elle ne distingue pas la tresse τ^2 et la tresse triviale. C'est son seul défaut :

Théorème (admis)

Si une tresse $\beta \in \mathbf{B}_3$ vérifie $\phi(\beta) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ alors $\beta = \tau^{2k}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

Corollaire

Si $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$, alors $\alpha = \beta\tau^{2k}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Si $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$, alors $\phi(\alpha\beta^{-1}) = \phi(\alpha)\phi(\beta)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Ainsi $\alpha\beta^{-1} = \tau^{2k}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$, ce qui veut dire que $\alpha = \beta\tau^{2k}$. $\square$

Corollaire

La représentation ϕ et la vrille v classifient les tresses à 3 brins.

Démonstration. Si $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$, alors $\alpha = \beta\tau^{2k}$.
Si en plus $v(\alpha) = v(\beta)$, alors $k = 0$ et $\alpha = \beta$. $\square$

Ce beau résultat donne un algorithme pour reconnaître les tresses à 3 brins.

Théorème (Krammer, Bigelow 2001)

Pour tout n il existe une représentation fidèle $\mathbf{B}_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_m\mathbb{R}$.

Complément : le groupe $\mathbf{B}_n$ est ordonnable

omettre

Complément : le groupe $\mathbf{B}_n$ est ordonnable

Le groupe $B_2 = \{ \ s_1^k \mid k \in \mathbb{Z} \ \} \cong \mathbb{Z}$ est ordonnable :
les tresses « positives » $P = \{ \ s_1^k \mid k > 0 \ \}$ vérifient

1. $B_2 = P \sqcup \{1\} \sqcup P^{-1}$ (Trichotomie)
2. $P * P \subset P$ (Stabilité par concaténation)

Complément : le groupe $\mathbf{B}_n$ est ordonnable

Le groupe $B_2 = \{ \ s_1^k \mid k \in \mathbb{Z} \ \} \cong \mathbb{Z}$ est ordonnable :
les tresses « positives » $P = \{ \ s_1^k \mid k > 0 \ \}$ vérifient

1. $B_2 = P \sqcup \{1\} \sqcup P^{-1}$ (Trichotomie)
2. $P * P \subset P$ (Stabilité par concaténation)

Ceci permet de définir l'ordre $a < b$ par $a^{-1}b \in P$:

1. On a soit $a < b$ soit $a = b$ soit $b < a$. (Antisymétrie)
2. Si $a < b$ et $b < c$, alors $a < c$. (Transitivité)

Complément : le groupe $\mathbf{B}_n$ est ordonnable

Le groupe $B_2 = \{ s_1^k \mid k \in \mathbb{Z} \} \cong \mathbb{Z}$ est ordonnable :
les tresses « positives » $P = \{ s_1^k \mid k > 0 \}$ vérifient

1. $B_2 = P \sqcup \{1\} \sqcup P^{-1}$ (Trichotomie)
2. $P * P \subset P$ (Stabilité par concaténation)

Ceci permet de définir l'ordre $a < b$ par $a^{-1}b \in P$:

1. On a soit $a < b$ soit $a = b$ soit $b < a$. (Antisymétrie)
2. Si $a < b$ et $b < c$, alors $a < c$. (Transitivité)

À la surprise générale, Patrick Dehornoy découvrit en 1992 que tout groupe $\mathbf{B}_n$ est ordonnable, quelque soit le nombre n de brins :

Théorème (Dehornoy 1992)

Le groupe des tresses $\mathbf{B}_n$ peut être ordonné, les éléments positifs étant

$$P = \left\{ b_0 s_i b_1 \cdots s_i b_k \;\middle|\; 1 \leq i < n,\ k \geq 1,\ b_0, b_1, \ldots b_k \in \langle s_{i+1}, \ldots, s_{n-1} \rangle \right\}$$

Démonstration. La stabilité $P * P \subset P$ est très facile à voir.
La trichotomie $P \sqcup \{1\} \sqcup P^{-1}$ est difficile et nous l'admettons ici. □

Remarque

Il existe des algorithmes efficaces pour déterminer si une tresse est positive, négative, ou triviale. Ceci permet de classifier les tresses à n brins.

Frise chronologique

omettre

Frise chronologique

Depuis toujours : usages pratiques et décoratifs

Frise chronologique

Depuis toujours : usages pratiques et décoratifs

$\vdots$

$\approx$ 1830 C.-F. Gauss (Göttingen) : quelques essais sur les tresses

Frise chronologique

Depuis toujours : usages pratiques et décoratifs

$\vdots$

$\approx$ 1830 C.-F. Gauss (Göttingen) : quelques essais sur les tresses

$\vdots$

1867 W. Thomson [Lord Kelvin] : atomes comme nœuds dans l'éther

1870-1890 P.G. Tait, C.N. Little, T.P. Kirkman : tabulation empirique

Frise chronologique

Depuis toujours : usages pratiques et décoratifs

⋮

$\approx$ 1830 C.-F. Gauss (Göttingen) : quelques essais sur les tresses

⋮

1867 W. Thomson [Lord Kelvin] : atomes comme nœuds dans l'éther

1870-1890 P.G. Tait, C.N. Little, T.P. Kirkman : tabulation empirique

⋮

1924 J.W. Alexander (Princeton) : nœuds sous forme de tresses

1925 E. Artin (Hambourg) : première étude du groupe des tresses

1945 A.A. Markov (Moscou) : correspondance entre tresses et nœuds

Frise chronologique

Depuis toujours : usages pratiques et décoratifs

⋮

$\approx$ 1830 C.-F. Gauss (Göttingen) : quelques essais sur les tresses

⋮

1867 W. Thomson [Lord Kelvin] : atomes comme nœuds dans l'éther
1870-1890 P.G. Tait, C.N. Little, T.P. Kirkman : tabulation empirique

⋮

1924 J.W. Alexander (Princeton) : nœuds sous forme de tresses
1925 E. Artin (Hambourg) : première étude du groupe des tresses
1945 A.A. Markov (Moscou) : correspondance entre tresses et nœuds

⋮

1984 V. Jones (Berkeley) : représentations « quantiques » des tresses et invariants « quantiques » des nœuds (Médaille Fields 1990)

Frise chronologique

Depuis toujours : usages pratiques et décoratifs

⋮

$\approx$ 1830 C.-F. Gauss (Göttingen) : quelques essais sur les tresses

⋮

1867 W. Thomson [Lord Kelvin] : atomes comme nœuds dans l'éther
1870-1890 P.G. Tait, C.N. Little, T.P. Kirkman : tabulation empirique

⋮

1924 J.W. Alexander (Princeton) : nœuds sous forme de tresses
1925 E. Artin (Hambourg) : première étude du groupe des tresses
1945 A.A. Markov (Moscou) : correspondance entre tresses et nœuds

⋮

1984 V. Jones (Berkeley) : représentations « quantiques » des tresses et invariants « quantiques » des nœuds (Médaille Fields 1990)

⋮

1994 P. Dehornoy (Caen) : le groupe des tresses est ordonnable.

Frise chronologique

Depuis toujours : usages pratiques et décoratifs

⋮

$\approx$ 1830 C.-F. Gauss (Göttingen) : quelques essais sur les tresses

⋮

1867 W. Thomson [Lord Kelvin] : atomes comme nœuds dans l'éther
1870-1890 P.G. Tait, C.N. Little, T.P. Kirkman : tabulation empirique

⋮

1924 J.W. Alexander (Princeton) : nœuds sous forme de tresses
1925 E. Artin (Hambourg) : première étude du groupe des tresses
1945 A.A. Markov (Moscou) : correspondance entre tresses et nœuds

⋮

1984 V. Jones (Berkeley) : représentations « quantiques » des tresses et invariants « quantiques » des nœuds (Médaille Fields 1990)

⋮

1994 P. Dehornoy (Caen) : le groupe des tresses est ordonnable.

⋮

2001 D. Krammer, S. Bigelow : représentation fidèle par des matrices

Frise chronologique

Depuis toujours : usages pratiques et décoratifs

⋮

$\approx$ 1830 C.-F. Gauss (Göttingen) : quelques essais sur les tresses

⋮

1867 W. Thomson [Lord Kelvin] : atomes comme nœuds dans l'éther
1870-1890 P.G. Tait, C.N. Little, T.P. Kirkman : tabulation empirique

⋮

1924 J.W. Alexander (Princeton) : nœuds sous forme de tresses
1925 E. Artin (Hambourg) : première étude du groupe des tresses
1945 A.A. Markov (Moscou) : correspondance entre tresses et nœuds

⋮

1984 V. Jones (Berkeley) : représentations « quantiques » des tresses et invariants « quantiques » des nœuds (Médaille Fields 1990)

⋮

1994 P. Dehornoy (Caen) : le groupe des tresses est ordonnable.

⋮

2001 D. Krammer, S. Bigelow : représentation fidèle par des matrices

⋮

En mathématiques, tout était déjà connu à nos ancêtres ? Loin de cela !
Les mathématiques sont bien vivantes et évoluent constamment.

Il y a plusieurs motivations pour explorer ces structures mathématiques.

À quoi ça sert ? À quoi servent les mathématiques ?

Il y a plusieurs motivations pour explorer ces structures mathématiques.

- D'abord et avant tout, parce que c'est joli.

À quoi ça sert ? À quoi servent les mathématiques ?

Il y a plusieurs motivations pour explorer ces structures mathématiques.

- D'abord et avant tout, parce que c'est joli.
- L'être humain est curieux et ressent le désir de comprendre.

À quoi ça sert ? À quoi servent les mathématiques ?

Il y a plusieurs motivations pour explorer ces structures mathématiques.

- D’abord et avant tout, parce que c’est joli.
- L’être humain est curieux et ressent le désir de comprendre.
- Les mathématiques s’inspirent du monde réel.

À quoi ça sert ? À quoi servent les mathématiques ?

Il y a plusieurs motivations pour explorer ces structures mathématiques.

- D'abord et avant tout, parce que c'est joli.
- L'être humain est curieux et ressent le désir de comprendre.
- Les mathématiques s'inspirent du monde réel.
- Les mathématiques sont efficaces.

À quoi ça sert ? À quoi servent les mathématiques ?

Il y a plusieurs motivations pour explorer ces structures mathématiques.

- D'abord et avant tout, parce que c'est joli.
- L'être humain est curieux et ressent le désir de comprendre.
- Les mathématiques s'inspirent du monde réel.
- Les mathématiques sont efficaces.

Ainsi les mathématiques fournissent un langage et des outils

À quoi ça sert ? À quoi servent les mathématiques ?

Il y a plusieurs motivations pour explorer ces structures mathématiques.

- D'abord et avant tout, parce que c'est joli.
- L'être humain est curieux et ressent le désir de comprendre.
- Les mathématiques s'inspirent du monde réel.
- Les mathématiques sont efficaces.

Ainsi les mathématiques fournissent un langage et des outils

... à court terme pour la question immédiate (mathématique),

À quoi ça sert ? À quoi servent les mathématiques ?

Il y a plusieurs motivations pour explorer ces structures mathématiques.

- D'abord et avant tout, parce que c'est joli.
- L'être humain est curieux et ressent le désir de comprendre.
- Les mathématiques s'inspirent du monde réel.
- Les mathématiques sont efficaces.

Ainsi les mathématiques fournissent un langage et des outils

... à court terme pour la question immédiate (mathématique),

... à moyen terme pour les domaines qui s'en servent (sciences),

À quoi ça sert ? À quoi servent les mathématiques ?

Il y a plusieurs motivations pour explorer ces structures mathématiques.

- D'abord et avant tout, parce que c'est joli.
- L'être humain est curieux et ressent le désir de comprendre.
- Les mathématiques s'inspirent du monde réel.
- Les mathématiques sont efficaces.

Ainsi les mathématiques fournissent un langage et des outils

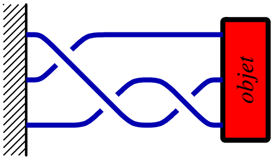
... à court terme pour la question immédiate (mathématique),

... à moyen terme pour les domaines qui s'en servent (sciences),

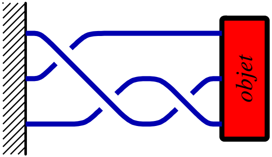
... à long terme pour les applications concrètes (technologie).

Tresses de Dirac (théorie de l'électron, prix Nobel 1933)

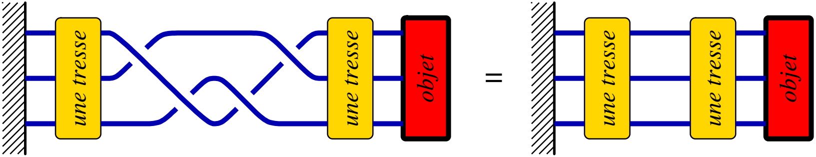
Tresses de Dirac : on remplace le mur à droite par un objet mobile.
Restriction : il est autorisé de se déplacer mais pas de tourner.



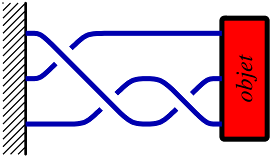
Tresses de Dirac : on remplace le mur à droite par un objet mobile.
Restriction : il est autorisé de se déplacer mais pas de tourner.



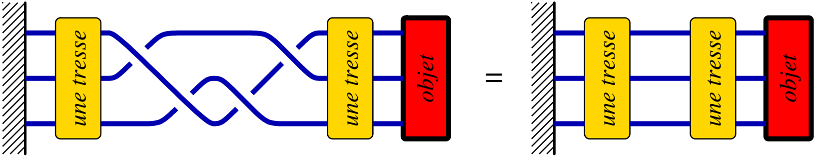
Seul nouveau mouvement : on peut passer un brin *autour* de l'objet.



Tresses de Dirac : on remplace le mur à droite par un objet mobile.
Restriction : il est autorisé de se déplacer mais pas de tourner.



Seul nouveau mouvement : on peut passer un brin *autour* de l’objet.

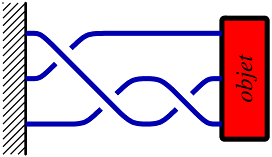


Théorème (Newman 1942 ; Fadell 1962)

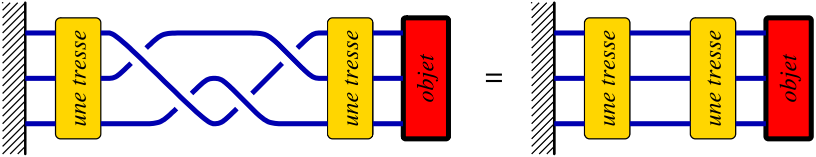
Les tresses de Dirac à n brins forment à nouveau un groupe.

Tresses de Dirac (théorie de l'électron, prix Nobel 1933)

Tresses de Dirac : on remplace le mur à droite par un objet mobile.
Restriction : il est autorisé de se déplacer mais pas de tourner.



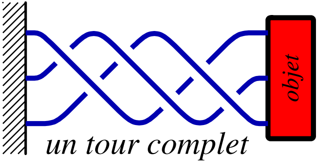
Seul nouveau mouvement : on peut passer un brin *autour* de l'objet.



Théorème (Newman 1942 ; Fadell 1962)

Les tresses de Dirac à n brins forment à nouveau un groupe.
Il s'agit de $\mathbf{B}_n$ modulo la relation supplémentaire $s_1 \cdots s_{n-1} s_{n-1} \cdots s_1 = 1$.

La tresse suivante τ est-elle équivalente à la tresse triviale ? Preuve ?



Le twist de Dirac

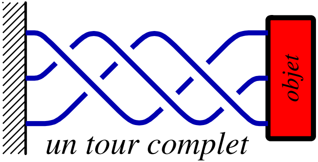
La tresse suivante τ est-elle équivalente à la tresse triviale ? Preuve ?

L'observation-clé :

$v\Big($  $\Big) - v\Big($  $\Big) = 4$

Le twist de Dirac

La tresse suivante τ est-elle équivalente à la tresse triviale ? Preuve ?



L'observation-clé :

$v\Big($  $\Big) - v\Big($  $\Big) = 4$

La tresse τ^2 est-elle équivalente à la tresse triviale ? Preuve ?

Plan de l'exposé

1 Origines historiques et motivations

2 Tresses

3 Nœuds
- Comment modéliser les nœuds ?
- Comment calculer avec les nœuds ?
- Existe-t-il des nœuds inverses ?

4 Entrelacs

Une expérience mathémagique

Peut-on *nouer* une corde
par un geste d'une seule main ?

Peut-on *dénouer* la corde
de la même manière ?

Une expérience mathémagique

Peut-on *nouer* une corde par un geste d'une seule main ?

Peut-on *dénouer* la corde de la même manière ?

Stratégies complémentaires :

Une expérience mathémagique

Peut-on *nouer* une corde par un geste d'une seule main ?

Peut-on *dénouer* la corde de la même manière ?

Stratégies complémentaires :

- Pour prouver qu'un objectif peut être atteint, il suffit de le faire.
  En mathématiques on appelle cela une « preuve constructive ».

Une expérience mathémagique

Peut-on *nouer* une corde
par un geste d'une seule main ?

Peut-on *dénouer* la corde
de la même manière ?

Stratégies complémentaires :

- Pour prouver qu'un objectif peut être atteint, il suffit de le faire.
  En mathématiques on appelle cela une « preuve constructive ».
- Pour prouver que c'est impossible, il ne suffit pas d'échouer.
  Il faut identifier l'obstacle !

Une expérience mathémagique

Peut-on *nouer* une corde
par un geste d'une seule main ?

Peut-on *dénouer* la corde
de la même manière ?

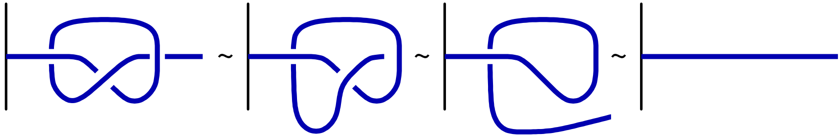
Stratégies complémentaires :

- Pour prouver qu'un objectif peut être atteint, il suffit de le faire.
  En mathématiques on appelle cela une « preuve constructive ».
- Pour prouver que c'est impossible, il ne suffit pas d'échouer.
  Il faut identifier l'obstacle !

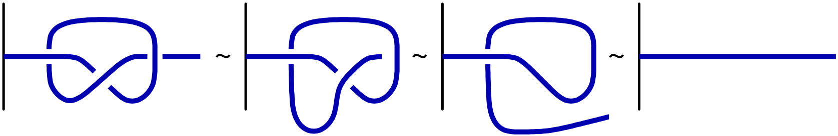
La première question est réglée. Pour la seconde il nous faudra des maths !

Comment modéliser les nœuds ?

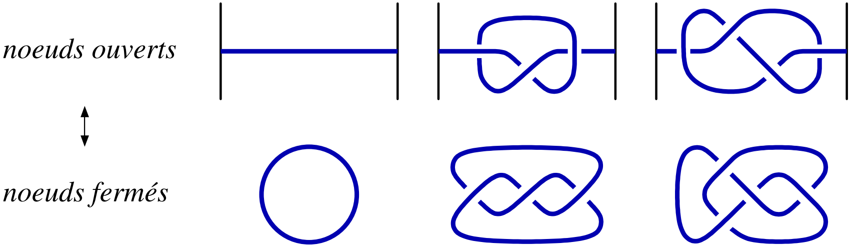
Observation — Dans un modèle trop naïf, tous les nœuds sont égaux :



Observation — Dans un modèle trop naïf, tous les nœuds sont égaux :



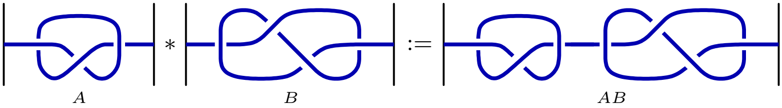
Deux solutions sont possibles et s'avèrent équivalentes :



Comme avant le brin peut bouger.

La concaténation des nœuds

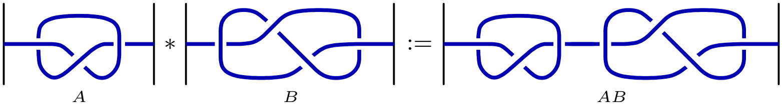
Les nœuds jouissent d'une concaténation naturelle :



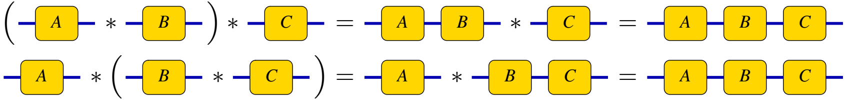
Est-elle associative ? $(A * B) * C = A * (B * C)$?

La concaténation des nœuds

Les nœuds jouissent d'une concaténation naturelle :

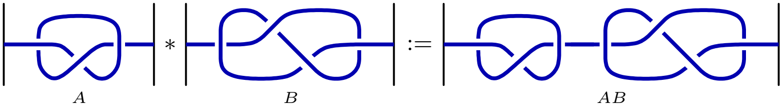


Est-elle associative ? $(A * B) * C = A * (B * C)$? Bien sûr !

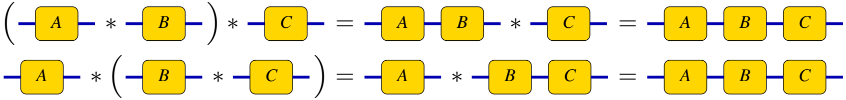


Admet-elle un élément neutre ? $A * 1 = A$ et $1 * A = A$?

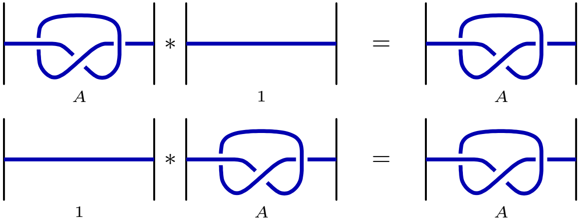
Les nœuds jouissent d'une concaténation naturelle :



Est-elle associative ? $(A * B) * C = A * (B * C)$? Bien sûr !



Admet-elle un élément neutre ? $A * 1 = A$ et $1 * A = A$? Bien sûr !

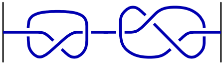


La concaténation des nœuds (suite)

Est-elle commutative ? $A * B = B * A$?

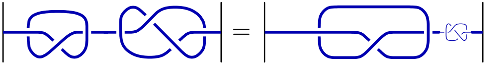
La concaténation des nœuds (suite)

Est-elle commutative ? $A * B = B * A$? Contrairement aux tresses, oui !



La concaténation des nœuds (suite)

Est-elle commutative ? $A * B = B * A$? Contrairement aux tresses, oui !

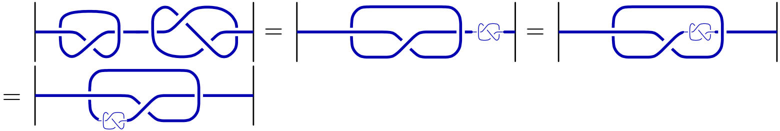


La concaténation des nœuds (suite)

Est-elle commutative ? $A * B = B * A$? Contrairement aux tresses, oui !

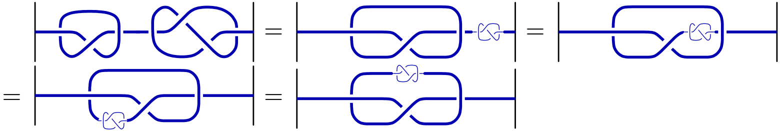
La concaténation des nœuds (suite)

Est-elle commutative ? $A * B = B * A$? Contrairement aux tresses, oui !



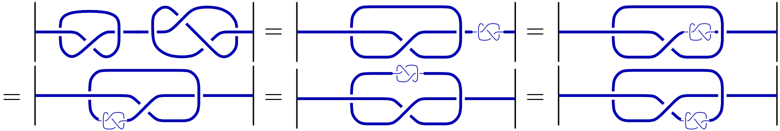
La concaténation des nœuds (suite)

Est-elle commutative ? $A * B = B * A$? Contrairement aux tresses, oui !

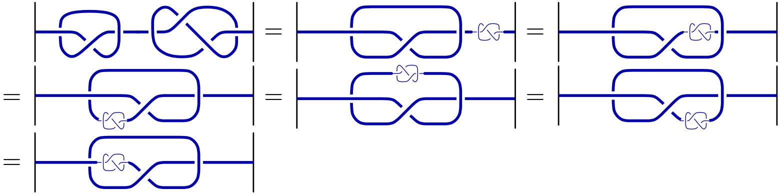


La concaténation des nœuds (suite)

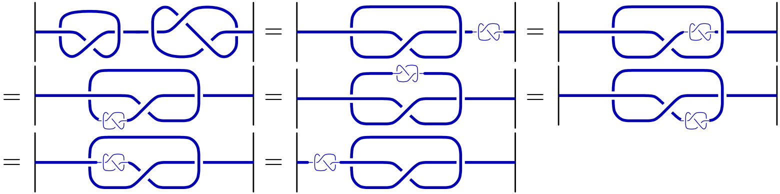
Est-elle commutative ? $A * B = B * A$? Contrairement aux tresses, oui !



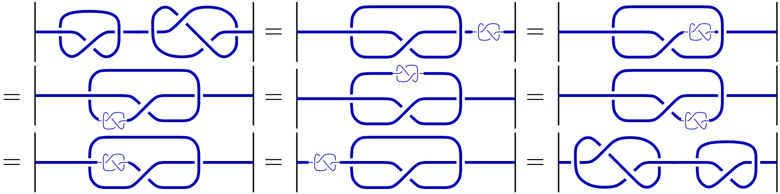
Est-elle commutative ? $A * B = B * A$? Contrairement aux tresses, oui !



Est-elle commutative ? $A * B = B * A$? Contrairement aux tresses, oui !

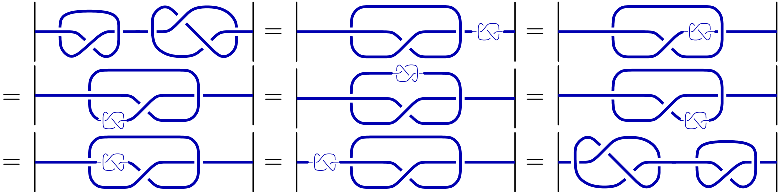


Est-elle commutative ? $A * B = B * A$? Contrairement aux tresses, oui !



La concaténation des nœuds (suite)

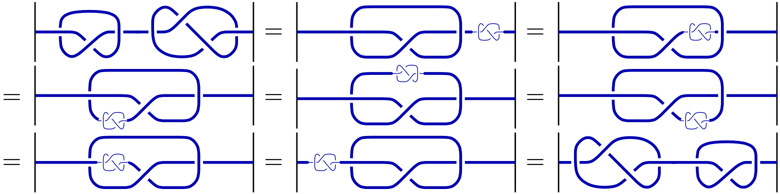
Est-elle commutative ? $A * B = B * A$? Contrairement aux tresses, oui !



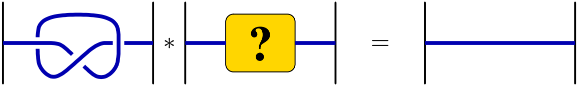
Existe-t-il des éléments inverses ? $A * A^{-1} = 1$ et $A^{-1} * A = 1$?

La concaténation des nœuds (suite)

Est-elle commutative ? $A * B = B * A$? Contrairement aux tresses, oui !

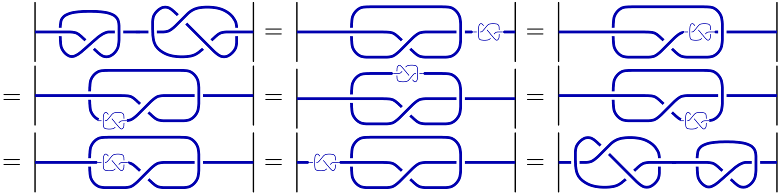


Existe-t-il des éléments inverses ? $A * A^{-1} = 1$ et $A^{-1} * A = 1$?

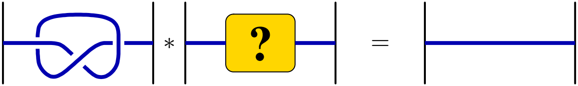


La concaténation des nœuds (suite)

Est-elle commutative ? $A * B = B * A$? Contrairement aux tresses, oui !

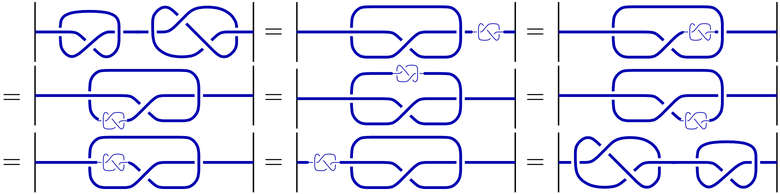


Existe-t-il des éléments inverses ? $A * A^{-1} = 1$ et $A^{-1} * A = 1$?

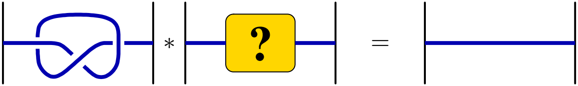


C’est notre question initiale concernant le « jonglage topologique » !

Est-elle commutative ? $A * B = B * A$? Contrairement aux tresses, oui !



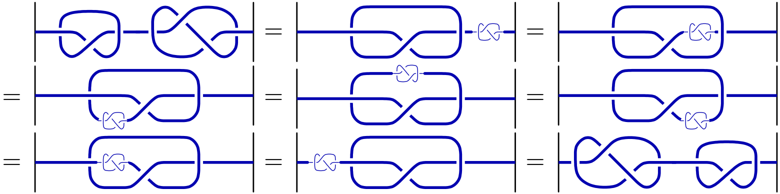
Existe-t-il des éléments inverses ? $A * A^{-1} = 1$ et $A^{-1} * A = 1$?



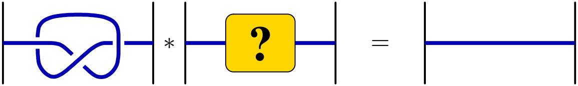
C'est notre question initiale concernant le « jonglage topologique » !

Stratégies complémentaires :

Est-elle commutative ? $A * B = B * A$? Contrairement aux tresses, oui !



Existe-t-il des éléments inverses ? $A * A^{-1} = 1$ et $A^{-1} * A = 1$?



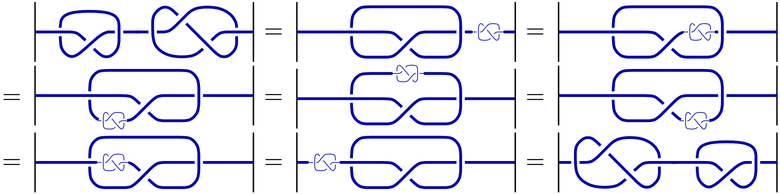
C'est notre question initiale concernant le « jonglage topologique » !

Stratégies complémentaires :

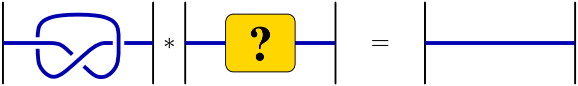
- Pour prouver qu'un objectif peut être atteint, il suffit de le faire.

La concaténation des nœuds (suite)

Est-elle commutative ? $A * B = B * A$? Contrairement aux tresses, oui !



Existe-t-il des éléments inverses ? $A * A^{-1} = 1$ et $A^{-1} * A = 1$?



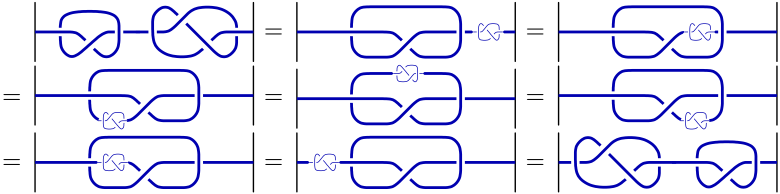
C'est notre question initiale concernant le « jonglage topologique » !

Stratégies complémentaires :

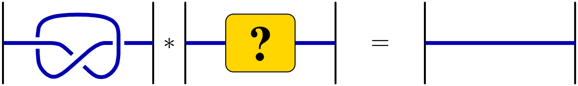
- Pour prouver qu'un objectif peut être atteint, il suffit de le faire.
- Pour prouver qu'un objectif est impossible, il faut identifier l'obstacle !

La concaténation des nœuds (suite)

Est-elle commutative ? $A * B = B * A$? Contrairement aux tresses, oui !



Existe-t-il des éléments inverses ? $A * A^{-1} = 1$ et $A^{-1} * A = 1$?



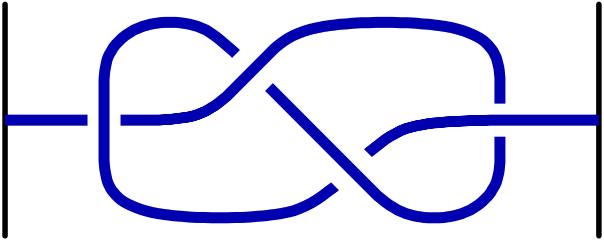
C'est notre question initiale concernant le « jonglage topologique » !

Stratégies complémentaires :

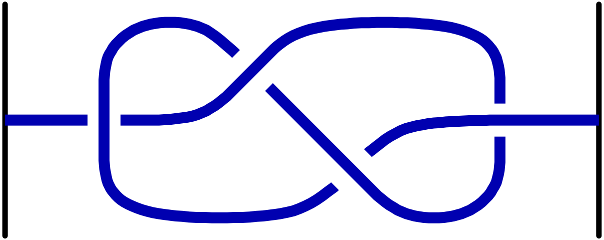
- Pour prouver qu'un objectif peut être atteint, il suffit de le faire.
- Pour prouver qu'un objectif est impossible, il faut identifier l'obstacle !

Pour les nœuds inverses on vient de franchir la première étape :
on a reformulé le problème en termes mathématiques.

Ceci n'est pas un nœud.



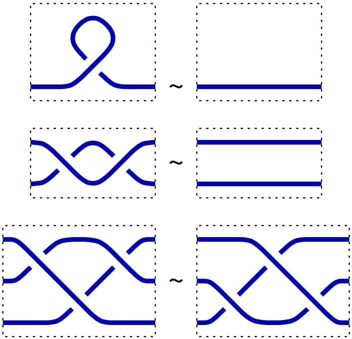
Ceci n'est pas un nœud.



(Ce n'est qu'un diagramme d'un nœud.)

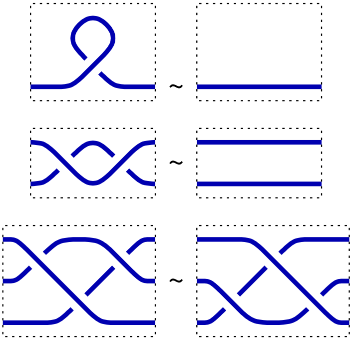
Mouvements de Reidemeister

Les mouvements locaux suivants modifient le *diagramme*, mais pas le *nœud* :



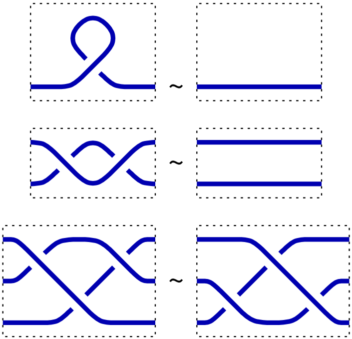
Mouvements de Reidemeister

Les mouvements locaux suivants modifient le *diagramme*, mais pas le *nœud* :



Ces trois mouvements locaux suffisent !

Les mouvements locaux suivants modifient le *diagramme*, mais pas le *nœud* :



Ces trois mouvements locaux suffisent !

Théorème (Reidemeister 1926)

Deux diagrammes représentent le même nœud si et seulement si l'un se transforme en l'autre par des mouvements de Reidemeister.

Complément : la classification des nœuds est difficile

omettre

Complément : la classification des nœuds est difficile

Problème de classification : étant donnés deux nœuds, disons sous forme de diagrammes planaires, comment déterminer s'ils sont équivalents ou non ?

$$? = ?$$

Le théorème de Reidemeister ne fournit pas d'algorithme !

Problème de classification : étant donnés deux nœuds, disons sous forme de diagrammes planaires, comment déterminer s'ils sont équivalents ou non ?

$$? = ?$$

Le théorème de Reidemeister ne fournit pas d'algorithme !

- Si vous avez la chance de trouver une suite de mouvements de Reidemeister menant de l'un à l'autre, alors ils sont équivalents.

Complément : la classification des nœuds est difficile

Problème de classification : étant donnés deux nœuds, disons sous forme de diagrammes planaires, comment déterminer s'ils sont équivalents ou non ?

$? = ?$

Le théorème de Reidemeister ne fournit pas d'algorithme !

- Si vous avez la chance de trouver une suite de mouvements de Reidemeister menant de l'un à l'autre, alors ils sont équivalents.
- Si, après de longues tentatives, vous ne trouvez pas de telle transformation, la question reste en suspens.

Complément : la classification des nœuds est difficile

Problème de classification : étant donnés deux nœuds, disons sous forme de diagrammes planaires, comment déterminer s'ils sont équivalents ou non ?

$? = ?$

Le théorème de Reidemeister ne fournit pas d'algorithme !

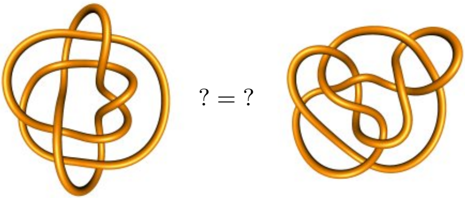
- Si vous avez la chance de trouver une suite de mouvements de Reidemeister menant de l'un à l'autre, alors ils sont équivalents.
- Si, après de longues tentatives, vous ne trouvez pas de telle transformation, la question reste en suspens.

Exemple (la paire de Perko)

Depuis le 19e siècle on pensait les deux nœuds ci-dessus différents.

Complément : la classification des nœuds est difficile

Problème de classification : étant donnés deux nœuds, disons sous forme de diagrammes planaires, comment déterminer s'ils sont équivalents ou non ?



$? = ?$

Le théorème de Reidemeister ne fournit pas d'algorithme !

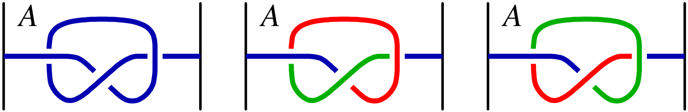
- Si vous avez la chance de trouver une suite de mouvements de Reidemeister menant de l'un à l'autre, alors ils sont équivalents.
- Si, après de longues tentatives, vous ne trouvez pas de telle transformation, la question reste en suspens.

Exemple (la paire de Perko)

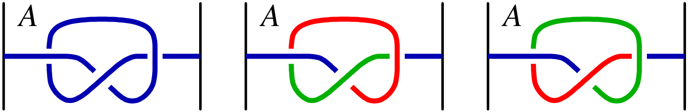
Depuis le 19e siècle on pensait les deux nœuds ci-dessus différents.

En 1974 l'avocat new-yorkais Kenneth Perko découvre qu'ils sont en fait équivalents ! Pour une telle transformation voir `www.knotplot.com/perko`.

Ajoutons des couleurs ! Prenons bleu, rouge et vert.



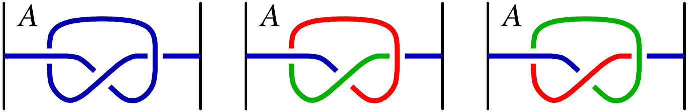
Ajoutons des couleurs ! Prenons bleu, rouge et vert.



On colorie les arcs d'un diagramme selon les règles suivantes :

Tricoloriages (Fox 1971)

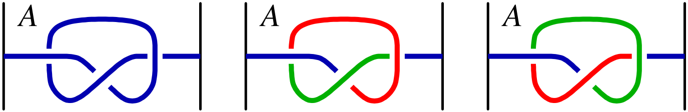
Ajoutons des couleurs ! Prenons bleu, rouge et vert.



On colorie les arcs d'un diagramme selon les règles suivantes :

1. Le premier arc est colorié en bleu.

Ajoutons des couleurs ! Prenons bleu, rouge et vert.

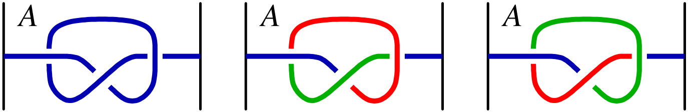


On colorie les arcs d'un diagramme selon les règles suivantes :

1. Le premier arc est colorié en bleu.
2. À chaque croisement se rencontrent soit toutes les trois couleurs, soit une seule couleur. (On interdit donc les croisements bicolores.)

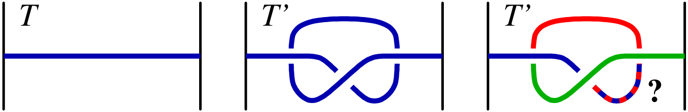
Tricoloriages (Fox 1971)

Ajoutons des couleurs ! Prenons bleu, rouge et vert.

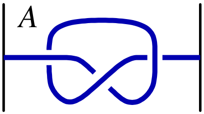


On colorie les arcs d'un diagramme selon les règles suivantes :

1. Le premier arc est colorié en bleu.
2. À chaque croisement se rencontrent soit toutes les trois couleurs, soit une seule couleur. (On interdit donc les croisements bicolores.)

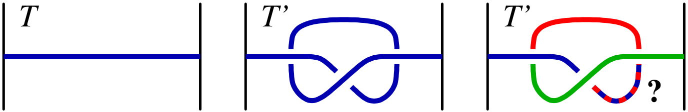


Ajoutons des couleurs ! Prenons bleu, rouge et vert.



On colorie les arcs d'un diagramme selon les règles suivantes :

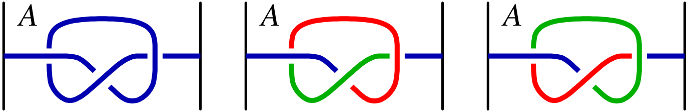
1. Le premier arc est colorié en bleu.
2. À chaque croisement se rencontrent soit toutes les trois couleurs, soit une seule couleur. (On interdit donc les croisements bicolores.)



Définition

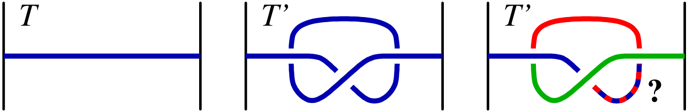
Pour tout diagramme D on note $\mathrm{col}(D)$ le nombre de ses tricoloriages.

Ajoutons des couleurs ! Prenons bleu, rouge et vert.



On colorie les arcs d'un diagramme selon les règles suivantes :

1. Le premier arc est colorié en bleu.
2. À chaque croisement se rencontrent soit toutes les trois couleurs, soit une seule couleur. (On interdit donc les croisements bicolores.)



Définition

Pour tout diagramme D on note $\mathrm{col}(D)$ le nombre de ses tricoloriages.

Exemple : on trouve que $\mathrm{col}(A) = 3$ mais $\mathrm{col}(T) = \mathrm{col}(T') = 1$.

Les tricoloriages sont invariants !

Théorème (Fox 1971)

Si $D \sim D'$ *alors* $\mathrm{col}(D) = \mathrm{col}(D')$.

Les tricoloriages sont invariants !

Théorème (Fox 1971)

Si $D \sim D'$ *alors* $\operatorname{col}(D) = \operatorname{col}(D')$*.*

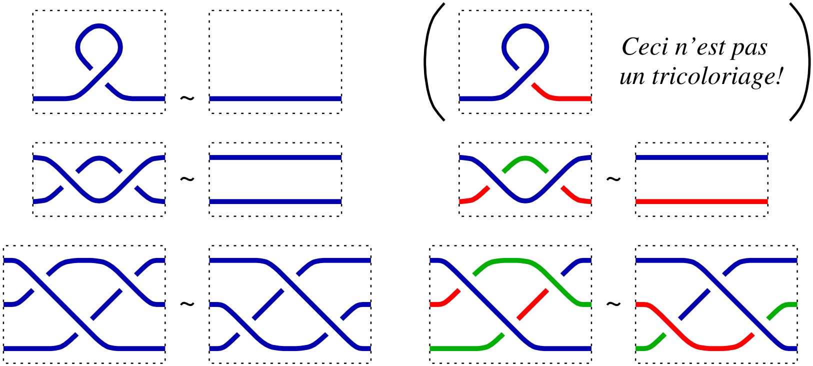
Par contraposé : si $\operatorname{col}(D) \neq \operatorname{col}(D')$ alors $D \not\sim D'$.

Théorème (Fox 1971)

Si $D \sim D'$ *alors* $\mathrm{col}(D) = \mathrm{col}(D')$*.*

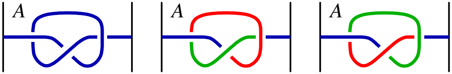
Par contraposé : si $\mathrm{col}(D) \neq \mathrm{col}(D')$ alors $D \not\sim D'$.

Démonstration. Études les trois mouvements locaux de Reidemeister :



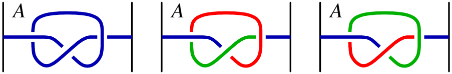
Existe-t-il des nœuds inverses ?

Le nœud de trèfle admet trois tricoloriages :



Existe-t-il des nœuds inverses ?

Le nœud de trèfle admet trois tricoloriages :



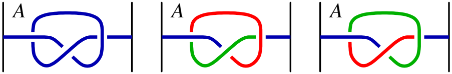
On en déduit que le nœud de trèfle est non trivial :

$\mathrm{col}(A)=3$

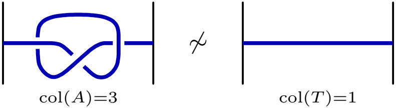
$\not\simeq$

$\mathrm{col}(T)=1$

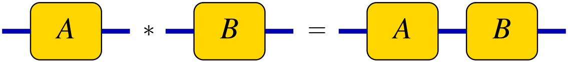
Le nœud de trèfle admet trois tricoloriages :



On en déduit que le nœud de trèfle est non trivial :

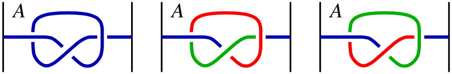


Mieux encore : on a $\mathrm{col}(A * B) = \mathrm{col}(A) \cdot \mathrm{col}(B)$.

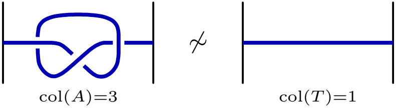


Existe-t-il des nœuds inverses ?

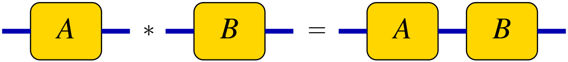
Le nœud de trèfle admet trois tricoloriages :



On en déduit que le nœud de trèfle est non trivial :



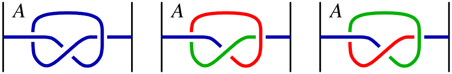
Mieux encore : on a $\operatorname{col}(A * B) = \operatorname{col}(A) \cdot \operatorname{col}(B)$.



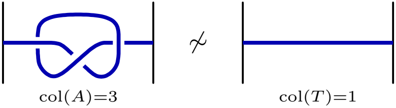
Si l'on avait $A * B = 1$, alors $\operatorname{col}(A) \cdot \operatorname{col}(B) = 1$. C'est impossible !

Existe-t-il des nœuds inverses ?

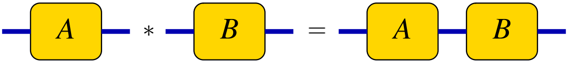
Le nœud de trèfle admet trois tricoloriages :



On en déduit que le nœud de trèfle est non trivial :



Mieux encore : on a $\mathrm{col}(A * B) = \mathrm{col}(A) \cdot \mathrm{col}(B)$.



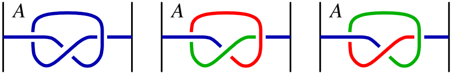
Si l'on avait $A * B = 1$, alors $\mathrm{col}(A) \cdot \mathrm{col}(B) = 1$. C'est impossible !

Conclusion

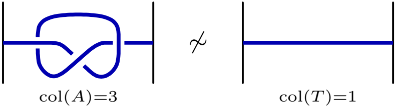
Le nœud de trèfle n'a pas d'inverse.

Existe-t-il des nœuds inverses ?

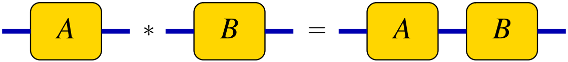
Le nœud de trèfle admet trois tricoloriages :



On en déduit que le nœud de trèfle est non trivial :



Mieux encore : on a $\mathrm{col}(A * B) = \mathrm{col}(A) \cdot \mathrm{col}(B)$.



Si l'on avait $A * B = 1$, alors $\mathrm{col}(A) \cdot \mathrm{col}(B) = 1$. C'est impossible !

Conclusion

Le nœud de trèfle n'a pas d'inverse.

Ceci résout notre question initiale issue du « jonglage topologique ».

Complément : l’astuce de Barry Mazur

omettre

Complément : l'astuce de Barry Mazur

Existe-t-il des nœuds inverses ? Voici la réponse en toute généralité :

Théorème

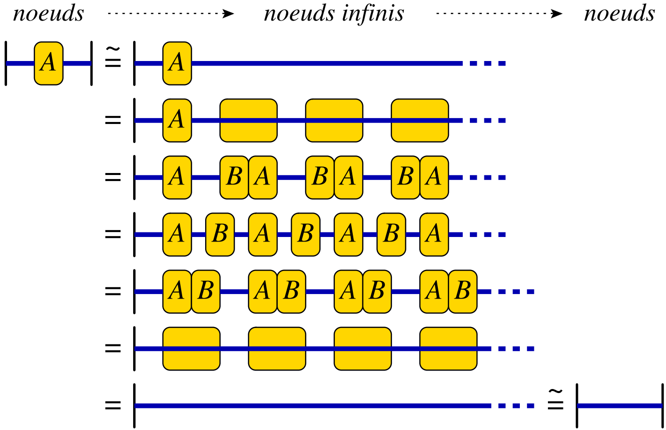
Si deux nœuds A et B vérifient $A * B = 1$, alors $A = B = 1$.

Existe-t-il des nœuds inverses ? Voici la réponse en toute généralité :

Théorème

Si deux nœuds A et B vérifient $A * B = 1$, alors $A = B = 1$.

Démonstration (d'après Barry Mazur 1962) On sait que $BA = AB = 1$.



Complément : l’astuce de Mazur est-ce une escroquerie ?

omettre

Complément : l'astuce de Mazur est-ce une escroquerie ?

L'argument ci-dessus a aussi été nommé « escroquerie de Mazur ».

Complément : l’astuce de Mazur est-ce une escroquerie ?

L’argument ci-dessus a aussi été nommé « escroquerie de Mazur ».

L’astuce de Mazur peut être transformée en une preuve solide,
mais il faut donner un sens précis aux constructions utilisées.

Complément : l’astuce de Mazur est-ce une escroquerie ?

L’argument ci-dessus a aussi été nommé « escroquerie de Mazur ».

L’astuce de Mazur peut être transformée en une preuve solide,
mais il faut donner un sens précis aux constructions utilisées.

Soyons donc prudents !

Complément : l’astuce de Mazur est-ce une escroquerie ?

L’argument ci-dessus a aussi été nommé « escroquerie de Mazur ».

L’astuce de Mazur peut être transformée en une preuve solide,
mais il faut donner un sens précis aux constructions utilisées.

Soyons donc prudents !

Voici une analogie numérique instructive, qui est visiblement absurde :

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & 1 & & & & & & & & \\
= & 1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \dots \\
= & 1 & + & (-1+1) & + & (-1+1) & + & (-1+1) & + & \dots \\
= & 1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & + & \dots \\
= & (1-1) & + & (1-1) & + & (1-1) & + & (1-1) & + & \dots \\
= & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \dots \\
= & 0 & & & & & & & &
\end{array}
$$

Mais où est l’erreur ?

Complément : décomposition en nœuds premiers

omettre

Complément : décomposition en nœuds premiers

Un nœud A est *composé* si $A = B * C$ où $B \neq 1$ et $C \neq 1$.

Complément : décomposition en nœuds premiers

Un nœud A est *composé* si $A = B * C$ où $B \neq 1$ et $C \neq 1$.
Un nœud A est *premier* si $A = B * C$ entraîne soit $B = 1$ soit $C = 1$.

Complément : décomposition en nœuds premiers

Un nœud A est *composé* si $A = B * C$ où $B \neq 1$ et $C \neq 1$.
Un nœud A est *premier* si $A = B * C$ entraîne soit $B = 1$ soit $C = 1$.
Par exemple, le nœud de trèfle et le nœud de huit sont premiers.

Complément : décomposition en nœuds premiers

Un nœud A est *composé* si $A = B * C$ où $B \neq 1$ et $C \neq 1$.
Un nœud A est *premier* si $A = B * C$ entraîne soit $B = 1$ soit $C = 1$.
Par exemple, le nœud de trèfle et le nœud de huit sont premiers.
Il existe une infinité de nœuds premiers.

Complément : décomposition en nœuds premiers

Un nœud A est *composé* si $A = B * C$ où $B \neq 1$ et $C \neq 1$.
Un nœud A est *premier* si $A = B * C$ entraîne soit $B = 1$ soit $C = 1$.
Par exemple, le nœud de trèfle et le nœud de huit sont premiers.
Il existe une infinité de nœuds premiers.

Théorème (Schubert 1949)

Tout nœud se décompose comme concaténation de nœuds premiers.

Complément : décomposition en nœuds premiers

Un nœud A est *composé* si $A = B * C$ où $B \neq 1$ et $C \neq 1$.
Un nœud A est *premier* si $A = B * C$ entraîne soit $B = 1$ soit $C = 1$.
Par exemple, le nœud de trèfle et le nœud de huit sont premiers.
Il existe une infinité de nœuds premiers.

Théorème (Schubert 1949)

Tout nœud se décompose comme concaténation de nœuds premiers.
Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près. $\square$

Complément : décomposition en nœuds premiers

Un nœud A est *composé* si $A = B * C$ où $B \neq 1$ et $C \neq 1$.
Un nœud A est *premier* si $A = B * C$ entraîne soit $B = 1$ soit $C = 1$.
Par exemple, le nœud de trèfle et le nœud de huit sont premiers.
Il existe une infinité de nœuds premiers.

Théorème (Schubert 1949)

Tout nœud se décompose comme concaténation de nœuds premiers.
Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près. □

Ceci justifie que la tabulation ne tient compte que des nœuds premiers.

Complément : décomposition en nœuds premiers

Un nœud A est *composé* si $A = B * C$ où $B \neq 1$ et $C \neq 1$.
Un nœud A est *premier* si $A = B * C$ entraîne soit $B = 1$ soit $C = 1$.
Par exemple, le nœud de trèfle et le nœud de huit sont premiers.
Il existe une infinité de nœuds premiers.

Théorème (Schubert 1949)

Tout nœud se décompose comme concaténation de nœuds premiers.
Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près. □

Ceci justifie que la tabulation ne tient compte que des nœuds premiers.

Les nombres naturels $(\mathbb{N}, \cdot)$ jouissent de la même propriété :
tout $n \in \mathbb{N}$ se décompose de manière unique en produit de facteurs premiers.

Complément : décomposition en nœuds premiers

Un nœud A est *composé* si $A = B * C$ où $B \neq 1$ et $C \neq 1$.
Un nœud A est *premier* si $A = B * C$ entraîne soit $B = 1$ soit $C = 1$.
Par exemple, le nœud de trèfle et le nœud de huit sont premiers.
Il existe une infinité de nœuds premiers.

Théorème (Schubert 1949)

Tout nœud se décompose comme concaténation de nœuds premiers.
Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près. □

Ceci justifie que la tabulation ne tient compte que des nœuds premiers.

Les nombres naturels $(\mathbb{N}, \cdot)$ jouissent de la même propriété :
tout $n \in \mathbb{N}$ se décompose de manière unique en produit de facteurs premiers.

Corollaire

Il existe une bijection entre les nœuds avec leur concaténation
et les nombres naturels $\{1, 2, 3, \ldots\}$ *avec leur multiplication.* □

Complément : décomposition en nœuds premiers

Un nœud A est *composé* si $A = B * C$ où $B \neq 1$ et $C \neq 1$.
Un nœud A est *premier* si $A = B * C$ entraîne soit $B = 1$ soit $C = 1$.
Par exemple, le nœud de trèfle et le nœud de huit sont premiers.
Il existe une infinité de nœuds premiers.

Théorème (Schubert 1949)

Tout nœud se décompose comme concaténation de nœuds premiers.
Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près. □

Ceci justifie que la tabulation ne tient compte que des nœuds premiers.

Les nombres naturels $(\mathbb{N}, \cdot)$ jouissent de la même propriété :
tout $n \in \mathbb{N}$ se décompose de manière unique en produit de facteurs premiers.

Corollaire

Il existe une bijection entre les nœuds avec leur concaténation
et les nombres naturels $\{1, 2, 3, \dots\}$ *avec leur multiplication.* □

Sous cette bijection le nœud trivial correspond au nombre 1,
les nœuds premiers correspondent aux nombres premiers,
et les nœuds composés correspondent aux nombres composés.

Complément : décomposition en nœuds premiers

Un nœud A est *composé* si $A = B * C$ où $B \neq 1$ et $C \neq 1$.
Un nœud A est *premier* si $A = B * C$ entraîne soit $B = 1$ soit $C = 1$.
Par exemple, le nœud de trèfle et le nœud de huit sont premiers.
Il existe une infinité de nœuds premiers.

Théorème (Schubert 1949)

Tout nœud se décompose comme concaténation de nœuds premiers.
Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près. □

Ceci justifie que la tabulation ne tient compte que des nœuds premiers.

Les nombres naturels $(\mathbb{N}, \cdot)$ jouissent de la même propriété :
tout $n \in \mathbb{N}$ se décompose de manière unique en produit de facteurs premiers.

Corollaire

Il existe une bijection entre les nœuds avec leur concaténation
et les nombres naturels $\{1, 2, 3, \dots\}$ *avec leur multiplication.* □

Sous cette bijection le nœud trivial correspond au nombre 1,
les nœuds premiers correspondent aux nombres premiers,
et les nœuds composés correspondent aux nombres composés.

Autrement dit, les nœuds se comportent comme les nombres naturels.

Complément : décomposition en nœuds premiers

Un nœud A est *composé* si $A = B * C$ où $B \neq 1$ et $C \neq 1$.
Un nœud A est *premier* si $A = B * C$ entraîne soit $B = 1$ soit $C = 1$.
Par exemple, le nœud de trèfle et le nœud de huit sont premiers.
Il existe une infinité de nœuds premiers.

Théorème (Schubert 1949)

Tout nœud se décompose comme concaténation de nœuds premiers.
Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près. $\square$

Ceci justifie que la tabulation ne tient compte que des nœuds premiers.

Les nombres naturels $(\mathbb{N}, \cdot)$ jouissent de la même propriété :
tout $n \in \mathbb{N}$ se décompose de manière unique en produit de facteurs premiers.

Corollaire

Il existe une bijection entre les nœuds avec leur concaténation
et les nombres naturels $\{1, 2, 3, \dots\}$ *avec leur multiplication.* $\square$

Sous cette bijection le nœud trivial correspond au nombre 1,
les nœuds premiers correspondent aux nombres premiers,
et les nœuds composés correspondent aux nombres composés.

Autrement dit, les nœuds se comportent comme les nombres naturels.
Malheureusement le théorème ne fournit pas de bijection explicite.

Plan de l'exposé

1 Origines historiques et motivations

2 Tresses

3 Nœuds

4 Entrelacs
- La question de la chiralité
- La vrille et le nombre d'enlacement
- Le crochet de Kauffman et le polynôme de Jones

La question de la chiralité

Proposition

Le nœud de huit est amphichiral.

Proposition

Le nœud de huit est amphichiral.

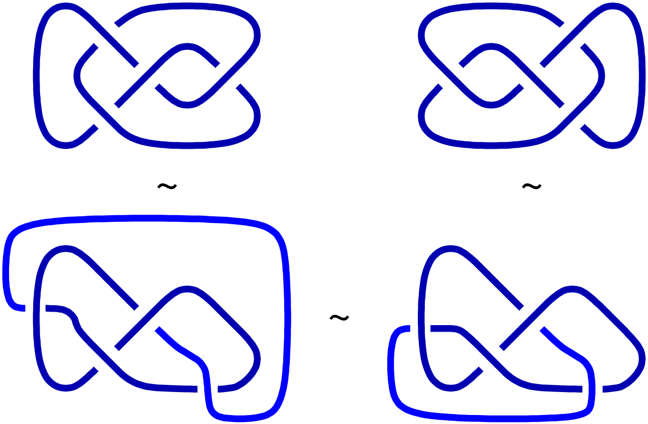
Démonstration.
Il suffit d'exhiber une transformation qui fait ce que l'on veut :

La question de la chiralité

Proposition

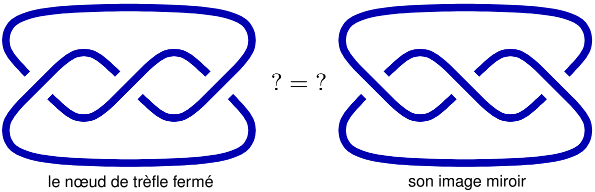
Le nœud de huit est amphichiral.

Démonstration.
Il suffit d'exhiber une transformation qui fait ce que l'on veut :



Question (Listing 1847, résolue par Dehn 1914)

Le nœud de trèfle est-il égal à son image miroir ?



Des nœuds aux entrelacs

Quand on autorise plusieurs composantes, on parle d'un *entrelacs*.

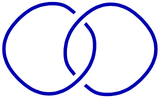


diagramme d'un entrelacs

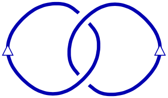


diagramme orienté

Des nœuds aux entrelacs

Quand on autorise plusieurs composantes, on parle d'un *entrelacs*.

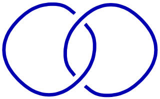


diagramme d'un entrelacs

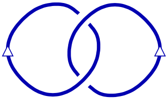


diagramme orienté

Muni d'une orientation sur chaque composante, c'est un *entrelacs orienté*.

Quand on autorise plusieurs composantes, on parle d'un *entrelacs*.

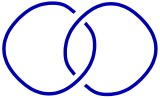


diagramme d'un entrelacs

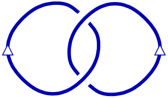


diagramme orienté

Muni d'une orientation sur chaque composante, c'est un *entrelacs orienté*.
Le théorème de Reidemeister s'étend aux diagrammes d'entrelacs orientés.

Quand on autorise plusieurs composantes, on parle d’un *entrelacs*.

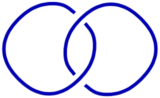


diagramme d’un entrelacs

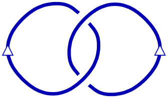


diagramme orienté

Muni d’une orientation sur chaque composante, c’est un *entrelacs orienté*.
Le théorème de Reidemeister s’étend aux diagrammes d’entrelacs orientés.

On peut définir la vrille $v\colon \vec{\mathscr{D}} \to \mathbb{Z}$ en comptant les croisements avec signes :

$v\Big($  $\Big) = +1,$ $\qquad$ $v\Big($  $\Big) = -1.$

Des nœuds aux entrelacs

Quand on autorise plusieurs composantes, on parle d'un *entrelacs*.

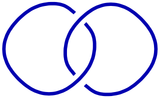


diagramme d'un entrelacs

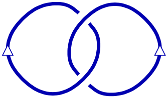


diagramme orienté

Muni d'une orientation sur chaque composante, c'est un *entrelacs orienté*.
Le théorème de Reidemeister s'étend aux diagrammes d'entrelacs orientés.

On peut définir la vrille $v\colon \vec{\mathscr{D}} \to \mathbb{Z}$ en comptant les croisements avec signes :

$v\Big($  $\Big) = +1,$ $\qquad v\Big($  $\Big) = -1.$

La vrille n'est pas invariante — elle change sous un mouvement R1 :

$v\Big($  $\Big) = v\Big($  $\Big) + 1.$

Des nœuds aux entrelacs

Quand on autorise plusieurs composantes, on parle d'un *entrelacs*.

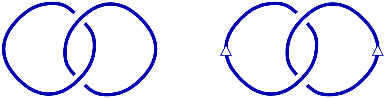


diagramme d'un entrelacs   diagramme orienté

Muni d'une orientation sur chaque composante, c'est un *entrelacs orienté*.
Le théorème de Reidemeister s'étend aux diagrammes d'entrelacs orientés.

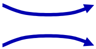
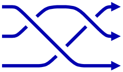
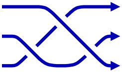
On peut définir la vrille $v\colon \vec{\mathscr{D}} \to \mathbb{Z}$ en comptant les croisements avec signes :

$v\Big($  $\Big) = +1,$ $\qquad v\Big($  $\Big) = -1.$

La vrille n'est pas invariante — elle change sous un mouvement R1 :

$v\Big($  $\Big) = v\Big($  $\Big) + 1.$

Par contre, on a toujours l'invariance par R2 et R3 :

$v\Big($  $\Big) = v\Big($  $\Big),$ $\quad v\Big($  $\Big) = v\Big($  $\Big).$

Complément : le nombre d’enlacement

omettre

On peut en tirer un invariant en ne comptant que les *croisements mixtes*, où deux composantes différentes se croisent.

Complément : le nombre d'enlacement

On peut en tirer un invariant en ne comptant que les *croisements mixtes*, où deux composantes différentes se croisent.

Définition

Nous définissons le *nombre d'enlacement* $\operatorname{lk}\colon \vec{\mathscr{D}} \to \mathbb{Z}$ par

$$\operatorname{lk}(D) = \frac{1}{2} \sum_{c \text{ mixte}} v(c).$$

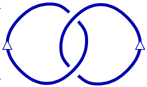
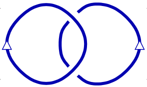
Complément : le nombre d’enlacement

On peut en tirer un invariant en ne comptant que les *croisements mixtes*, où deux composantes différentes se croisent.

Définition

Nous définissons le *nombre d’enlacement* $\mathrm{lk}\colon \vec{\mathscr{D}} \to \mathbb{Z}$ par

$$\mathrm{lk}(D) = \frac{1}{2} \sum_{c \text{ mixte}} v(c).$$

Exemple : $\mathrm{lk}\Bigg($  $\Bigg) = +1,\quad \mathrm{lk}\Bigg($  $\Bigg) = 0.$

Complément : le nombre d’enlacement est invariant

omettre

Complément : le nombre d'enlacement est invariant

Proposition

Le nombre d'enlacement $\mathrm{lk}(D)$ *est invariant.*

Proposition

Le nombre d'enlacement $\mathrm{lk}(D)$ *est invariant.*

Démonstration. Le mouvement R1 ne pose plus de problème :

$\mathrm{lk}\Big($  $\Big) = \mathrm{lk}\Big($  $\Big).$

Complément : le nombre d'enlacement est invariant

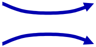
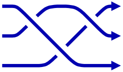
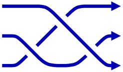
Proposition

Le nombre d'enlacement $\mathrm{lk}(D)$ *est invariant.*

Démonstration. Le mouvement R1 ne pose plus de problème :

$\mathrm{lk}\Big($  $\Big) = \mathrm{lk}\Big($  $\Big).$

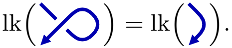
Puis on assure toujours l'invariance par les mouvements R2 et R3 :

$\mathrm{lk}\Big($  $\Big) = \mathrm{lk}\Big($  $\Big),$ $\quad \mathrm{lk}\Big($  $\Big) = \mathrm{lk}\Big($  $\Big).$

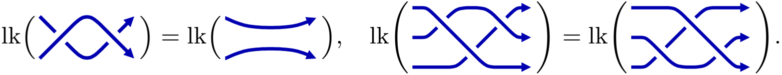
Proposition

Le nombre d'enlacement $\mathrm{lk}(D)$ *est invariant.*

Démonstration. Le mouvement R1 ne pose plus de problème :



Puis on assure toujours l'invariance par les mouvements R2 et R3 :



Pour ceci il suffit de vérifier tous les cas possibles. $\square$

Complément : le nombre d'enlacement est invariant

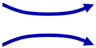
Proposition

Le nombre d'enlacement $\mathrm{lk}(D)$ *est invariant.*

Démonstration. Le mouvement R1 ne pose plus de problème :

$\mathrm{lk}\Big($  $\Big) = \mathrm{lk}\Big($  $\Big).$

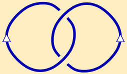
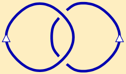
Puis on assure toujours l'invariance par les mouvements R2 et R3 :

$\mathrm{lk}\Big($  $\Big) = \mathrm{lk}\Big($  $\Big),\quad \mathrm{lk}\Big($  $\Big) = \mathrm{lk}\Big($  $\Big).$

Pour ceci il suffit de vérifier tous les cas possibles. $\square$

Corollaire

On ne peut pas séparer les composantes d'un entrelacs de Hopf :

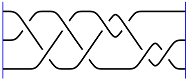
 $\not\sim$ .

J'utilise ce résultat quotidiennement pour l'antivol de mon vélo.

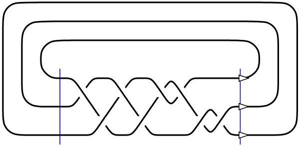
Complément : tresses fermées

Complément : tresses fermées

Toute tresse β peut être fermée :

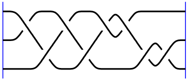


$\mapsto$

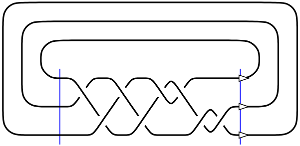


Complément : tresses fermées

Toute tresse β peut être fermée :



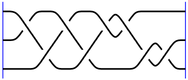
$\longmapsto$



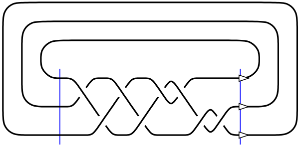
Théorème (Alexander 1924)

Tout entrelacs peut être représentée comme la fermeture d'une tresse. $\square$

Toute tresse β peut être fermée :



$\mapsto$



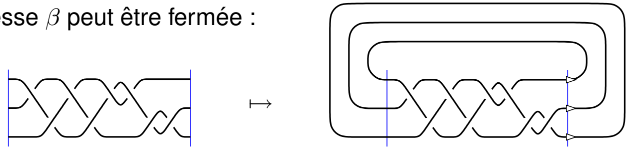
Théorème (Alexander 1924)

Tout entrelacs peut être représentée comme la fermeture d'une tresse. $\square$

Si une tresse $\beta \in \mathbf{B}_n$ représente ainsi l'entrelacs L, alors les deux *mouvements de Markov* suivants créent d'autres tresses β' représentant L :

Complément : tresses fermées

Toute tresse β peut être fermée :



Théorème (Alexander 1924)

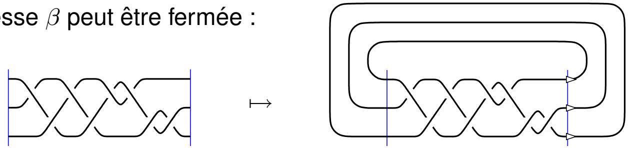
Tout entrelacs peut être représentée comme la fermeture d'une tresse. $\square$

Si une tresse $\beta \in \mathbf{B}_n$ représente ainsi l'entrelacs L, alors les deux *mouvements de Markov* suivants créent d'autres tresses β' représentant L :

Stabilisation : $\beta' = \beta s_n^{\pm 1} \in \mathbf{B}_{n+1}$ où $\mathbf{B}_n \subset \mathbf{B}_{n+1}$ en rajoutant un brin trivial.

Complément : tresses fermées

Toute tresse β peut être fermée :



Théorème (Alexander 1924)

Tout entrelacs peut être représentée comme la fermeture d'une tresse. □

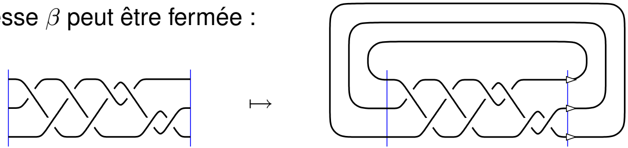
Si une tresse $\beta \in \mathbf{B}_n$ représente ainsi l'entrelacs L, alors les deux *mouvements de Markov* suivants créent d'autres tresses β' représentant L :

Stabilisation : $\beta' = \beta s_n^{\pm 1} \in \mathbf{B}_{n+1}$ où $\mathbf{B}_n \subset \mathbf{B}_{n+1}$ en rajoutant un brin trivial.

Conjugaison : $\beta' = \alpha\beta\alpha^{-1} \in \mathbf{B}_n$ pour n'importe quelle tresse $\alpha \in \mathbf{B}_n$.

Complément : tresses fermées

Toute tresse β peut être fermée :



Théorème (Alexander 1924)

Tout entrelacs peut être représentée comme la fermeture d'une tresse. □

Si une tresse $\beta \in \mathbf{B}_n$ représente ainsi l'entrelacs L, alors les deux *mouvements de Markov* suivants créent d'autres tresses β' représentant L :

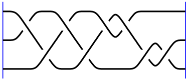
Stabilisation : $\beta' = \beta s_n^{\pm 1} \in \mathbf{B}_{n+1}$ où $\mathbf{B}_n \subset \mathbf{B}_{n+1}$ en rajoutant un brin trivial.

Conjugaison : $\beta' = \alpha\beta\alpha^{-1} \in \mathbf{B}_n$ pour n'importe quelle tresse $\alpha \in \mathbf{B}_n$.

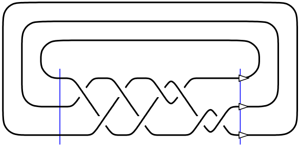
Ces mouvements correspondant aux mouvements de Reidemeister R1 et R2.

Complément : tresses fermées

Toute tresse β peut être fermée :



$\mapsto$



Théorème (Alexander 1924)

Tout entrelacs peut être représentée comme la fermeture d'une tresse. $\square$

Si une tresse $\beta \in \mathbf{B}_n$ représente ainsi l'entrelacs L, alors les deux *mouvements de Markov* suivants créent d'autres tresses β' représentant L :

Stabilisation : $\beta' = \beta s_n^{\pm 1} \in \mathbf{B}_{n+1}$ où $\mathbf{B}_n \subset \mathbf{B}_{n+1}$ en rajoutant un brin trivial.

Conjugaison : $\beta' = \alpha\beta\alpha^{-1} \in \mathbf{B}_n$ pour n'importe quelle tresse $\alpha \in \mathbf{B}_n$.

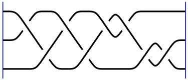
Ces mouvements correspondant aux mouvements de Reidemeister R1 et R2.

Théorème (Markov 1945)

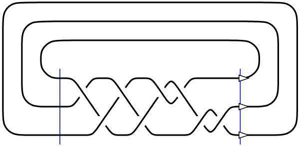
Deux tresses représentent le même entrelacs si et seulement si elles sont reliées par une suite finie de mouvements de Markov.

Complément : tresses fermées

Toute tresse β peut être fermée :



$\mapsto$



Théorème (Alexander 1924)

Tout entrelacs peut être représentée comme la fermeture d'une tresse. $\square$

Si une tresse $\beta \in \mathbf{B}_n$ représente ainsi l'entrelacs L, alors les deux *mouvements de Markov* suivants créent d'autres tresses β' représentant L :

Stabilisation : $\beta' = \beta s_n^{\pm 1} \in \mathbf{B}_{n+1}$ où $\mathbf{B}_n \subset \mathbf{B}_{n+1}$ en rajoutant un brin trivial.

Conjugaison : $\beta' = \alpha\beta\alpha^{-1} \in \mathbf{B}_n$ pour n'importe quelle tresse $\alpha \in \mathbf{B}_n$.

Ces mouvements correspondant aux mouvements de Reidemeister R1 et R2.

Théorème (Markov 1945)

Deux tresses représentent le même entrelacs si et seulement si elles sont reliées par une suite finie de mouvements de Markov.

Cette correspondance permet d'étudier les entrelacs à l'aide des tresses, la théorie des groupes, les représentations par des matrices, etc.
Depuis Jones 1984 c'est un domaine de recherche très actif.

Objectif : On veut associer à chaque diagramme D un nombre $\langle D \rangle$.

Le crochet de Kauffman (1987)

Objectif : On veut associer à chaque diagramme D un nombre $\langle D \rangle$.

Commençons par un diagramme sans croisements : c'est une réunion de courbes fermées simples dans le plan, éventuellement imbriqués.

Le crochet de Kauffman (1987)

Objectif : On veut associer à chaque diagramme D un nombre $\langle D \rangle$.

Commençons par un diagramme sans croisements : c'est une réunion de courbes fermées simples dans le plan, éventuellement imbriqués. On pose

$$\left\langle \bigcirc \right\rangle := C, \quad \left\langle \bigcirc\bigcirc \right\rangle := C^2, \quad \left\langle \bigcirc\bigcirc\bigcirc \right\rangle := C^3, \ldots, \left\langle \bigcirc^{n} \right\rangle := C^n.$$

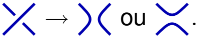
Le crochet de Kauffman (1987)

Objectif : On veut associer à chaque diagramme D un nombre $\langle D \rangle$.

Commençons par un diagramme sans croisements : c'est une réunion de courbes fermées simples dans le plan, éventuellement imbriqués. On pose

$$\left\langle \bigcirc \right\rangle := C, \quad \left\langle \bigcirc\bigcirc \right\rangle := C^2, \quad \left\langle \bigcirc\bigcirc\bigcirc \right\rangle := C^3, \ldots, \left\langle \bigcirc^n \right\rangle := C^n.$$

Passons ensuite aux diagrammes avec croisements.
Tout croisement peut être éliminé de deux manières différentes :



Le crochet de Kauffman (1987)

Objectif : On veut associer à chaque diagramme D un nombre $\langle D \rangle$.

Commençons par un diagramme sans croisements : c'est une réunion de courbes fermées simples dans le plan, éventuellement imbriqués. On pose

$$\left\langle \bigcirc \right\rangle := C, \quad \left\langle \bigcirc\bigcirc \right\rangle := C^2, \quad \left\langle \bigcirc\bigcirc\bigcirc \right\rangle := C^3, \ldots, \left\langle \bigcirc^{n} \right\rangle := C^n.$$

Passons ensuite aux diagrammes avec croisements.
Tout croisement peut être éliminé de deux manières différentes :

$$\times \to)(\text{ ou } \asymp.$$

Essayons de définir $\langle D \rangle$ par une récurrence à deux termes :

$$\left\langle \times \right\rangle := A \left\langle)(\right\rangle + B \left\langle \asymp \right\rangle.$$

Le crochet de Kauffman (1987)

Objectif : On veut associer à chaque diagramme D un nombre $\langle D \rangle$.

Commençons par un diagramme sans croisements : c'est une réunion de courbes fermées simples dans le plan, éventuellement imbriqués. On pose

$$\left\langle \bigcirc \right\rangle := C, \quad \left\langle \bigcirc\bigcirc \right\rangle := C^2, \quad \left\langle \bigcirc\bigcirc\bigcirc \right\rangle := C^3, \ldots, \left\langle \bigcirc^{n} \right\rangle := C^n.$$

Passons ensuite aux diagrammes avec croisements.
Tout croisement peut être éliminé de deux manières différentes :

 $\to$  ou .

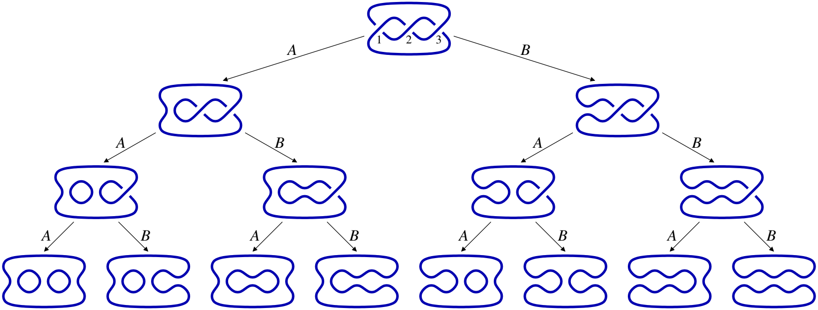
Essayons de définir $\langle D \rangle$ par une récurrence à deux termes :

$\Big\langle$  $\Big\rangle := A \Big\langle$  $\Big\rangle + B \Big\langle$  $\Big\rangle$.

Ce sont des *relations locales*. Ici A, B, C sont des indéterminées.

Calcul récursif du crochet : un exemple

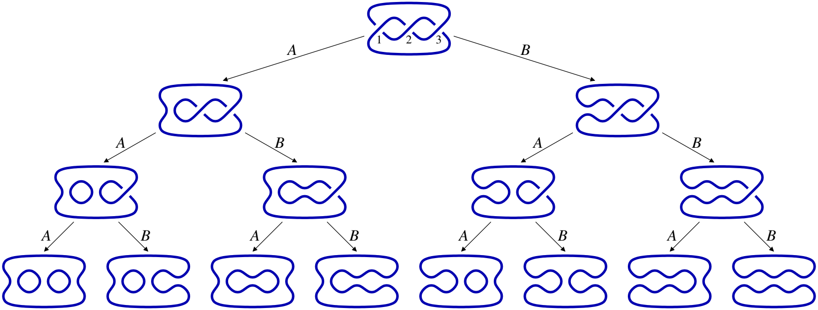
Exemple :



$$A^3B^0C^3+A^2B^1C^2+A^2B^1C^2+A^1B^2C^1+A^2B^1C^2+A^1B^2C^1+A^1B^2C^1+A^0B^3C^2$$

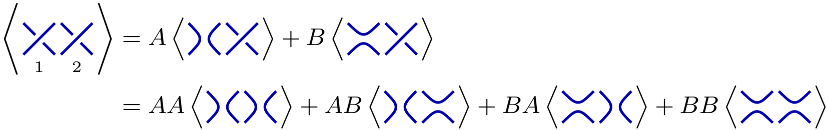
Calcul récursif du crochet : un exemple

Exemple :



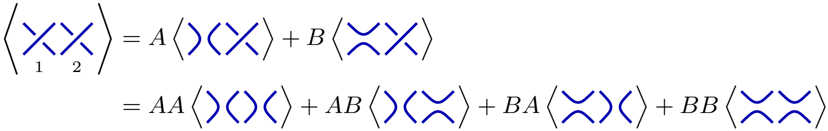
$$A^3B^0C^3+A^2B^1C^2+A^2B^1C^2+A^1B^2C^1+A^2B^1C^2+A^1B^2C^1+A^1B^2C^1+A^0B^3C^2$$

L'ordre des croisements n'influe pas le résultat :

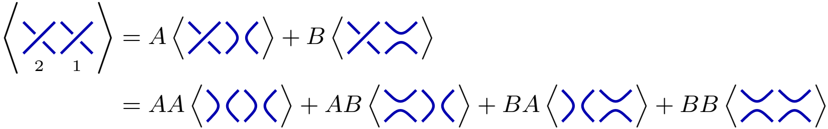


Invariance : l'ordre des croisements

L'ordre des croisements n'influe pas le résultat :

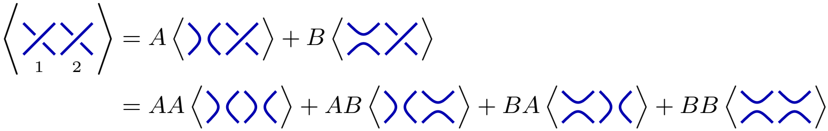


Dans l'autre ordre on obtient :

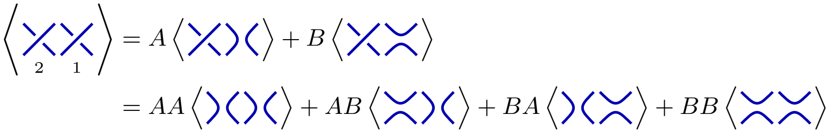


Invariance : l’ordre des croisements

L’ordre des croisements n’influe pas le résultat :



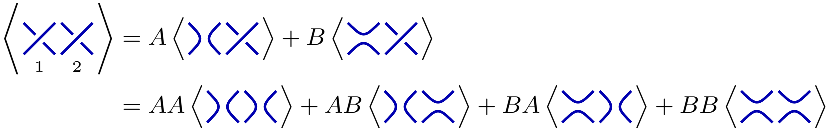
Dans l’autre ordre on obtient :



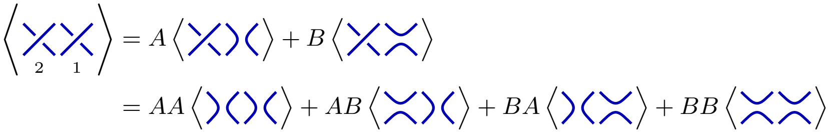
La commutativité $AB = BA$ assure l’égalité des deux résultats.

Invariance : l'ordre des croisements

L'ordre des croisements n'influe pas le résultat :



Dans l'autre ordre on obtient :

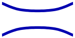


La commutativité $AB = BA$ assure l'égalité des deux résultats.

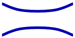
Question : Est-ce que $\langle D \rangle$ est invariant par mouvements de Reidemeister ?

Invariance : R2

Regardons d'abord le mouvement R2 :

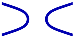
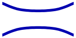
$\Big\langle$  $\Big\rangle$?=? $\Big\langle$  $\Big\rangle$

Regardons d'abord le mouvement R2 :

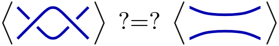
$\Big\langle$  $\Big\rangle \; ?{=}? \; \Big\langle$  $\Big\rangle$

Par définition du crochet on trouve

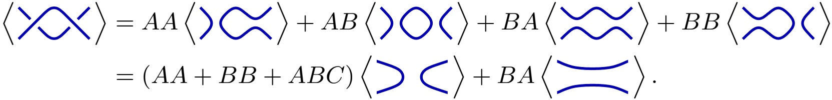
$\Big\langle$  $\Big\rangle = AA \Big\langle$  $\Big\rangle + AB \Big\langle$  $\Big\rangle + BA \Big\langle$  $\Big\rangle + BB \Big\langle$  $\Big\rangle$

$= (AA + BB + ABC) \Big\langle$  $\Big\rangle + BA \Big\langle$  $\Big\rangle .$

Regardons d'abord le mouvement R2 :



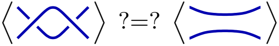
Par définition du crochet on trouve



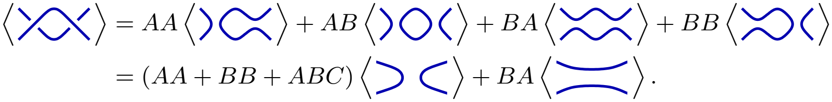
On obtient l'invariance pour $AB = 1$ et $A^2 + B^2 + ABC = 0$.

Invariance : R2

Regardons d'abord le mouvement R2 :



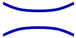
Par définition du crochet on trouve



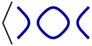
On obtient l'invariance pour $AB = 1$ et $A^2 + B^2 + ABC = 0$.

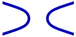
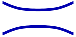
Autrement dit, on impose les relations $B = A^{-1}$ et $C = -A^2 - A^{-2}$.

Regardons d'abord le mouvement R2 :

$\Big\langle$  $\Big\rangle \; ?{=}? \; \Big\langle$  $\Big\rangle$

Par définition du crochet on trouve

$\Big\langle$  $\Big\rangle = AA \Big\langle$  $\Big\rangle + AB \Big\langle$  $\Big\rangle + BA \Big\langle$  $\Big\rangle + BB \Big\langle$  $\Big\rangle$

$= (AA + BB + ABC) \Big\langle$  $\Big\rangle + BA \Big\langle$  $\Big\rangle .$

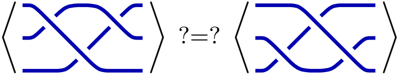
On obtient l'invariance pour $AB = 1$ et $A^2 + B^2 + ABC = 0$.

Autrement dit, on impose les relations $B = A^{-1}$ et $C = -A^2 - A^{-2}$.

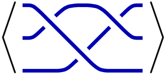
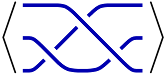
Ainsi on n'a plus trois indéterminées A, B, C mais une seule, A.

Invariance : R3

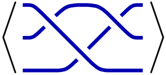
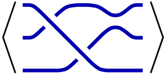
Regardons ensuite le mouvement R3 :



Regardons ensuite le mouvement R3 :

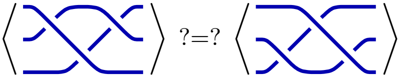
 $?=?$ 

Par définition du crochet on trouve d'un coté

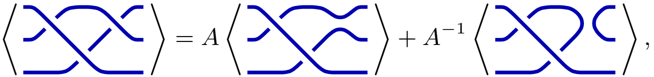
 $= A$  $+ A^{-1}$  ,

Invariance : R3

Regardons ensuite le mouvement R3 :

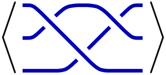
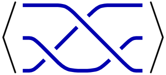


Par définition du crochet on trouve d'un coté

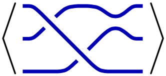


et de l'autre coté

Regardons ensuite le mouvement R3 :

 $?=?$ 

Par définition du crochet on trouve d'un coté

 $= A$  $+ A^{-1}$  ,

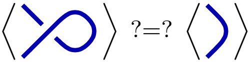
et de l'autre coté

 $= A$  $+ A^{-1}$  .

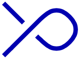
Les deux sont égaux ! (On profite ici de l'invariance R2.)

Invariance : R1

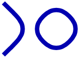
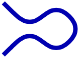
Regardons finalement le mouvement R1 :



Regardons finalement le mouvement R1 :

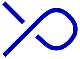
$\Big\langle$  $\Big\rangle$ $?\!=\!?$ $\Big\langle$  $\Big\rangle$

Par définition du crochet on trouve

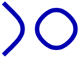
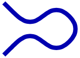
$\Big\langle$  $\Big\rangle = A \Big\langle$  $\Big\rangle + A^{-1} \Big\langle$  $\Big\rangle$

$= \left[A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1}\right] \Big\langle$  $\Big\rangle = -A^3 \Big\langle$  $\Big\rangle$.

Regardons finalement le mouvement R1 :

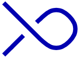
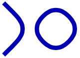
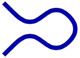
$\Big\langle$  $\Big\rangle$?=? $\Big\langle$  $\Big\rangle$

Par définition du crochet on trouve

$\Big\langle$  $\Big\rangle = A \Big\langle$  $\Big\rangle + A^{-1} \Big\langle$  $\Big\rangle$

$= \left[A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1}\right] \Big\langle$  $\Big\rangle = -A^3 \Big\langle$  $\Big\rangle$.

De même on trouve

$\Big\langle$  $\Big\rangle = A^{-1} \Big\langle$  $\Big\rangle + A \Big\langle$  $\Big\rangle$

$= \left[A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) + A\right] \Big\langle$  $\Big\rangle = -A^{-3} \Big\langle$  $\Big\rangle$.

Du crochet de Kauffman au polynôme de Jones

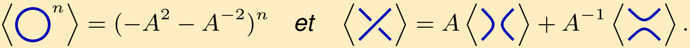
Proposition

À tout diagramme non orienté D on peut associer une valeur $\langle D \rangle$ définie par

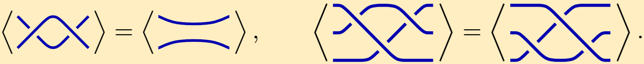
$$\left\langle \bigcirc^{n} \right\rangle = (-A^2 - A^{-2})^n \quad \textit{et} \quad \left\langle \times \right\rangle = A \left\langle)(\right\rangle + A^{-1} \left\langle \asymp \right\rangle .$$

Proposition

À tout diagramme non orienté D on peut associer une valeur $\langle D \rangle$ définie par

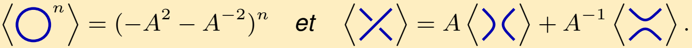


Elle est invariante par des mouvements de Reidemeister R2 et R3 :

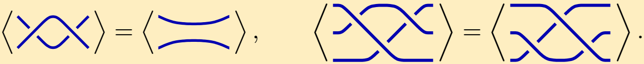


Proposition

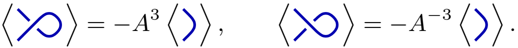
À tout diagramme non orienté D on peut associer une valeur $\langle D \rangle$ définie par



Elle est invariante par des mouvements de Reidemeister R2 et R3 :

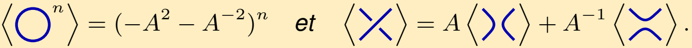


Sous un mouvement R1 elle change de manière bien contrôlée :

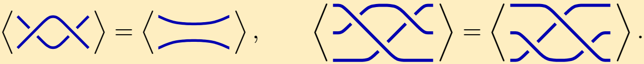


Proposition

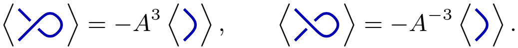
À tout diagramme non orienté D on peut associer une valeur $\langle D\rangle$ définie par



Elle est invariante par des mouvements de Reidemeister R2 et R3 :



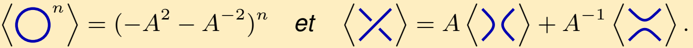
Sous un mouvement R1 elle change de manière bien contrôlée :



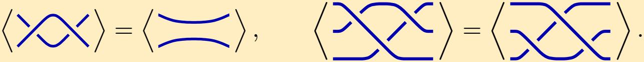
Pour corriger ce défaut on utilise la vrille de diagrammes orientés :

Proposition

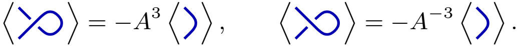
À tout diagramme non orienté D on peut associer une valeur $\langle D \rangle$ définie par



Elle est invariante par des mouvements de Reidemeister R2 et R3 :



Sous un mouvement R1 elle change de manière bien contrôlée :



Pour corriger ce défaut on utilise la vrille de diagrammes orientés :

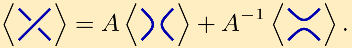
Théorème

À tout diagramme orienté D on associe $J(D) := (-A^3)^{-v(D)} \cdot \langle D \rangle$.

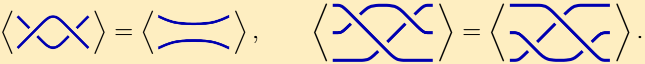
Proposition

À tout diagramme non orienté D on peut associer une valeur $\langle D \rangle$ définie par

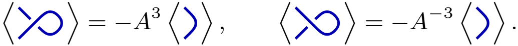
$$\left\langle \bigcirc^{n} \right\rangle = (-A^2 - A^{-2})^n$$ *et*



Elle est invariante par des mouvements de Reidemeister R2 et R3 :



Sous un mouvement R1 elle change de manière bien contrôlée :



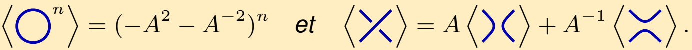
Pour corriger ce défaut on utilise la vrille de diagrammes orientés :

Théorème

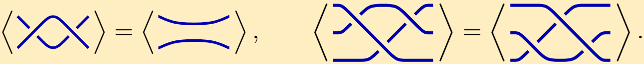
À tout diagramme orienté D on associe $J(D) := (-A^3)^{-v(D)} \cdot \langle D \rangle$.
Ce polynôme est invariant par les trois mouvements de Reidemeister. $\square$

Proposition

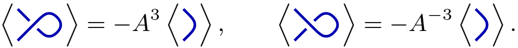
À tout diagramme non orienté D on peut associer une valeur $\langle D \rangle$ définie par



Elle est invariante par des mouvements de Reidemeister R2 et R3 :



Sous un mouvement R1 elle change de manière bien contrôlée :



Pour corriger ce défaut on utilise la vrille de diagrammes orientés :

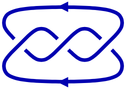
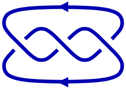
Théorème

À tout diagramme orienté D on associe $J(D) := (-A^3)^{-v(D)} \cdot \langle D \rangle$.
Ce polynôme est invariant par les trois mouvements de Reidemeister. $\square$

C'est donc une propriété de l'entrelacs indépendante du diagramme choisi.

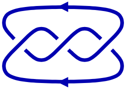
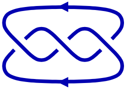
Application au nœud de trèfle

Considérons un diagramme D du nœud de trèfle et son image miroir D^* :

$D =$  vs $D^* =$  .

Application au nœud de trèfle

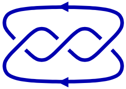
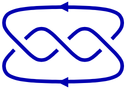
Considérons un diagramme D du nœud de trèfle et son image miroir D^* :

$D =$  vs $D^* =$  .

On voit que la vrille de ces diagrammes vaut $v(D) = -3$ et $v(D^*) = +3$.

Application au nœud de trèfle

Considérons un diagramme D du nœud de trèfle et son image miroir D^* :

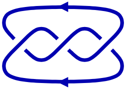
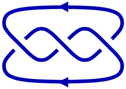
$D =$  vs $D^* =$  .

On voit que la vrille de ces diagrammes vaut $v(D) = -3$ et $v(D^*) = +3$.

D'après nos calculs nous avons $\langle D \rangle = A^{-7} + A^{-3} + A^{1} - A^{9}$.

Application au nœud de trèfle

Considérons un diagramme D du nœud de trèfle et son image miroir D^* :

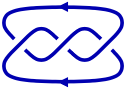
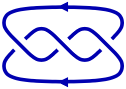
$D =$  vs $D^* =$  .

On voit que la vrille de ces diagrammes vaut $v(D) = -3$ et $v(D^*) = +3$.

D'après nos calculs nous avons $\langle D \rangle = A^{-7} + A^{-3} + A^{1} - A^{9}$.
Ainsi $J(D) = (-A^3)^{-v(D)} \langle D \rangle = -A^2 - A^6 - A^{10} + A^{18}$.

Application au nœud de trèfle

Considérons un diagramme D du nœud de trèfle et son image miroir D^* :

$D =$  vs $D^* =$  .

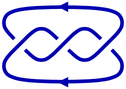
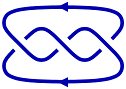
On voit que la vrille de ces diagrammes vaut $v(D) = -3$ et $v(D^*) = +3$.

D'après nos calculs nous avons $\langle D \rangle = A^{-7} + A^{-3} + A^{1} - A^{9}$.
Ainsi $J(D) = (-A^3)^{-v(D)} \langle D \rangle = -A^2 - A^6 - A^{10} + A^{18}$.

Pour l'image miroir nous obtenons $\langle D^* \rangle = A^7 + A^3 + A^{-1} - A^{-9}$.

Application au nœud de trèfle

Considérons un diagramme D du nœud de trèfle et son image miroir D^* :

$D =$  vs $D^* =$  .

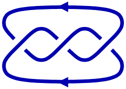
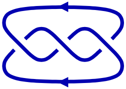
On voit que la vrille de ces diagrammes vaut $v(D) = -3$ et $v(D^*) = +3$.

D'après nos calculs nous avons $\langle D \rangle = A^{-7} + A^{-3} + A^{1} - A^{9}$.
Ainsi $J(D) = (-A^3)^{-v(D)} \langle D \rangle = -A^2 - A^6 - A^{10} + A^{18}$.

Pour l'image miroir nous obtenons $\langle D^* \rangle = A^{7} + A^{3} + A^{-1} - A^{-9}$.
et ainsi $J(D^*) = (-A^3)^{-v(D^*)} \langle D^* \rangle = -A^{-2} - A^{-6} - A^{-10} + A^{-18}$.

Application au nœud de trèfle

Considérons un diagramme D du nœud de trèfle et son image miroir D^* :

$D =$  vs $D^* =$  .

On voit que la vrille de ces diagrammes vaut $v(D) = -3$ et $v(D^*) = +3$.

D'après nos calculs nous avons $\langle D \rangle = A^{-7} + A^{-3} + A^{1} - A^{9}$.
Ainsi $J(D) = (-A^3)^{-v(D)} \langle D \rangle = -A^2 - A^6 - A^{10} + A^{18}$.

Pour l'image miroir nous obtenons $\langle D^* \rangle = A^{7} + A^{3} + A^{-1} - A^{-9}$.
et ainsi $J(D^*) = (-A^3)^{-v(D^*)} \langle D^* \rangle = -A^{-2} - A^{-6} - A^{-10} + A^{-18}$.

Conclusion

On vient de prouver que $D \not\sim D^*$: le nœud de trèfle est chiral !

Conclusion

La théorie mathématique des tresses et des nœuds est relativement récente.

Conclusion

La théorie mathématique des tresses et des nœuds est relativement récente.

Nous n'avons vu que la pointe de l'iceberg :

- Le groupe des tresses,
- La notion de tricoloriage,
- Le polynôme de Jones.

Conclusion

La théorie mathématique des tresses et des nœuds est relativement récente.

Nous n'avons vu que la pointe de l'iceberg :

- Le groupe des tresses,
- La notion de tricoloriage,
- Le polynôme de Jones.

Il y a encore beaucoup de questions ouvertes, par exemple :

Conclusion

La théorie mathématique des tresses et des nœuds est relativement récente.

Nous n'avons vu que la pointe de l'iceberg :

- Le groupe des tresses,
- La notion de tricoloriage,
- Le polynôme de Jones.

Il y a encore beaucoup de questions ouvertes, par exemple :

Question de Jones : Si $J(K) = J(\bigcirc)$, est-ce que nécessairement $K = \bigcirc$?

Conclusion

La théorie mathématique des tresses et des nœuds est relativement récente.

Nous n'avons vu que la pointe de l'iceberg :

- Le groupe des tresses,
- La notion de tricoloriage,
- Le polynôme de Jones.

Il y a encore beaucoup de questions ouvertes, par exemple :

Question de Jones : Si $J(K) = J(\bigcirc)$, est-ce que nécessairement $K = \bigcirc$?
Autrement dit, le polynôme de Jones reconnaît-il le nœud trivial ?

Conclusion

La théorie mathématique des tresses et des nœuds est relativement récente.

Nous n'avons vu que la pointe de l'iceberg :

- Le groupe des tresses,
- La notion de tricoloriage,
- Le polynôme de Jones.

Il y a encore beaucoup de questions ouvertes, par exemple :

Question de Jones : Si $J(K) = J(\bigcirc)$, est-ce que nécessairement $K = \bigcirc$?
Autrement dit, le polynôme de Jones reconnaît-il le nœud trivial ?

Je vous remercie de votre attention !

`www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/popularisation/#noeuds`